Mémorial des sciences mathématiques

A. Buhl

Formules stokiennes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 16 (1926)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__16__1_0>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.,
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT
Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris,
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE XVI.

Formules stokiennes

PAR M. A. BUHL
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre crochets dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

FORMULES STOKIENNES

Par M. A. BUHL

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Tout ce qui, dans ce fascicule, est engendré par les formules stokiennes peut provenir aussi bien du Calcul des variations, de la Théorie des Groupes, de celle des Invariants intégraux [1], du Problème de Pfaff [2], du Calcul différentiel absolu ou Calcul tensoriel et, sans doute, d'autres disciplines encore. Mais, outre qu'il serait peu pratique d'exposer tant de choses à la fois, il semble particulièment intéressant de s'en tenir au point de vue « stokien » et, plus exactement, à celui qui a son origine dans des identités évidentes prises à la base du Calcul intégral [*cf.* formules (1), Chap. I et II].

Les théories einsteiniennes surgissent *immédiatement* derrière ces prémisses rudimentaires, sous la forme, d'abord amétrique de H. Weyl [3], A. S. Eddington [4], exposée par Th. De Donder [5] à l'aide du Calcul des variations; la Mécanique classique s'en accommode aussi, ses équations canoniques ayant des propriétés qui peuvent être symétriquement opposées aux précédentes et sont tout aussi harmonieuses. C'est là qu'il est commode de parler de formes *antistokiennes;* si le mot est nouveau, la chose remonte, au moins, à Henri Poincaré qui, en suivant les propriétés des équations canoniques avec la Théorie des Invariants intégraux, a précisément apporté, en Mécanique céleste, des méthodes ressemblant étonnamment à celles de la Physique mathématique.

La théorie des groupes repose sur des symétries du même genre. Quant aux théories einsteiniennes, le moins qu'on puisse dire à leur éloge est qu'elles apportent dans le domaine physique un ordre comparable à celui que cette notion de groupe a apporté en géométrie.

On peut considérer ces théories comme l'étude de propriétés *gravifiques* présentées par les équations *électromagnétiques* de Maxwell-Lorentz; le fait que ces équations ne s'accordent pas avec tous les phénomènes électromagnétiques est d'importance fort secondaire, aucune théorie n'ayant jamais présenté une perfection absolue.

De plus, les théories einsteiniennes ont un si prodigieux et même si étrange pouvoir de synthèse que, même dans les nombreux cas où l'on ne peut les appliquer, par suite des difficultés analytiques que l'on rencontre de prime abord, on peut revenir aux méthodes classiques sans cesser d'être einsteinien.

C'est ainsi que les équations ordinaires de la dynamique des milieux continus s'insèrent, avec la plus grande facilité, dans les combinaisons préliminaires d'intégrales multiples qui peuvent servir de base à la Gravifique d'Einstein.

CHAPITRE I.

FORMULES STOKIENNES ÉLÉMENTAIRES.

1. Convention de sommation. — Dans tout le cours de cet opuscule nous conviendrons que tout terme monome contenant deux fois *le même* indice doit être sommé par rapport à cet indice. Ainsi $P_i dx_i$ représentera

$$P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \ldots + P_n\, dx_n.$$

La valeur de n sera généralement en évidence; sinon il sera toujours très simple de l'indiquer.

« Cette convention ne sert pas seulement à abréger l'écriture; elle apporte une aide considérable à l'analyse car elle lui donne une sorte d'impulsion dans une direction qui se trouve être toujours la bonne » [4]. Il faut entendre par là que le procédé suggère très aisément des combinaisons multiplicatives et additives de formules polynomes; si nous ne le mettions pas en évidence dès le début, il s'imposerait à bref délai. Il sera rapidement justifié et rien n'empêche de commencer par l'employer.

2. Identité fondamentale. Formule de Green-Riemann. — Par « formules stokiennes élémentaires » il faut entendre celles qui proviennent de transformations, ou de combinaisons linéaires de transformations, de l'identité

$$\int_c X\,dY = \int\int_s dX\,dY. \tag{1}$$

En celle-ci, c est le contour d'une aire s simplement connexe dans le plan YOX.

Il importe de bien remarquer la simplicité du point de départ; on peut dire que l'identité (1) contient en puissance tout le contenu du fascicule et probablement bien d'autres choses encore.

Nous passerons sur des démonstrations élémentaires données dans un autre opuscule [6] et n'indiquerons d'abord que des résultats. Ainsi, par un simple changement de variables, (1) se transforme en la formule de Green-Riemann

$$\int_C P_i\,dx_i = \int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix} dx_1\,dx_2. \tag{2}$$

3. Formule de Stokes ordinaire. — Cette formule suppose une cloison gauche S, de contour C, qu'il est encore très simple de faire correspondre à l'aire plane s de (1). Elle est

$$\int_C P_i\,dx_i = \int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} d\sigma. \tag{3}$$

Sa propriété fondamentale est de révéler une intégrale double invariante pour toutes les déformations de la cloison S qui ne modifient pas le contour C de cette cloison. Par α, β, γ il faut entendre les cosinus directeurs de la normale menée à S en l'élément $d\sigma$. Si S avait l'équation explicite $z = z(x, y)$, avec x, y, z écrits pour x_1, x_2, x_3, on pourrait poser, dans (3),

$$\alpha\,d\sigma = -p\,dx\,dy, \qquad \beta\,d\sigma = -q\,dx\,dy, \qquad \gamma\,d\sigma = dx\,dy. \tag{4}$$

4. Formule stokienne pour cloisons à x, y, z, p, q invariables le long du contour. — Ici encore on peut établir très simplement une correspondance entre l'aire plane s de (1) et les points à normale déterminée d'une cloison S. Soient toujours $z = z(x, y)$ l'équation de S et p, q, r, s, t, les dérivées partielles de z suivant les notations bien connues. On aura

$$(5) \qquad \int_C P_i\,dx_i = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix} dx\,dy,$$

Les P_i sont cinq fonctions dépendant chacune de x, y, z, p, q. Dans le premier membre de (5), les cinq éléments dx_i s'écrivent respectivement dx, dy, dz, dp, dq.

L'essentiel, dans la formule (5), est la construction de l'intégrale double invariante pour les déformations de la cloison S qui n'altèrent ni le contour C *ni l'ensemble des normales menées à* S *le long de* C.

5. **Symétrisation de** (5). — La formule (5) est analogue à (3) écrite avec les seconds membres des égalités (4). Or il y a, pour (5), une forme aussi symétrique que (3) même. Cette forme est

$$(6) \qquad \int_C P_i\,dx_i = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z & -1 & 0 & 0 \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z & 0 & -1 & 0 \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z & 0 & 0 & -1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{vmatrix} d\sigma.$$

Les P_i sont six fonctions dépendant chacune de x, y, z, α, β, γ. Dans le premier membre de (6), les six éléments dx_i s'écrivent respectivement dx, dy, dz, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

On pourrait évidemment poursuivre la méthode qui a donné (5) ou (6) et obtenir, par exemple, des formules stokiennes pour cloisons ayant, tout le long de C, des contacts d'ordre de plus en plus élevé.

Les formules stokiennes précédentes, étant toutes déduites de (1), peuvent aussi se déduire les unes des autres; on peut même prétendre, *au point de vue logique*, qu'elles ne sont pas distinctes. Au point de vue pratique, elles n'en sont pas moins fort remarquables et peuvent servir chacune de porte d'entrée à de grandes théories.

APPLICATIONS.

Nous laisserons de côté les applications géométriques des formules stokiennes, applications exposées dans un opuscule déjà cité. Nous ne pouvons pas davantage traiter de celles intéressant l'hydrodynamique; elles seront mieux à leur place dans la partie du « Mémorial » traitant de la Mécanique des fluides. Nous verrons, dans le Chapitre suivant, que les théories électromagnétiques de De Donder, Lorentz et Einstein sont essentiellement stokiennes. Pour l'instant, nous allons nous borner à quelques applications analytiques simples, mais ouvrant la voie à d'importantes généralisations.

6. **Équations aux différentielles totales.** — Considérons l'équation classique à trois variables

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0. \tag{7}$$

Il s'agit de réduire, si possible, le premier membre à la forme $X\,dY$, ce qui entraîne

$$P = X\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad Q = X\frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad R = X\frac{\partial Y}{\partial z},$$

et

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Un changement de variables conserve la forme de (7) et, par suite, la forme de la *condition d'intégrabilité* (8). En particulier, s'il existe un changement de variables permettant d'écrire

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \lambda\,du + \mu\,dv, \tag{9}$$

la condition d'intégrabilité, formée pour le second membre de cette égalité, est

$$\lambda\frac{\partial \mu}{\partial w} = \mu\frac{\partial \lambda}{\partial w}.$$

Donc $\lambda : \mu$ ne dépend pas de la troisième nouvelle variable w.

Ceci posé reprenons (7) avec la condition (8). Considérons l'équation aux dérivées partielles, à fonction inconnue f,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0.$$

Elle admet deux intégrales distinctes $f = u$ et $f = v$. On a ainsi, avec (8), trois équations entre lesquelles on peut éliminer les dérivées partielles de P, Q, R. Le résultat de l'élimination

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0,$$

prouve qu'il existe des fonctions, λ et μ, telles que

$$P = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad Q = \lambda\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad R = \lambda\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\frac{\partial v}{\partial z},$$

ou telles que nous ayons une égalité (9). Comme, en celle-ci, le rapport de λ à μ ne dépendra que de u et v, nous serons ramené à l'équation différentielle ordinaire

$$\lambda\, du + \mu\, dv = 0.$$

Telle est, pour l'intégration de (7), la méthode de J. Bertrand, telle qu'elle est exposée [7] par M. E. Goursat; elle a constamment une symétrie *stokienne*. M. Goursat applique la méthode à l'équation

$$(y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + zx + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz = 0.$$

M. P. Painlevé a fait de même [8] pour cette dernière et pour

$$(cy - bz)\,dx + (az - cx)\,dy + (bx - ay)\,dz = 0.$$

7. **Problème de Pfaff.** — Le problème de Pfaff consiste à ramener des formes différentielles à des aspects canoniques généralement aussi simples que possible. On en aura une première idée en posant

$$(10) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\alpha + \beta\,d\gamma.$$

Cette réduction est toujours possible car on peut écrire

$$\left(P-\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)dx+\left(Q-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)dy+\left(R-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)dz=\beta\,d\gamma.$$

Pour le premier membre la condition d'intégrabilité est

$$\begin{vmatrix} P-\frac{\partial\alpha}{\partial x} & Q-\frac{\partial\alpha}{\partial y} & R-\frac{\partial\alpha}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0.$$

Ceci constitue une équation aux dérivées partielles donnant pour α une infinité de formes. On déterminera ensuite β et γ par la méthode du paragraphe précédent.

La réduction (10) réduit l'intégrale simple de la formule de Stokes (3) à une intégrale qui ne porte plus que sur $\beta d\gamma$. C'est revenir à l identité (1). On voit que nous sommes toujours dans les questions stokiennes. Tout ceci est susceptible de généralisations extrêmement étendues pour lesquelles nous devrons encore renvoyer au magnifique Ouvrage de M. E. Goursat [2].

Gaston Darboux a greffé sur l'équation (10) des développements géométriques très importants et élégants [9]; on en trouve d'analogues dans la Thèse de M. E. Turrière [10]. Tous ces travaux donnent de beaux exemples de symétrie stokienne.

8. Équations simultanées. — Il s'agit ici des deux équations aux dérivées partielles

$$F(x,y,z,p,q)=0, \qquad \Phi(x,y,z,p,q)=0, \tag{11}$$

et de la recherche d'une solution z commune, si elle existe. Après avoir tiré p et q de ces équations, on a, en

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

une équation aux différentielles totales, analogue à (7); il y a donc une condition d'intégrabilité, analogue à (8) et qui est

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & -1 \end{vmatrix}=0, \tag{12}$$

ou bien

$$(13) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Si U représente F ou Φ, si θ représente ou x, ou y, ou z, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \theta} = 0$$

et cette équation en représente six qui permettront de calculer

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial q}{\partial z}.$$

D'ailleurs il n'y a que quatre de ces six expressions qui sont nécessaires; en les portant dans (13), cette équation devient

$$(14) \quad F_p(\Phi_x + p\Phi_z) + F_q(\Phi_y + q\Phi_z) - \Phi_p(F_x + pF_z) - \Phi_q(F_y + qF_z) = 0.$$

Les indices indiquent des dérivations partielles.

En (14) on a évidemment une condition d'intégrabilité pour le système (11) et cette condition (14), tirée de (12), n'est qu'une transformation de (8). Nous sommes toujours dans les formes stokiennes.

9. **Équation unique en x, y, z, p, q.** — Pour intégrer l'unique équation

$$(15) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

on forme un système (11) complètement intégrable de par le choix de Φ. Cette fonction Φ est donc donnée par l'équation *linéaire* (14) qu'on intègre par considération du système

$$(16) \qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}.$$

Il suffit d'ailleurs de trouver *une* intégrale

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a = \text{const.}$$

de (16). Alors les équations

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \Phi(x, y, z, p, q) = a,$$

sont propres à donner p et q tels que

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

soit une équation aux différentielles totales complètement intégrable. L'intégration de celle-ci donnera

$$\varphi(x, y, z; a, b) = 0.$$

C'est là l'intégrale *complète* de (15). L'enveloppe à deux paramètres a et b, de cette famille de surfaces est l'intégrale *singulière* de (15); elle n'existe pas toujours. L'enveloppe à un seul paramètre, quand $\lambda(a, b) = 0$, est l'intégrale *générale;* elle dépend de la fonction *arbitraire* λ.

Tout ceci est bien connu et l'exposition adoptée ne diffère pas essentiellement de celle de M. Goursat [7]; nous insistons seulement sur l'origine stokienne qu'on peut donner à ces questions.

10. Équations canoniques. — Reprenons l'équation (15), en supposant que le premier membre ne contienne pas explicitement z. Alors le système (16) peut s'écrire

$$(17)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

C'est là un premier exemple d'équations canoniques. On voit que ces équations, qui peuvent exister pour $2n$ variables et donner celles de la dynamique classique ont encore une symétrie à lier avec celle des formules stokiennes. Nous reprendrons cette idée, sous un jour différent, au Chapitre III. Pour l'instant nous sommes allés aussi simplement, aussi élémentairement que possible, de la formule stokienne élémentaire au système différentiel canonique [et ce avec l'identité (1) pour point de départ]. C'est voir d'abord en petit, en miniature, le lien grandiose et des plus modernes qui va des théories électromagnétiques aux théories mécaniques. Les deux Chapitres suivants auront pour but de justifier et de développer cette assertion.

11. Équations de Monge-Ampère. — La formule (5) montre qu'il existe des surfaces sur lesquelles

$$P_1\,dx + P_2\,dy + P_3\,dz + P_4\,dp + P_5\,dq,$$

est une différentielle exacte. Les cinq fonctions P_i contiennent chacune x, y, z, p, q et sont données. Les surfaces en litige ont pour équation aux dérivées partielles

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui se développe en

$$(19)\qquad K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0.$$

C'est là [6] l'équation de Monge-Ampère *du type de Bäcklund*.

Soit maintenant à déterminer des surfaces sur lesquelles on aurait

$$(20)\qquad \begin{cases} N_1\,dx + N_2\,dy + N_3\,dz + N_4\,dp + N_5\,dq = 0, \\ P_1\,dx + P_2\,dy + P_3\,dz + P_4\,dp + P_5\,dq = 0. \end{cases}$$

et, bien entendu,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Ces surfaces ont pour équation aux dérivées partielles

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se développe encore sous la forme (19) et est, cette fois, l'équation de Monge-Ampère *générale* construite à partir des *caractéristiques* (20).

Prendre une équation de Monge-Ampère générale et en déterminer les caractéristiques, c'est tout simplement mettre l'équation sous la forme (21) et ce n'est, par suite, qu'une question d'identification; si l'on tente celle-ci, on est immédiatement conduit à des calculs quadratiques d'où il résulte, en général, qu'une équation de Monge-Ampère admet *deux* systèmes de caractéristiques.

Le seul aspect des équations (18) ou (21) et la comparaison avec (5) montre combien l'étude des équations de Monge-Ampère est stokienne;

nous ne voulons pas ici en dire autre chose. L'étude de ces équations est dominée, et de très haut, par les travaux de M. E. Goursat qui, outre un Ouvrage classique bien connu [11], a consacré au *problème de Bäcklund* d'importants Mémoires. Renvoyons surtout à [12] et [13] ainsi qu'au fascicule VI du « Mémorial ».

Dans notre opuscule [6] on retrouvera le présent paragraphe notablement plus développé.

12. Courbures. Formule d'O. Bonnet. — On trouve de nombreux $P_i dx_i$ dans la théorie générale des surfaces. Ainsi soit S une surface $z = z(x, y)$ et, sur celle-ci, une courbe L définie par sa projection $F(x, y) = 0$ sur le plan Oxy. On a [6] pour l'angle élémentaire, de *courbure géodésique*, le long de L

$$\frac{ds}{\rho_g} = \frac{\delta}{\Delta^2}\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ dF'_x & dF'_y \end{vmatrix} - \frac{pF'_x + qF'_y}{\Delta^2\delta}\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ dp & dq \end{vmatrix}. \tag{22}$$

De même l'angle élémentaire de *torsion géodésique* est

$$d\tau_g = \frac{[(1+q^2)F'_x - pqF'_y]\,dp + [(1+p^2)F'_y - pqF'_x]\,dq}{\Delta\delta^2},$$

et l'angle élémentaire de *courbure normale* est

$$\frac{ds}{\rho_n} = \frac{F'_x\,dq - F'_y\,dp}{\Delta\delta}.$$

On a posé

$$\Delta^2 = F'^2_x + F'^2_y + (qF'_x - pF'_y)^2, \qquad \delta^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Les *géodésiques* de S sont les lignes à courbure géodésique nulle; d'après (22) la projection de ces lignes sur le plan Oxy a pour équation différentielle

$$(1 + p^2 + q^2)y'' = (py' - q)(r + 2sy' + ty'^2). \tag{23}$$

Les *lignes de courbure* de S sont les lignes à torsion géodésique nulle; on trouve en ce qui les concerne

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

Les *lignes asymptotiques* de S sont les lignes à courbure normale nulle; on a pour elles

$$dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

Revenons à (22). La formule (5) correspondante est

$$(24) \qquad \int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_S \frac{rt - s^2}{\delta^3} = \int\int_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.$$

C'est la fameuse formule d'Ossian Bonnet. Elle a été longuement étudiée par G. Darboux [14].

Le détail de la démonstration, à partir de (5), est étudié en [6]. Pour la somme des angles A, B, C, d'un triangle géodésique, (24) donne

$$A + B + C - \pi = \int\int_S \frac{d\sigma}{R_1 R_2},$$

et constitue, de ce fait, une première ouverture sur la géométrie non-euclidienne.

13. Formule de M. P. Appell. — C'est la formule (6) pour P_4, P_5, P_6 nuls et

$$P_1 = \beta Z - \gamma Y, \qquad P_2 = \gamma X - \alpha Z, \qquad P_3 = \alpha Y - \beta X,$$

chacune des fonctions X, Y, Z contenant x, y, z mais non α, β, γ. Alors l'intégrale double de (6) devient

$$\int\int_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\, d\sigma - \int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} d\sigma.$$

Ce qui est remarquable ici, c'est l'apparition de la courbure *moyenne* alors que (24) contenait la courbure *totale* [15].

14. Le jacobien J. — C'est le jacobien identiquement nul

$$J = \begin{vmatrix} \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix}.$$

Il donne [6]

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \alpha'_x + \beta'_y + \gamma'_z, \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = - \left|\begin{array}{c|c} J & \begin{matrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{matrix} \\ \hline \alpha \quad \beta \quad \gamma & 0 \end{array}\right|$$

et la formule (6) elle-même naît, si l'on veut, en bordant convenablement ce J.

CHAPITRE II.

FORMULES STOKIENNES ET THÉORIES EINSTEINIENNES.

1. Identités fondamentales. — A la base du présent Chapitre, nous aurons les deux identités fondamentales

$$(1) \qquad \int_c X\,dY = \int\int_s dX\,dY, \qquad \int\int_s X\,dY\,dZ = \int\int\int_v dX\,dY\,dX.$$

Par la première nous ferons correspondre, à une cloison de l'espace à quatre dimensions E_4, une aire plane du plan OXY ; par la seconde, nous ferons correspondre à une portion de variété à trois dimensions, déformable dans E_4, un volume de l'espace ordinaire.

On aura ainsi *deux* formules stokiennes dans E_4 et l'on en aurait de même $n-2$ dans E_n.

L'étude de E_4, qui peut être l'espace-temps, suffira amplement à nous occuper [16].

2. Première formule. — On part de la première identité (1) et l'on pose

$$X = X(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad Y = Y(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

ce qui n'est qu'une transformation à deux variables si

$$(2) \qquad x_3 = x_3(x_1, x_2), \qquad x_4 = x_4(x_1, x_2).$$

Dans ces conditions l'intégrale double de (1) devient

$$\int\int_S \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial X}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x_2} + \frac{\partial X}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial X}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial Y}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} + \frac{\partial Y}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial Y}{\partial x_4}\frac{\partial x_4}{\partial x_2} \end{vmatrix} dx_1\,dx_2$$

Le déterminant qu'elle contient peut être aisément remplacé par un autre du quatrième ordre mais à termes monomes et, en posant

$$P_i = X\frac{\partial Y}{\partial x_i},$$

on a la formule

$$(3)\qquad \int_C \mathrm{P}_i\,dx_i = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_2 & \mathrm{P}_3 & \mathrm{P}_4 \end{vmatrix} dx_1\,dx_2.$$

Dans E_4, S est cloison à deux dimensions de contour C. Cette cloison S est définie jusqu'ici par les équations (2). Supposons-là définie par les équations

$$\mathrm{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \mathrm{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Alors la formule (3) prend définitivement la forme

$$(4)\qquad \int_C \mathrm{P}_i\,dx_i = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_2 & \mathrm{P}_3 & \mathrm{P}_4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2}{\delta}$$

avec

$$\delta = \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_3}\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_4}\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x_3}.$$

L'expression des P_i n'est pas jusqu'ici absolument générale, mais en ajoutant quatre formules (4) écrites pour Y successivement égal à x_1, x_2, x_3, x_4, les X différant des unes aux autres, on reproduit (4) avec des P_i quelconques.

Cette démonstration de (4) est celle qui aurait pu être donnée pour les formules stokiennes du Chapitre précédent; on aurait pu, aussi bien, la passer sous silence. Mais l'importance des résultats subséquents est si grande qu'il vaut mieux ne rien négliger aux environs des points de départ. D'ailleurs cette première démonstration va servir de guide pour obtenir la seconde formule stokienne de E_4.

3. **Seconde formule.** — Nous partons de la seconde identité (1) avec X, Y, Z fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 mais x_4 étant lié aux

variables précédentes, dans l'intégrale triple, par

$$x_4 = x_4(x_1, x_2, x_3). \tag{5}$$

En d'autres termes, le point x_1, x_2, x_3, x_4 appartient à la variété V à trois dimensions (5). Celle-ci sera supposée incluse dans une variété S *fermée*, à deux dimensions, d'équations

$$x_3 = x_3(x_1, x_2), \qquad x_4 = x_4(x_1, x_2). \tag{6}$$

Dans ces conditions une première transformation de la seconde identité (1) donnera

$$\int\!\!\int_S X \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ \frac{\partial Y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} & \frac{\partial Y}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_1} & \frac{\partial Z}{\partial x_2} & \frac{\partial Z}{\partial x_3} & \frac{\partial Z}{\partial x_4} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2 = \int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & \frac{\partial x_4}{\partial x_3} & -1 \\ \frac{\partial X}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x_2} & \frac{\partial X}{\partial x_3} & \frac{\partial X}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} & \frac{\partial Y}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_1} & \frac{\partial Z}{\partial x_2} & \frac{\partial Z}{\partial x_3} & \frac{\partial Z}{\partial x_4} \end{vmatrix} dx_1\, dx_2\, dx_3$$

En introduisant X dans le premier déterminant, ses deux dernières lignes et les trois dernières du second peuvent prendre l'aspect

$$\begin{vmatrix} X\frac{\partial Y}{\partial x_1} & X\frac{\partial Y}{\partial x_2} & X\frac{\partial Y}{\partial x_3} & X\frac{\partial Y}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_1} & \frac{\partial Z}{\partial x_2} & \frac{\partial Z}{\partial x_3} & \frac{\partial Z}{\partial x_4} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ X\frac{\partial Y}{\partial x_1} & X\frac{\partial Y}{\partial x_2} & X\frac{\partial Y}{\partial x_3} & X\frac{\partial Y}{\partial x_4} \\ \frac{\partial Z}{\partial x_1} & \frac{\partial Z}{\partial x_2} & \frac{\partial Z}{\partial x_3} & \frac{\partial Z}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

De même qu'il y a maintenant un X devant les dérivées de Y, plaçons un U devant celles de Z. Cela ne change rien car c'est remplacer X, qui est arbitraire, par UX.

Dans l'égalité obtenue, supposons que Y se réduise successivement à x_1, x_2, x_3, x_4; on aura ainsi quatre égalités qu'on pourra écrire avec quatre X différents, soient P_1, P_2, P_3, P_4. La somme de ces quatre égalités donnera une égalité de même forme où les troisièmes lignes des déterminants seront

$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \qquad P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4.$$

De même, en réduisant Z à x_1, x_2, x_3, x_4 et changeant U en Q_1. Q_2, Q_3, Q_4, les quatrièmes lignes des déterminants pourront devenir

$$Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \qquad Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4.$$

Les deux dernières lignes donneront alors des mineurs

$$P_i Q_j - P_j Q_i;$$

il importe que ceux-ci soient des fonctions quelconques des x_i, ce qui n'est pas immédiatement certain. Mais en ajoutant ensemble deux ou un plus grand nombre de formules analogues à celle obtenue en dernier lieu, les P et les Q différant d'une formule à l'autre, on arrivera à remplacer les mineurs en question par d'autres indéniablement généraux auxquels on pourra donner la forme symbolique

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2\,M_{ij}.$$

Bref, une seconde étape est franchie et nous avons la formule

$$\int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} dx_1\,dx_2 = \int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_4}{\partial x_3} & -1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Celle-ci a, dès maintenant, toute la généralité mais non toute la symétrie possible.

Différentes formes ont été étudiées; ici nous n'en retiendrons qu'une.

Le déterminant de l'intégrale double contient linéairement les M_{ij}; dans chaque terme à M_{ij} prenons pour élément différentiel $dx_i\,dx_j$. Alors l'intégrale double porte tout simplement sur $M_{ij}\,dx_i\,dx_j$.

Dans l'intégrale triple nous supposons l'équation (5), de V, remplacée par

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Finalement notre seconde formule stokienne de E_4 est

$$(7)\quad \int\int_S M_{ij}\,dx_i\,dx_j = -\int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial F}{\partial x_3} & \frac{\partial F}{\partial x_4} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \frac{dx_1\,dx_2\,dx_3}{\frac{\partial F}{\partial x_4}}.$$

La variété V, à trois dimensions dans E_4, peut se déformer dans E_4 sans cesser d'avoir pour frontière la variété *fermée* S à deux dimensions.

Dans le développement de $M_{ij}\,dx_i\,dx_j$ il y a 12 termes mais égaux deux à deux parce que, si M_{ij} change de signe par permutation des indices, il en est de même pour $dx_i\,dx_j$.

On aura toujours $M_{ii} = 0$.

Pour ce qui suit on peut *admettre* les formules (4) et (7) et revenir plus tard sur les démonstrations.

4. Champ électromagnétique général. — Ce champ correspond à l'identique nullité de tous les éléments de l'intégrale triple de (7). Ceci peut arriver de deux manières absolument distinctes [17].

a. On n'impose aucune condition aux M_{ij} mais le déterminant est nul de par le choix de la variété V, c'est-à-dire de la fonction F qui satisfait alors à une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire et homogène. Les équations des caractéristiques sont

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_2} M_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{23} = -\rho \mathbf{V}_{x_1}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_3} M_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{34} = \rho \mathbf{V}_{x_2}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_4} M_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{41} = -\rho \mathbf{V}_{x_3}, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12} = \rho, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\mathbf{V}_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad \mathbf{V}_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad \mathbf{V}_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4},$$

et en désignant par ρ un facteur de proportionnalité.

Les équations (8) constituent le *premier groupe des équations* *de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles correspondent à des V_3 spéciales de E_4.

En considérant deux vecteurs

$$M\begin{pmatrix} M_{23}, & M_{31}, & M_{12} \\ M_x, & M_y, & M_z \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{M}\begin{pmatrix} M_{14}, & M_{24}, & M_{34} \\ \mathfrak{M}_x, & \mathfrak{M}_y, & \mathfrak{M}_z \end{pmatrix},$$

les équations (8) peuvent s'écrire

$$(8') \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{M} = -\rho\mathbf{V} - \frac{\partial M}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} M = \rho.$$

b. Le déterminant de l'intégrale triple de (7) s'annule encore quand tous les mineurs des termes de la première ligne sont nuls. Alors on a des M_{ij} spéciaux, que nous appellerons des $M^\star_{ij}$, pour lesquels

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_2}M^\star_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^\star_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^\star_{23} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_3}M^\star_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^\star_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^\star_{34} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_4}M^\star_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^\star_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^\star_{41} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x_1}M^\star_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^\star_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^\star_{12} = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces $M^\star_{ij}$ existent évidemment; ils sont de la forme

$$M^\star_{ij} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i},$$

les Φ_i étant dits *potentiels électromagnétiques.*

Les équations (9) constituent le *second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles expriment que $M^\star_{ij}\,dx_i\,dx_j$ est une différentielle *exacte.*

Avec deux nouveaux vecteurs $M^\star$ et $\mathfrak{M}^\star$, le système (9) peut s'écrire

$$(9') \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{M}^\star = -\frac{\partial M^\star}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} M^\star = 0.$$

M. Th. De Donder, dans un récent Ouvrage [17*], construit le champ électromagnétique avec toute la généralité des équations (8) et (9) ou (8′) et (9′).

4*. **Formule de Green.** — Voyons ce que donne la formule (7) dans l'espace ordinaire E_3. Il n'y a qu'à couper E_4 par la variété plane

$$F = x_4 - \text{const.} = 0.$$

Manifestement (7) se réduit à

$$\int\!\!\int_S M_{ij}\, dx_i\, dx_j = \int\!\!\int\!\!\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Il n'y a plus, dans le premier membre, que six termes égaux deux à deux et, avec les notations ordinaires, on peut écrire

$$\int\!\!\int_S (\alpha M_{23} + \beta M_{31} + \gamma M_{12})\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12} \right) d\tau.$$

C'est la formule de Green, essentielle quant à la génération des équations de la Mécanique du continu dans l'espace ordinaire [18].

Il est à remarquer que cette formule se conserve exactement dans E_n; pour $n = 2$, elle se réduit à la petite formule de Green-Riemann. Pour n quelconque, il y a n termes dans les parenthèses avec n coefficients α_i cosinus directeurs de la normale à la variété enfermant la portion d'espace E_n considérée.

5. **Dynamique classique du point et des milieux continus.** — Cette dynamique peut être rattachée aisément à l'Electromagnétisme, même avant de recourir à la méthode einsteinienne proprement dite.

Reprenons l'équation aux dérivées partielles en F, obtenue en égalant à zéro le déterminant de (7), et son système caractéristique que nous écrirons maintenant

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3} = \frac{dx_4}{A_4} = \frac{d\xi}{\lambda\rho}$$

d'où

$$A_i = \lambda\rho \frac{dx_i}{d\xi} = \lambda\rho\, u_i.$$

Avec ces A_i, l'intégrale triple de (7) prend la forme

$$\int\int\int \lambda\rho\left(u_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)^{-1} dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\int\int \lambda\rho\, u_i\alpha_i\, d\sigma.$$

Comme la première parenthèse contient dF, ceci est nul sur V mais, d'après la formule de Green dans E_4, est égal à

$$\int\int\int\int_W \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\rho\, u_i)\, d\tau$$

si V est complétée en une variété fermée limitant W.

La dynamique classique naît alors de l'électromagnétisme quand on imagine que, pour $\lambda = 1$, u_1, u_2, u_3, l'élément différentiel en $d\tau$ prend une forme vectorielle aux composantes

$$0,\ X_1\,d\tau,\ X_2\,d\tau,\ X_3\,d\tau.$$

On a ainsi

$$(9'')\qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_k u_i) = X_k$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0, \qquad \rho u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = X_k.$$

Pour $d\xi = dx_4$, d'où $u_4 = 1$, on a là les équations du mouvement d'un milieu continu *sans pressions ni tensions*. Avec

$$u_i = \frac{dx_i}{dx_4} = \frac{dx_i}{dt},$$

notre dernière équation devient

$$\rho\frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k$$

et l'on reconnaît les équations fondamentales de la dynamique ordinaire du point, la *force* étant rapportée à l'unité de volume.

Reprenons les équations (9''). Elles supposent un tableau de neuf éléments $\rho u_i u_k$ avec $i, k = 1, 2, 3$. On introduit *pressions* et *tensions* en ajoutant p_{ik} à ce terme général, *sans détruire la symétrie du tableau*; donc $p_{ik} = p_{ki}$.

Alors les équations générales du mouvement sont

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,$$

$$\rho(X-J_x)=\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z},$$

$$\rho(Y-J_y)=\frac{\partial T_3}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial T_1}{\partial z},$$

$$\rho(Z-J_z)=\frac{\partial T_2}{\partial x}+\frac{\partial T_1}{\partial y}+\frac{\partial N_3}{\partial z}.$$

On a remplacé les quatre x_i par x, y, z, t; etc. Un p_{ii} est N_i; un p_{ik} est T_j, si j est celui des indices 1, 2, 3 qui n'est ni i ni k. La force est finalement rapportée à l'unité de masse. On retrouve bien les équations classiques, telles qu'elles sont formées par M. P. Appell [18]. La partie dynamique du raisonnement est empruntée à M. E. Cartan [35]. Pour le rattachement à l'électromagnétisme, voir le Mémoire de 1926 signalé en [16].

6. Dérivées en D des P_i et P^i. — Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant de la formule (4); d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$(10)\qquad \left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n}\\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n\end{matrix}\right\|.$$

Soit l'égalité

$$(11)\qquad \begin{vmatrix}\dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j}\\ P_i & P_j\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j}\\ P_i & P_j\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega}\\ {}_iP_\alpha & {}_jP_\alpha\end{vmatrix}.$$

Le déterminant en ∂ est l'un des mineurs de (10); le dernier déterminant, comme on le concevra sans peine, est à développer en

$$\Gamma^\alpha_{ij}P_\alpha-\Gamma^\alpha_{ji}P_\alpha,$$

ce qui est identiquement nul si

$$(12)\qquad \Gamma^\alpha_{ij}=\Gamma^\alpha_{ji}.$$

Cette hypothèse (12) sera toujours maintenue.

Donc, dans (11), rien ne généralise *le déterminant en ∂*; mais ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (11), on a, par considération des termes homologues et *par définition, des dérivées*

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{P}_j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^{\alpha}\mathrm{P}_\alpha. \tag{13}$$

A la formule (11) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} & \dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_j} \\ \mathrm{P}^i & \mathrm{P}^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ \mathrm{P}^i & \mathrm{P}^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{i\alpha}^{\omega} & \Gamma_{j\alpha}^{\omega} \\ i\mathrm{P}^\alpha & j\mathrm{P}^\alpha \end{vmatrix} \tag{14}$$

d'où, de même et *par définition, des dérivées*

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{P}^j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial \mathrm{P}^j}{\partial x_i} + \Gamma_{i\alpha}^{j}\mathrm{P}^\alpha. \tag{15}$$

Cette fois le dernier déterminant de (14) n'est pas nul, ce qui est une des raisons qui font distinguer les P^j des P_j. Mais (15) va cependant se justifier tout aussi bien que (13).

Formons

$$\mathrm{P}^j\frac{\mathrm{D}\mathrm{P}_j}{\mathrm{D}x_i} + \mathrm{P}_j\frac{\mathrm{D}\mathrm{P}^j}{\mathrm{D}x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{P}^j\mathrm{P}_j) - \Gamma_{ij}^{\alpha}\mathrm{P}_\alpha\mathrm{P}^j + \Gamma_{i\alpha}^{j}\mathrm{P}^\alpha\mathrm{P}_j.$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité se détruisent *si α et j sont considérés à la fois comme des indices de sommation.*

Donc les dérivées en D, (13) et (15), sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles :

1° *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans son déterminant, on remplace les ∂ par des* D;

2° *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{P}^j\mathrm{P}_j) = \mathrm{P}^j\frac{\partial \mathrm{P}_j}{\partial x_i} + \mathrm{P}_j\frac{\partial \mathrm{P}^j}{\partial x_i}, \tag{16}$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ par des D.

Et, naturellement, on peut aussi, dans le premier membre de (16), remplacer les ∂ par des D; c'est une manière de représenter le second membre quand le même remplacement y a été effectué.

D'ailleurs la propriété (16) est aussi bien vraie pour $\mathrm{P}^j\mathrm{Q}_j$, comme on le vérifie immédiatement.

7. **Dérivées en D des M_{jk}.** — Reprenons la formule (7) et plus particulièrement les mineurs à extraire des trois dernières lignes de son déterminant. Posons

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}.$$

Des identifications de termes homologues donnent

$$\frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^\alpha_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^\alpha_{ij} M_{\alpha k}, \tag{17}$$

et, ω étant toujours indice de substitution, ceci fait comprendre comment on doit développer les nouveaux déterminants. Des quatre ci-dessus les deux derniers sont identiquement nuls. Donc *on n'altère pas* (7) *en substituant aux* ∂ *les* D *définis en* (17). Ici la propriété $M_{jk} + M_{kj} = 0$ n'intervient plus.

8. **Les M^j_k et leurs dérivées en D.** — Posons maintenant

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M^i_\omega & M^j_\omega & M^k_\omega \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M^i_\omega & M^j_\omega & M^k_\omega \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ M^i_\alpha & M^j_\alpha & M^k_\alpha \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\omega_{i\alpha} & \Gamma^\omega_{j\alpha} & \Gamma^\omega_{k\alpha} \\ i & j & k \\ M^\alpha_i & M^\alpha_j & M^\alpha_k \end{vmatrix}.$$

Par identification de termes homologues, on a

$$\frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - \Gamma^\alpha_{ik} M^j_\alpha + \Gamma^j_{i\alpha} M^\alpha_k. \tag{18}$$

Ici l'avant dernier déterminant employé est encore identiquement nul; le dernier ne l'est pas.

Mais, α, k, j étant indices de sommation, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(N^k_j M^j_k) = N^k_j \frac{D}{Dx_i} M^j_k + M^j_k \frac{D}{Dx_i} N^k_j. \tag{19}$$

9. **Les M^{jk} et leurs dérivées en D.** — Enfin posons

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M^{i\omega} & M^{j\omega} & M^{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\omega_{i\alpha} & \Gamma^\omega_{j\alpha} & \Gamma^\omega_{k\alpha} \\ M^{i\alpha} & M^{j\alpha} & M^{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\omega_{i\alpha} & \Gamma^\omega_{j\alpha} & \Gamma^\omega_{k\alpha} \\ i & j & k \\ M^{\alpha i} & M^{\alpha j} & M^{\alpha k} \end{vmatrix}.$$

Cette fois les deux derniers déterminants ne sont nuls ni l'un ni l'autre, mais

$$\frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^k_{i\alpha} M^{j\alpha} + \Gamma^j_{i\alpha} M^{\alpha k}, \tag{20}$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(N_{jk} M^{jk}) = N_{jk} \frac{D}{Dx_i} M^{jk} + M^{jk} \frac{D}{Dx_i} N_{jk}. \tag{21}$$

10. Lemmes fondamentaux. — Ces lemmes sont analogues à ceux énoncés à la fin du paragraphe 6.

1° *On n'altère pas la seconde formule stokienne si, dans son déterminant, on remplace les ∂ par des* D;

2° *Il existe des expressions* $N^{jk}M_{jk}$ *et* $N^k_j M^j_k$ *dont les dérivées partielles, formées suivant la règle de dérivation des produits, s'expriment en* D *comme en* ∂.

Tout ceci est évidemment généralisable en partant de formules stokiennes de E_n. On aboutirait d'abord à ce lemme général :

Il existe des expressions A^{****}_{*****} *auxquelles s'applique une dérivation partielle suivant le schème*

$$\frac{D}{Dx_i} A^{****}_{*****} = \frac{\partial}{\partial x_i} A^{****}_{*****} \left\{ \begin{array}{lll} - \Gamma^{\alpha}_{\mu i} A^{****}_{**\alpha**} & \text{pour chaque} & A^{****}_{**\mu**}, \\ + \Gamma^{\mu}_{\alpha i} A^{**\alpha*}_{*****} & \text{pour chaque} & A^{**\mu*}_{*****}. \end{array} \right.$$

Ceci peut se vérifier sur (13), (15), (17), (18), (20).

L'existence de cette dérivation partielle entraîne une règle de dérivation des produits identique à celle exposée en (16), (19), (21).

On trouvera plus de détails sur cette règle (p. 172) en [20*].

Le lecteur tant soit peu au courant du « Calcul tensoriel » pensera évidemment que nous ne faisons que retrouver ce Calcul. Mais il est retrouvé à un point de vue qui appelle d'importantes réflexions :

1° Il est *amétrique*. Certes il semble que nous ayons employé des coordonnées, des variétés à étendue mesurable, que, dans les *identités fondamentales* (1), v, s, c soient volume, aire, longueur.

Il n'est que *commode* et non *obligatoire* de parler ainsi; les identités (1) peuvent se définir de manière purement analytique, et ainsi de tout le reste. Le choix de la métrique est, en tout cas, complètement indéterminé jusqu'ici, ce que nous verrons encore mieux quand nous en choisirons une.

2° Le schème de la dérivation en D possède une symétrie découlant immédiatement des propriétés de symétrie des déterminants s'introduisant dans les formules stokiennes.

3° Les formules stokiennes proprement dites, en ∂, apparues d'abord comme formules électromagnétiques, admettent des transformations en D auxquelles correspondent les phénomènes gravitationnels.

Nous justifierons bientôt cette dernière assertion.

11. Symboles à quatre indices. Identité de Bianchi. — Les dérivations en D ne sont pas permutables. Ainsi

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP_k}{Dx_i} & \dfrac{DP_k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P_\alpha B^\alpha_{kji}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^k}{Dx_i} & \dfrac{DP^k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P^\alpha B^k_{\alpha ij},$$

$$(23)\qquad B^\alpha_{kji} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^\alpha_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^\alpha_{kj} + \Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{jk}\Gamma^\alpha_{\beta i}.$$

De même si P_k, dans la première formule (22), est remplacé par une expression à deux indices $A_{\mu\nu}$, on a

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_\tau} & \dfrac{D}{Dx_\sigma} \\ \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\tau} & \dfrac{DA_{\mu\nu}}{Dx_\sigma} \end{vmatrix} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_{\rho\nu} + B^\rho_{\nu\sigma\tau} A_{\mu\rho}.$$

Les produits à facteur B sont précisément de ceux que, suivant la règle, on dérive comme des produits ordinaires. Ainsi, en indiquant la dérivation en x_τ simplement par l'indice,

$$(25)\qquad (B^\rho_{\mu\nu\sigma} A_\rho)_\tau = (B^\rho_{\mu\nu\sigma})_\tau A_\rho + B^\rho_{\mu\nu\sigma} A_{\rho\tau}.$$

Considérons, de plus, l'identité évidente [19]

$$\begin{aligned} &(A_{\mu\nu\sigma\tau} - A_{\mu\nu\tau\sigma}) + (A_{\mu\sigma\tau\nu} - A_{\mu\sigma\nu\tau}) + (A_{\mu\tau\nu\sigma} - A_{\mu\tau\sigma\nu}) \\ &= (A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu})_\tau + (A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma})_\nu + (A_{\mu\tau\nu} - A_{\mu\nu\tau})_\sigma. \end{aligned}$$

Dans la première ligne, adoptons pour les parenthèses la forme du second membre de (24); dans la seconde, adoptons la forme du second membre de la première relation (22) et effectuons les dérivations, indiquées hors des parenthèses, conformément à (25). Il vient

$$(B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} + B^{\rho}_{\sigma\tau\nu} + B^{\rho}_{\tau\nu\sigma})\, A_{\mu\rho} = \left[(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma})_{\tau} + (B^{\rho}_{\mu\sigma\tau})_{\nu} + (B^{\rho}_{\mu\tau\nu})_{\sigma} \right] A_{\rho}.$$

Or, par vérification directe,

$$B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} + B^{\rho}_{\sigma\tau\nu} + B^{\rho}_{\tau\nu\sigma} = 0, \tag{26}$$

et, par suite,

$$(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma})_{\tau} + (B^{\rho}_{\mu\sigma\tau})_{\nu} + (B^{\rho}_{\mu\tau\nu})_{\sigma} = 0. \tag{27}$$

On a d'ailleurs, toujours par vérification immédiate,

$$B^{\rho}_{\nu\sigma\tau} = - B^{\rho}_{\nu\tau\sigma}, \tag{28}$$

et ceci permet de montrer que la forme stokienne est encore conservée en (26) et (27). Ces formules peuvent s'écrire

$$\begin{vmatrix} B^{\rho}_{\nu\omega\omega} & B^{\rho}_{\sigma\omega\omega} & B^{\rho}_{\tau\omega\omega} \\ \nu & \sigma & \tau \\ \nu & \sigma & \tau \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_{\nu}} & \dfrac{D}{Dx_{\sigma}} & \dfrac{D}{Dx_{\tau}} \\ B^{\rho}_{\mu\nu\omega} & B^{\rho}_{\mu\sigma\omega} & B^{\rho}_{\mu\tau\omega} \\ \nu & \sigma & \tau \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

La seconde est la formule essentielle de la Mécanique einsteinienne; son premier membre est une divergence généralisée. La formule a exactement l'aspect et la symétrie « électromagnétique » de (7) et (28) équivaut à $M_{ij} = - M_{ji}$. De plus les B sont les composantes de la *courbure* riemannienne dont nous ne pouvons faire la théorie ici. La formule est donc le trait d'union entre une géométrie extrêmement générale, l'électromagnétisme et la mécanique.

A noter aussi que la formule (27), ou (29_2), constitue une forme de la célèbre *identité de Bianchi* [21] reprise par Levi-Civita [20*] et De Donder [5] pour qui elle n'est qu'un cas très particulier des identités fondamentales de la Gravifique.

12. Métrique. — Reconstruisons ici rapidement la métrique riemannienne. Elle correspond à

$$\frac{Dg_{jk}}{Dx_i} = 0, \qquad \frac{Dg^{j}_{k}}{Dx_i} = 0, \qquad \frac{Dg^{jk}}{Dx_i} = 0. \tag{30}$$

Les g_{jk} ne changent pas par permutation des indices; ils forment un déterminant g. Le mineur algébrique de g_{jk}, mineur divisé par g, est g^{jk}. On a

(31) $$g^i_j = g^{\alpha i} g_{\alpha j} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j, \end{cases}$$
$$g_{jk} g^{jk} = n,$$

si n est le nombre des variables x_i. Les formules (19) et (21) montrent que les formules (30) rentrent l'une dans l'autre; la première (30),

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - g_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha k} \Gamma^\alpha_{ij} = 0,$$

s'écrit, par définition,

(32) $$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} = 0,$$

d'où

(33) $$2 \begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}$$

et

(34) $$\Gamma^\alpha_{ik} = \begin{Bmatrix} ik \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ik \\ \alpha \end{bmatrix} = g_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} ik \\ \beta \end{Bmatrix},$$

(35) $$\begin{Bmatrix} ik \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ki \\ \alpha \end{Bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} ik \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ki \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Remarquons encore que

$$\frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k},$$

d'où

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x_k} = g^{ij} \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} + g^{ji} \begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = 2 g^{ij} \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} ik \\ i \end{Bmatrix}$$

ou enfin

(35*) $$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_k} = \begin{Bmatrix} ik \\ i \end{Bmatrix}.$$

La *forme quadratique fondamentale* est

(36) $$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

C'est d'elle que procèdent la géométrie métrique et la gravitation.

13. Extension du symbolisme. — Le symbolisme des g à deux indices s'étend immédiatement. Ainsi

$$(37) \qquad B_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\tau\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}, \qquad B^{\tau}_{\mu\nu\sigma} = g^{\tau\alpha} B_{\mu\nu\sigma\alpha}.$$

Pour la première expression. en utilisant (23), on a facilement

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{bmatrix}\mu\sigma\\ \tau\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial x_\nu} + \begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\nu\\ \tau\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\mu\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\sigma\\ \tau\end{bmatrix}.$$

Effectuons les dérivations dans les deux premiers termes; dans les deux suivants, transformons par (32) les dérivées de $g_{\tau\alpha}$; il vient

$$B_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\tau}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\, \partial x_\tau} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau\, \partial x_\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\tau}}{\partial x_\mu\, \partial x_\sigma}\right) + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{bmatrix} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}\nu\tau\\ \alpha\end{bmatrix}.$$

De là

$$(38) \quad B_{\mu\nu\sigma\tau} = -B_{\mu\sigma\nu\tau}, \qquad B_{\tau\nu\sigma\mu} = -B_{\mu\nu\sigma\tau}, \qquad B_{\mu\nu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau\mu\nu}, \qquad B_{\nu\mu\tau\sigma} = B_{\mu\nu\sigma\tau}.$$

Si l'on fait intervenir l'opérateur (31), il faut adjoindre à (37)

$$(39) \qquad G_{\mu\nu} = g^{\alpha}_{\sigma} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = B^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}.$$

A remarquer que g^i_j est l'opérateur de *contraction* (*Verjüngung*); mis en facteur devant une expression dépendant des indices i et j, celle-ci n'existe plus que pour $i = j$.

Nous aurons encore à poser

$$(40) \qquad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}.$$

14. Courbure. Cas des surfaces ordinaires. — Si nous ne pouvons faire la théorie de la courbure riemannienne, nous pouvons, du moins, indiquer sommairement comment les B à quatre indices se rapportent à la courbure d'une surface ordinaire E_2 étudiée dans E_3. Posons

$$(41) \qquad K = \frac{B_{1212}}{g} = \frac{B^2_{121}}{g_{11}}.$$

L'égalité est vérifiée immédiatement avec

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2, \qquad g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix},$$

$$B^2_{121} = g^{2k} B_{121k} = g^{22} B_{1212}, \qquad B_{1211} = 0, \qquad g g^{22} = g_{11}.$$

On a de même

$$K = \frac{B^2_{121}}{g_{11}} = \frac{B^1_{112}}{g_{12}} = \frac{B^2_{221}}{g_{21}} = \frac{B^1_{212}}{g_{22}},$$

d'où, d'après (40),

$$(42) \qquad -K = \frac{G_{11}}{g_{11}} = \frac{G_{12}}{g_{12}} = \frac{G_{21}}{g_{21}} = \frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G}{2}.$$

Si l'on calcule K par (41) on voit que ce n'est autre chose que la courbure totale de E_2 et G exprime cette même courbure au facteur — 2 près. Les choses se différencient bien davantage pour les E_n; K est alors une courbure *dirigée* tandis que G reste courbure *scalaire*. Pour plus de détails voir la Note placée à la fin du fascicule.

15. **Équations gravitationnelles.** — Reprenons (27) et contractons en faisant $\tau = \rho$. Il vient

$$(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma})_{\rho} + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Multiplions par $g^{\mu\nu}$; on a

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(B^{\rho}_{\mu\nu\sigma})_{\rho} &= (g^{\mu\nu} B^{\rho}_{\mu\nu\sigma})_{\rho} = (g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau})_{\rho} = (g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu})_{\rho} \\ &= (g^{\rho\tau} B^{\nu}_{\tau\sigma\nu})_{\rho} = (g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma})_{\rho} = G^{\rho}_{\sigma\rho}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma})_{\nu} = G^{\nu}_{\sigma\nu}, \\ g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_{\sigma} = G_{\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}}. \end{aligned}$$

Donc

$$(43) \qquad 2 G^{\nu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial G}{\partial x_{\sigma}}.$$

Nous avons ainsi les *identités mécaniques fondamentales;* elles proviennent de la nullité d'une divergence généralisée. Ces identités peuvent aussi bien s'écrire

$$\left(G^{\nu}_{\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\sigma} G\right)_{\nu} = 0$$

ou bien, k étant une constante,

$$(44) \qquad G^{\nu}_{\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\sigma} G = k T^{\nu}_{\sigma}, \qquad T^{\nu}_{\sigma\nu} = 0$$

Telles sont les *équations générales* d'Einstein.

Ces équations (44) se rapportent aux milieux continus. Pour les systèmes ponctuels, on prend simplement

$$G_{\mu\nu} = 0, \tag{45}$$

et ceci est notamment la *loi de gravitation d'Einstein*. Elle exprime un mode de courbure de l'espace-temps, car pour qu'il n'y ait point de courbure du tout il faudrait que tous les B à quatre indices soient nuls.

Les points en mouvement obéissent alors à la courbure de l'espace-temps.

La loi (45) peut se mettre sous différentes formes remarquables. A signaler celle-ci, déduite de la seconde équation (22) : *On a identiquement, quel que soit le vecteur* P,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^i}{Dx_i} & \dfrac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^j}{Dx_i} & \dfrac{DP^j}{Dx_j} \end{vmatrix} = 0,$$

Sous cette physionomie, la loi est parfaitement symétrique et l'on voit combien elle est proche des formules stokiennes fondamentales qui ont également servi de base à l'électromagnétisme.

De la définition (39) et de la dernière équation (38), on conclut

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}.$$

Ainsi la loi $G_{\mu\nu} = 0$ contient autant d'équations que de $g_{\mu\nu}$ à déterminer, remarque fondamentale avec laquelle on pourrait aborder immédiatement l'étude de certains ds^2.

16. Déplacements parallèles. Géodésiques. — Il s'agit du déplacement parallèle de T. Levi-Civita; il suppose la métrique définie au paragraphe 12 ou permet de retrouver celle-ci [20]. On a ce déplacement en supposant la relation

$$d(P^j P_j) = P^j \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i,$$

vérifiée par

$$P^j P_j = 1, \qquad \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i = 0, \qquad \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i = 0, \tag{46}$$

les deux dernières relations rentrant l'une dans l'autre. On scinde la première en

$$(47) \qquad P_j = g_{j\alpha} P^\alpha, \qquad P^j = g^{\alpha j} P_\alpha.$$

Développant les dérivées en D de (46) et différentiant (47) le fait que les deux dernières équations (46) doivent se confondre pour tout déplacement du vecteur (P) sur une ligne (x) donne la condition, d'accord avec (30),

$$\frac{D g_{\beta j}}{D x_\lambda} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{D g^{\beta j}}{D x_\lambda} = 0.$$

Reprenons

$$\frac{D P^j}{D x_i} dx_i = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad dP^j + \Gamma^j_{\lambda\alpha} P^\alpha \, dx_\lambda = 0.$$

Si, pour P^α, on prend précisément un dx_α on a l'équation

$$(48) \qquad d^2 x_j + \Gamma^j_{\lambda\alpha} \, dx_\alpha \, dx_\lambda = 0.$$

C'est celle des *géodésiques* de l'espace considéré. Elle contient, comme cas très particulier, (23) du Chapitre I.

La notion de parallélisme généralisé peut servir de base à toute la géométrie différentielle. Voir à ce sujet [21] et le Mémoire de 1924 signalé en [16].

17. **Relativité restreinte.** — Les équations électromagnétiques (8′) et (9′) sont ici réduites en posant

$$\mathrm{M} = \mathbf{d}, \qquad \mathfrak{M} = -c\mathbf{h}, \qquad \mathrm{M}^* = \mathbf{h}, \qquad \mathfrak{M}^* = c\mathbf{d}.$$

Ces équations (8′) et (9′) deviennent alors

$$(49) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{s} + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{d} = \rho, & \mathbf{s} = \dfrac{\rho}{c} \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{d} = -\dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{h} = 0. & \end{array} \right.$$

Telles sont les équations de Maxwell-Lorentz [22].

Des deux dernières on conclut $\mathbf{h} = -\operatorname{rot} \mathbf{f}$ et

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{d} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = 0, \qquad \mathbf{d} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla \varphi,$$

si ∇ désigne l'opération $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ qui s'applique à une quantité $\varphi(x, y, z, t)$ scalaire.

Portant dans la première équation (49), on a

$$-\operatorname{rot}^2\mathbf{f} = -\nabla^2\mathbf{f} - \nabla \operatorname{div}\mathbf{f} = \mathbf{s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Avec la *relation supplémentaire de Maxwell*

(50) $$\operatorname{div} \quad + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

il reste *l'équation vectorielle*

(51) $$-\nabla^2\mathbf{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{s}.$$

Enfin, la seconde équation (49) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

(52) $$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho.$$

On voit que l'étude des équations (49) est ramenée à celle de (50), (51), (52).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur $\mathbf{v}$, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres, que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Les équations sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

tous les autres $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété : celle de ne changer en rien quand t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (51) et (52) rentrent dans la forme unique

$$(53) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Nous n'aurons plus alors, dans la théorie, que des fonctions U satisfaisant à cette équation.

Écrivons-la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = 0.$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l'^2},$$

si

$$(54) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + l\sin\theta, \\ l' = -x\sin\theta + l\cos\theta. \end{cases}$$

En posant

$$\operatorname{tang}\theta = i\frac{v}{c}, \qquad l = ict, \qquad l' = ict',$$

on conclut définitivement que l'équation (53) et, par suite, toutes ses solutions U sont conservées par la transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

C'est la *transformation de Lorentz;* elle équivaut, de par (54), à une *rotation imaginaire* et, comme toute rotation, engendre un *groupe*. On aurait pu l'étudier directement sur les équations de Maxwell-Lorentz (pour $\rho = 0$) sans passer par l'équation (53), mais comme cette dernière est l'équation fondamentale de la théorie ondulatoire, il est hautement préférable de ne pas se priver de montrer que la théorie ondulatoire de la lumière est aussi un cas particulier des généralités ici invoquées.

Il n'entre point dans le plan de ce fascicule de discuter longuement les conséquences de la transformation de Lorentz; on ne l'a fait que trop souvent et en embrouillant les choses les plus simples.

Ainsi, pour la *contraction de Lorentz*, il suffit de remarquer que si l'éloignement de deux observateurs varie avec une certaine vitesse (ici v), ils se voient *réciproquement* diminués en dimension, aussi bien du fait de la vitesse que du fait de l'éloignement. Pour l'éloignement tout le monde admet cela; en quoi est-ce plus étrange pour la vitesse? Rien de plus suggestif que cet exact rapprochement entre la perspective ordinaire et la cinématique lorentzienne.

Une étude remarquable des équations de Maxwell-Lorentz, à partir des idées maxwelliennes, a été faite par Henri Poincaré [**23**]. Il en ressort qu'en 1899, la transformation de Lorentz était déjà classique; C. Somigliana [**24**] la fait remonter à W. Voigt qui l'aurait aperçue, en 1887, dans le domaine de l'élasticité. En considérant que cette transformation n'est, en somme, qu'une simple rotation d'axes dans un plan, on pourrait, sans doute, la faire remonter encore beaucoup plus loin. On pourra aussi se reporter à une intéressante discussion de C. Burali-Forti et T. Boggio [**25**].

Le lecteur qui voudra poursuivre les théories amorcées en ce Chapitre, sous une forme particulièrement réduite et aussi élémentaire, pourra se reporter aux Conférences de l'Université de Princeton récemment publiées par A. Einstein [**26**].

Ajoutons encore qu'employer *seulement* la transformation de Lorentz pour représenter des phénomènes dûs au mouvement de la Terre est une idée qui a peu de chance de subsister *ainsi* dans la Science.

Que penserait-on d'un personnage qui déclarerait que, rien qu'avec une rotation d'axes rectangulaires, il se fait fort de résoudre des problèmes mécaniques et physiques réputés très compliqués. Cette critique est de M. P. Painlevé [**26***]. Dans le fascicule VIII du « Mémorial », M. De Donder expose la Relativité *restreinte* avec des méthodes de Relativité *générale*.

CHAPITRE III.

FORMULES ANTISTOKIENNES. ÉQUATIONS CANONIQUES.

1. Forme stokienne et forme antistokienne. — Les formules stokiennes rencontrées dans les précédents Mémoires nous ont notamment familiarisés avec des matrices de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3}\cdots, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3}\cdots, \end{cases}$$

auxquelles correspondent des identités telles que

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Dans un ordre d'idées analogue, mais avec une symétrie de variables ou d'indices pour ainsi dire inverse, nous allons considérer maintenant des matrices du type

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j}\cdots, \\ \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j}\cdots, \end{cases}$$

auxquelles correspondra l'identité facile à vérifier

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial A}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial B}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial B}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial C}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial y_i} - \dfrac{\partial C}{\partial y_i}\dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit, du premier coup d'œil, quelle est la symétrie qui oppose (1) et (3). Dans une même ligne de (1) on rencontre toujours la même fonction, dérivée partiellement par rapport à des variables d'indices différents; dans une même ligne de (3), les fonctions à dériver diffèrent, au contraire, d'un terme à l'autre et la variable de dérivation est toujours la même.

Évidemment les formules (3) et (4) supposent deux séries de variables

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots,\quad x_n,$$
$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad \ldots,\quad y_n.$$

Nous dirons, comme précédemment, que les formules (1) et (2) sont du type *stokien* et que, de par l'opposition qui vient d'être indiquée, (3) et (4) sont du type *antistokien*. Ce néologisme n'a pas la prétention de correspondre à une véritable originalité; la formule (4), comme nous allons le voir, pourrait aussi bien être dite du type de Poisson, mais la terminologie adoptée aura, au moins, l'avantage de faire ressortir commodément, en ne recourant qu'à deux mots, l'idée essentielle du présent Chapitre.

2. Équations canoniques. — Un des cas les plus simples, en lesquels on ait à considérer la matrice (1), est celui où tous les mineurs du second ordre qu'on peut en tirer sont nuls. Alors

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_i} & \dfrac{\partial v}{\partial x_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x_i} & u\dfrac{\partial v}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0$$

exprime que

$$u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx_i = u\,dv$$

est une différentielle exacte et que u est une fonction de v.

Ce petit résultat *stokien* étant rappelé, quel est le résultat *antistokien* correspondant?

En d'autres termes, qu'obtient-on si l'on annule l'un quelconque des mineurs issus de (3)?

Soit

$$\frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j} - \frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j} = 0, \tag{5}$$

avec, bien entendu, j indice de sommation. Pour satisfaire à (5) on peut se donner arbitrairement l'une des fonctions B ou C, soit C; alors B satisfait à une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration entraîne la considération préliminaire du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial C}{\partial y_j}, \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{6}$$

Ce sont les équations *canoniques* de Jacobi et d'Hamilton.

Rappelons que ces équations sont intégrées par $2n$ relations entre les x, les y, la variable t et $2n$ constantes α_k. En résolvant ces $2n$

relations,

par rapport aux x, y, on a $2n$ solutions;

par rapport aux α, on a $2n$ intégrales.

Une intégrale, en général, contient les x, les y et t. Les intégrales qui ne contiennent pas t ne peuvent être qu'au nombre de $2n - 1$ au plus.

Les équations ordinaires de la dynamique du point (établies ici Chapitre II, § 5) sont susceptibles d'être ramenées immédiatement à la forme canonique (6). Au sujet de cette assertion on peut se reporter à l'exposé très simple de H. Poincaré [29].

3. **Parenthèses et Théorème de Poisson.** — Posons conformément à l'usage,

$$(B, C) = \frac{\partial B}{\partial x_j}\frac{\partial C}{\partial y_j} - \frac{\partial B}{\partial y_j}\frac{\partial C}{\partial x_j}. \tag{7}$$

Alors la condition pour que B soit une intégrale des équations (6) est

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (B, C) = 0.$$

En particulier C est une intégrale de ces équations quand cette fonction C ne contient pas explicitement t. Avec la notation (7) la formule (4) peut s'écrire

$$(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0. \tag{8}$$

Si A et B sont des intégrales, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (A, C) = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} + (B, C) = 0,$$

et, d'après (8),

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}, A\right) + \left(B, \frac{\partial A}{\partial t}\right) + (C, (A, B)) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial t}(B, A) + \big((B, A), C\big) = 0.$$

Donc (B, A), ou (A, B), est aussi une intégrale. C'est le théorème de Poisson qui est, par excellence, le théorème *antistokien*. Démonstrations dans les Ouvrages classiques, notamment ceux de P. Appell [27] et E. Goursat [28].

4. **Crochets de Lagrange.** — Reprenons les équations (6) et, en exprimant tout avec les variables α_k et t, formons

$$\frac{\partial C}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial C}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial C}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} = \frac{dx_j}{dt}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} - \frac{dy_j}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}.$$

Cela peut encore s'écrire

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\left(x_j \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(x_j \frac{dy_j}{dt}\right) = \frac{\partial C}{\partial \alpha_k}.$$

C'est là, d'après Henri Poincaré, une seconde forme des équations canoniques (6), forme complètement équivalente à la première. On en conclut

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \alpha_k \, \partial \alpha_h} - \frac{\partial^2 C}{\partial \alpha_h \, \partial \alpha_k} = \frac{d}{dt}[\alpha_h, \alpha_k] = 0,$$

en posant

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_h}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}\frac{\partial y_j}{\partial \alpha_h}.$$

Ce sont là les crochets de Lagrange; ils sont de nature *stokienne* car on peut les extraire de la matrice

$$(10) \qquad \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} \cdots, \\[2ex] \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_l} \cdots, \end{matrix}\right.$$

qui donne lieu à des identités

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha_l} \\[2ex] \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_l} \\[2ex] \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_h} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} & \dfrac{\partial y_j}{\partial \alpha_l} \end{vmatrix} = 0$$

écrites, plus habituellement, sous la forme

$$(11) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha_h}[\alpha_k, \alpha_l] + \frac{\partial}{\partial \alpha_k}[\alpha_l, \alpha_h] + \frac{\partial}{\partial \alpha_l}[\alpha_h, \alpha_k] = 0$$

La matrice (10) peut aussi bien s'écrire

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial\alpha_h} & \dfrac{\partial}{\partial\alpha_k} & \dfrac{\partial}{\partial\alpha_l}\cdots, \\ x_j\dfrac{\partial y_j}{\partial\alpha_h} & x_j\dfrac{\partial y_j}{\partial\alpha_k} & x_j\dfrac{\partial y_j}{\partial\alpha_l}\cdots, \end{matrix}$$

si bien que, si l'on pose

$$x_j\frac{\partial y_j}{\partial\alpha_k} = \mathrm{A}_k + \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_k}, \tag{12}$$

on a

$$[\alpha_h, \alpha_k] = \frac{\partial\mathrm{A}_k}{\partial\alpha_h} - \frac{\partial\mathrm{A}_h}{\partial\alpha_k}.$$

La nature *stokienne* des crochets de Lagrange se précise de plus en plus; les A_k sont complètement analogues aux potentiels électromagnétiques Φ_k du second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées. Le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz n'est formé que d'équations identiques à (11).

On peut résumer l'idée essentielle de ce qui précède en cette assertion : *Les solutions des équations canoniques ont des propriétés stokiennes; les intégrales des mêmes équations ont des propriétés antistokiennes.*

5. Transformations canoniques. — A la double série de variables x_i, y_i, adjoignons la double série analogue x'_i, y'_i et soit

$$x'_i dy'_i - x_i dy_i = d\mathrm{S}, \tag{13}$$

d'où

$$x'_i\frac{\partial y'_i}{\partial\alpha_k} - x_i\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_k} = \frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\alpha_k},$$

$$x'_i\frac{dy'_i}{dt} - x_i\frac{dy_i}{dt} = \frac{d\mathrm{S}}{dt}.$$

En formant

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\alpha_k} = \frac{\partial}{\partial\alpha_k}\frac{d\mathrm{S}}{dt}.$$

on a

$$\frac{d}{dt}\left(x_i\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(x_i\frac{dy_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(x'_i\frac{\partial y'_i}{\partial\alpha_k}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(x'_i\frac{dy'_i}{dt}\right) = \frac{\partial\mathrm{C}}{\partial\alpha_k}, \tag{14}$$

le dernier membre étant emprunté à (9). Cette double égalité montre qu'on a, à la fois,

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial C}{\partial y_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial C}{\partial x_i}\qquad \text{et}\qquad \frac{dx'_i}{dt}=\frac{\partial C}{\partial y'_i},\qquad \frac{dy'_i}{dt}=-\frac{\partial C}{\partial x'_i}.$$

Donc, le changement de variables envisagé, pourvu, bien entendu, qu'il satisfasse à (13), conserve les équations canoniques [29].

On peut remplacer (13) par

$$x'_i\,dy'_i+y_i\,dx_i=d(S+x_iy_i)=dU,$$

d'où

$$(15)\qquad y_i=\frac{\partial U}{\partial x_i},\qquad x'_i=\frac{\partial U}{\partial y'_i}.$$

Tel est l'aspect, d'origine jacobienne [30], des $2n$ formules qui lient les x_i, y_i, aux x'_i, y'_i, et qui conservent la forme canonique.

6. Équation de Jacobi. — Reprenons les équations (6) en spécifiant provisoirement que C ne contient pas t. On peut supposer que l'intégrale $C=C_0$ est simplement $C=0$ car, s'il n'en était pas ainsi, on se ramènerait à ce cas en remplaçant, dans (6), C par $C-C_0$. Alors la transformation, du type (15),

$$(16)\qquad \frac{\partial S}{\partial x_j}=y_j,\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}=-\beta_j,$$

change le système (6) en

$$(17)\qquad \frac{d\alpha_j}{dt}=\frac{\partial C}{\partial \beta_j},\qquad \frac{d\beta_j}{dt}=-\frac{\partial C}{\partial \alpha_j}.$$

Mais $C=0$ s'écrit alors

$$(18)\qquad C\left(x_j,\ \frac{\partial S}{\partial x_j}\right)=0,$$

et, si $S(x_j,\alpha_j)$ est une solution de cette équation, C, considéré comme fonction des α_j, est nul *identiquement*. D'ailleurs C est indépendant des β_j. Donc les seconds membres sont nuls dans (17) et les α_j et les β_j, à tirer de (16), sont intégrales du système (6).

En (18) nous avons la célèbre équation de Jacobi [29].

Si, (6) étant intégré par cette méthode de Jacobi, on veut intégrer plus généralement

$$(19)\qquad \frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial(C+R)}{\partial y_j},\qquad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial(C+R)}{\partial x_j},$$

il est clair que la transformation (16) donnera, à ce nouveau système, la forme

$$(20)\qquad \frac{d\alpha_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\beta_j},\qquad \frac{d\beta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_j}.$$

Celui-ci est encore canonique. Telle est la méthode jacobienne pour l'intégration d'un système *troublé*, *à fonction perturbatrice* R, quand le système *non troublé* (6) est d'abord intégré.

7. **Cas où C contient** t. — En ce cas, complètons le système (6) en l'écrivant

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial C'}{\partial y}, & \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\partial C'}{\partial x},\\ \dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial C'}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{\partial C'}{\partial u},\\ C'=C(x_i, y_i;\, u)+v. & \end{array}\right.$$

La troisième équation donne $u=t$ et le système admet l'intégrale C'. Quant aux changements de variables,

$$x'_i\,dy'_i-x_i\,dy_i \qquad\text{et}\qquad x'_i\,dy'_i+u\,dv-x_i\,dy_i-u\,dv,$$

sont évidemment différentielles exactes en même temps. Toutes les généralités essentielles subsistent.

L'équation de Jacobi est [29]

$$\frac{\partial S}{\partial t}+C\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i};\, t\right)=0.$$

8. **Identités de Jacobi.** — Considérons l'ensemble d'égalités

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu\,d\beta_\nu-x_\mu\,dy_\mu=dS\\ \beta_\nu\,d\alpha_\nu-y_\mu\,dx_\mu=dT \end{array}\right\}\; d(\alpha_\nu\beta_\nu-x_\mu y_\mu)=d(T+S),$$

$$\alpha_\nu\,d\beta_\nu+y_\mu\,dx_\mu=d(S+x_\mu y_\mu),$$

$$\beta_\nu\,d\alpha_\nu+x_\mu\,dy_\mu=d(T+x_\mu y_\mu).$$

Toutes ne sont évidemment que des modifications de la première. Elles donnent

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x_\mu}{\partial\beta_\nu}=-\dfrac{\partial\alpha_\nu}{\partial y_\mu}, & \dfrac{\partial y_\mu}{\partial\alpha_\nu}=-\dfrac{\partial\beta_\nu}{\partial x_\mu},\\ \dfrac{\partial y_\mu}{\partial\beta_\nu}=\dfrac{\partial\alpha_\nu}{\partial x_\mu}, & \dfrac{\partial x_\mu}{\partial\alpha_\nu}=\dfrac{\partial\beta_\nu}{\partial y_\mu}. \end{array}\right.$$

Telles sont [31] les identités de Jacobi. On en déduit immédiatement

$$(23)\quad (\alpha_i, \beta_j) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j} = g_j^i, \qquad (\alpha_i, \alpha_j) = -\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} = 0, \qquad (\beta_i, \beta_j) = \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_j} = 0.$$

9. La fonction Ω. — Voyons maintenant ce que l'on peut faire par un choix convenable de la fonction arbitraire Ω introduite dans (12). En portant (12) dans (9), on a

$$(24)\qquad \frac{dA_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left[\frac{d\Omega}{dt} - x_j \frac{dy_j}{\partial t} - C\right] = 0.$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$(25)\qquad \frac{d\Omega}{dt} = x_j \frac{dy_j}{dt} + C,$$

les A_k sont indépendants du temps. Remarquons que, Ω n'apparaissant que comme une fonction de t et des α_k qui sont des constantes, il est ici indifférent d'écrire

$$\frac{d\Omega}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t}\cdot$$

Comme on a

$$dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial \alpha_k} d\alpha_k + \frac{dy_j}{dt} dt,$$

il vient, en multipliant par x_j et tenant compte de (12) et de (25),

$$(26)\qquad x_j\, dy_j = A_j\, d\alpha_j + d\Omega - C\, dt.$$

C'est là une formule qui est de la plus haute importance dans les transformations des développements de la Mécanique céleste, notamment quand on veut s'affranchir des termes séculaires; nous le rappellerons brièvement plus loin. Remarquons tout de suite que si, dans (26), on pouvait se débarrasser du terme $C\,dt$, les *constantes* A_j et α_j pourraient devenir variables avec le temps et constituer alors des variables *canoniques* nouvelles. Ceci parce que les nouvelles variables A_j, α_j seraient liées aux anciennes x_j, y_j par une relation différentielle (26) qui aurait la forme (13).

10. Théorème de Cauchy. — Adjoignons maintenant à l'exposé de Poincaré [29] un théorème qui aidera puissamment à de nouvelles synthèses. On a

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_\nu}=g_\nu^\mu, \qquad \frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_\nu}=g_\nu^\mu.$$

Il est évident, d'autre part, que, dans les dérivées partielles que nous venons d'écrire, les x et les y peuvent être considérés comme des solutions des équations canoniques et les α comme des intégrales de ces mêmes équations. De toutes façons

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}(\alpha_i, \alpha_j)=\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\right)= \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_\mu},$$

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}(\alpha_i, \alpha_j)=\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_k}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_k}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_\mu},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_h}-\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_h}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_i}\right)(\alpha_i, \alpha_j)=\frac{\partial \alpha_j}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial \alpha_h}+\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_h},$$

ce qui est

$$[\alpha_i, \alpha_h](\alpha_i, \alpha_j)=g_j^h, \tag{27}$$

Tel est le théorème en vue. Il constitue une préface aux recherches plus profondes de Poincaré sur les relations unissant les parenthèses de Poisson, les crochets de Lagrange, les équations aux variations, les invariants intégraux, etc.

11. Variations des constantes. Méthodes diverses. — Reprenons maintenant le problème fondamental de la Mécanique céleste. *Par hypothèse, on a intégré*

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Soient toujours $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$ les intégrales. *Profiter de ce résultat pour intégrer plus généralement*

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial(F+R)}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial(F+R)}{\partial x_i}.$$

On a

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{dy_j}{dt}+\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}$$

ou bien

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial(F+R)}{\partial y_j}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial(F+R)}{\partial x_j}+\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}.$$

Mais, en vertu des équations déjà intégrées,

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_j}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j}+\frac{\partial \alpha_i}{\partial t}=0$$

et, par suite,

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_j}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_j}.$$

Or

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y_j}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_h}\frac{\partial \alpha_h}{\partial y_j},\qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_j}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_h}\frac{\partial \alpha_h}{\partial x_j}.$$

Donc

$$\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_h}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\frac{\partial \alpha_h}{\partial y_j}-\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j}\frac{\partial \alpha_h}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_h}(\alpha_i, \alpha_h) \tag{28}$$

C'est le résultat de Cauchy.

D'après le théorème du paragraphe précédent, on a

$$[\alpha_i, \alpha_j]\frac{d\alpha_i}{dt}=\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \alpha_j}. \tag{29}$$

C'est le résultat de Lagrange [29].

Enfin, comme plus haut, on peut remplacer les $2n$ constantes α par des constantes ou intégrales *canoniques* α_i, β_i et alors (28), d'après les formules (23), redonne les équations (20).

C'est le résultat de Jacobi qui se trouve ainsi démontré deux fois. Il est fondamental pour les nouvelles méthodes, en lesquelles Henri Poincaré n'emploie que des équations canoniques, mais on saisit aisément la transition avec laquelle on passe des anciennes aux nouvelles.

Tout ceci, dans l'ensemble, repose sur des propriétés stokiennes ou antistokiennes toujours propres à réunir la Physique mathématique et la Mécanique céleste.

12. Élimination des termes séculaires en Mécanique céleste. — Nous reproduisons cette théorie essentielle en suivant toujours la voie tracée par H. Poincaré [29], d'abord avec le « problème restreint », mais en la débarrassant de tout ce qui n'est pas absolument fondamental.

On peut alors en saisir l'esprit, très brièvement, et y voir encore un triomphe très direct des propriétés stokiennes des équations canoniques.

Soient

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_i}, \qquad \frac{dL_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}. \tag{30}$$

Si ces équations se rapportent à un mouvement planétaire troublé, la méthode de Lagrange y satisfait par des séries de la forme

$$\left\{\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \Sigma A \mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h) \\ \lambda_i &= n_i t + \lambda_i^0 + \Sigma A' \mu^\alpha t^m \cos(\nu t + h') \end{aligned}\right. \qquad (\nu = k_i n_i). \tag{31}$$

Les termes sous les sigmas sont, en général, *séculaires*, exception faite de ceux pour lesquels m est nul. D'après un théorème non évident mais facile à démontrer et sur la démonstration duquel nous passerons, on peut aussi bien écrire

$$\left\{\begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \Sigma A \mu^\alpha \tau^m \cos(k_i w_i + h), \\ \lambda_i &= w_i + \lambda_i^0 + \Sigma A' \mu^\alpha \tau^m \cos(k_i w_i + h'), \end{aligned}\right. \tag{32}$$

ce qui revient à (31) si $\tau = t$, $w_i = n_i t$, *mais ce qui satisfait encore aux équations* (30) si

$$\tau = t + c, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i. \tag{33}$$

Dans ces conditions, on peut considérer comme constantes d'intégration les L_i^0 (en nombre n), les λ_i^0 (en nombre n), les ε_i (en nombre n) et enfin c, soit $3n + 1$ constantes que l'on peut réduire arbitrairement à $2n$. Soit donc $\lambda_i^0 = 0$ et $c = 0$.

En partant des formules (32), on peut maintenant former

$$L_i\, d\lambda_i - d\Omega = H\, d\tau + W_i\, dw_i + C_i\, dL_i^0, \tag{34}$$

en définissant Ω comme en (25), la comparaison étant d'ailleurs aisée puisqu'on peut passer de (6) à (30) en remplaçant respectivement x, y, C par L, λ, $-$F.

Soit maintenant, dans (34),

$$\tau = t, \qquad w_i = n_i t + \varepsilon_i,$$
$$d\tau = dt, \qquad dw_i = n_i\, dt + d\varepsilon_i + t\, dn_i.$$

Il viendra

$$L_i\, d\lambda_i - d\Omega = (H + W_i n_i)\, dt + W_i\, d\varepsilon_i + C_i^0\, dL_i^0, \tag{35}$$

si

$$C_i^0 = C_i + t W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}, \tag{36}$$

les n_k ne dépendant d'ailleurs que des L_i^0. Or les ε_i et les L_i^0 étant nos $2n$ constantes d'intégration, ce sont, dans (35), les analogues des α_j de (26) et, par suite, W_i et C_i^0 sont aussi à considérer comme des constantes. De plus

$$H + W_i n_i = F$$

est encore à considérer comme une constante parce qu'on peut s'arranger de manière à construire les équations (30) avec une fonction F ne contenant pas le temps explicitement.

Cette constance des W_i et des C_i^0 se conserve dans l'extension qui permet de passer de (31) à (32).

Reprenons alors (34) avec (36) étendu en

$$C_i^{0*} = C_i + \tau W_k \frac{\partial n_k}{\partial L_i^0}.$$

Pour $\tau = 0$, $w_i = 0$, la seconde équation (32) donnera $\lambda_i = \lambda_i^0 = 0$, d'où $d\lambda_i = 0$, et (34) donnera

$$-d\Omega_0 = C_i^0\, dL_i^0.$$

Mais alors (34) donne encore, pour $\tau = 0$,

(37) $$L_i\, d\lambda_i - W_i\, dw_i = d(\Omega - \Omega_0).$$

C'est déjà là le résultat essentiel. La suite est immédiate. Les développements (32), où l'on fait $\lambda_i^0 = 0$, $\tau = 0$ peuvent être regardés comme définissant les L et les λ en fonction des W et des w et ce changement de variables est canonique en vertu de (37). Par suite

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial w} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial W} = \text{const.} = n'_i.$$

Nous pouvons donc encore satisfaire aux équations (30) en partant des développements (32) et en y faisant

$$\lambda_i^0 = 0, \qquad \tau = 0, \qquad L_i^0 = \text{const.}, \qquad w_i = n'_i t + \omega_i.$$

Cette fois, puisque $\tau = 0$, il n'y a plus, dans les nouveaux développements, que des termes périodiques par rapport au temps.

En $\tau = 0$ est le coup de baguette magique qui fait évanouir les termes séculaires.

13. Solutions périodiques. — La démonstration que nous venons de résumer, relativement simple dans le cas du problème restreint, s'étend au problème complet. Nous avons donc, en général, les coordonnées des trois corps représentées, en fonction du temps, par des sommes de termes périodiques.

Or il peut arriver, par suite de circonstances initiales convenables, que tous les termes aient même période. C'est ainsi que l'on peut parvenir, pour le problème des trois corps, à des solutions périodiques.

14. **Mécanique classique.** — Les transformations des équations canoniques étudiées dans ce Chapitre sont *amétriques*. Il sortirait, de beaucoup, des limites de cet opuscule de vouloir passer de la fonction C quelconque, des équations (6), à la fonction C particulière aux problèmes de la Dynamique classique. Remarquons seulement que, dans ce passage, l'essentiel est dans l'introduction de la *force vive* qui, pour le déplacement de tout point d'un système, suppose un certain ds^2. Et nous voici en même posture qu'au paragraphe 12 du Chapitre précédent. La Mécanique einsteinienne et la Mécanique classique peuvent être toutes deux des constructions d'abord amétriques en lesquelles les phénomènes s'inscrivent sous une forme métrique.

Conclusion. — *La forme amétrique de la Mécanique classique dépend de transformations pour lesquelles $x_i\,dy_i$ est invariant, à une différentielle exacte additive près.*

La forme amétrique de la Mécanique einsteinienne dépend de transformations d'intégrales portant sur des expressions $x\,dy$, $x\,dy\,dz$ [*cf.* (1), Chap. II].

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES GROUPES.

Les Chapitres précédents ont montré comment on peut passer des principes de l'Analyse ou des considérations analytiques les plus élémentaires aux théories fondamentales de la Physique mathématique ou de la Mécanique céleste. Tout ceci ne se crée pas *après* la géométrie, admise d'abord comme une conception primordiale, mais *avec* la géométrie qui est d'abord *amétrique* puis *métrique*, quand il convient d'introduire les ds^2.

Si cette manière de voir est admissible, les généralités géométriques relatives à des espaces quelconques ont déjà dû trouver leur origine en la seule Analyse. C'est précisément ce qui est arrivé avec de nombreux auteurs parmi lesquels nous citerons plus particulièrement Riemann [32], Lie [33], Poincaré [34], Bianchi [21, 36], Cartan [35].

Nous indiquerons ici, très brièvement, la genèse de la Théorie des Groupes de Sophus Lie, d'après Luigi Bianchi, en indiquant les analogies avec les Théories einsteiniennes qui apparaissent immédiatement.

1. Soient les formules de transformation

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r). \tag{1}$$

Leur itération donne

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; b_1, b_2, \ldots, b_r), \tag{2}$$

ou bien, *si ces formules donnent naissance à un groupe*,

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; c_1, c_2, \ldots, c_r). \tag{3}$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions F des x' et des a restant constantes, c'est-à-dire donnant

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0,$$

en vertu d'équations différentielles à former.

Soient $\alpha_{jk}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ ou, plus brièvement, $\alpha_{jk}(a)$, des fonctions, en nombre r^2, formant un déterminant α. Ces fonctions sont comparables aux g_{jk} einsteiniens, α étant comparable à g.

Formons

$$\alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k} + \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0,$$

ce que l'on conviendra d'écrire

$$Y_j(F) = A_j(F) + X'_j(F) = 0, \tag{4}$$

en posant

$$(5)\qquad A_j(F) = \alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k}, \qquad X'_j(F) = \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i},$$

$$\xi_{ji}(x') = \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}.$$

Cette dernière équation donne enfin

$$(6)\qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}\xi_{ji}(x').$$

Cette formule représente le *premier système fondamental* de Lie; il s'intègre avec n constantes arbitraires $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En (5) apparaissent déjà deux systèmes de *transformations infinitésimales*.

2. Les équations (4), étant vérifiables, forment un *système complet*. C'est dire que

$$(Y_j, Y_k) = Y_j Y_k - Y_k Y_j = c_{jks} Y_s.$$

Les A ne dépendant que des a et les X' que des x', nos dernières équations se scindent en

$$(7)\qquad (A_j, A_k) = c_{jks}A_s, \qquad (X'_j, X'_k) = c_{jks}X'_s,$$

les c_{jks} ne pouvant être que de simples constantes numériques dites *constantes de structure*.

3. Aux $\alpha_{ik}(a)$ adjoignons des $\alpha_{ik}(b)$ et des $\alpha_{ik}(c)$. Le système

$$\alpha_{ik}(b)\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha_{i\lambda}(c)\frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

est encore *complet*, de par la première équation (7). Multipliant par $\alpha^{sk}(b)$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha^{sk}(b)\,\alpha_{s\lambda}(c)\frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0,$$

d'où

$$(8)\qquad \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{sk}(b)\,\alpha_{s\lambda}(c).$$

C'est là un système du type (6); il peut être intégré par des formules telles que

$$c_i = c_i(a_1, a_2, \ldots, a_r;\ b_1, b_2, \ldots, b_r),$$
$$a_i = a_i(a_1, a_2, \ldots, a_r;\ a_1^0, a_2^0, \ldots, a_r^0).$$

Enfin

$$\frac{\partial x''_i}{\partial b_k} = \frac{\partial x''_i}{\partial c_\lambda}\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{t\lambda}(c)\,\xi_{ti}(x'')\,\alpha^{sk}(b)\,\alpha_{s\lambda}(c) = \xi_{si}(x'')\,\alpha^{sk}(b).$$

C'est encore un système du type (6) correspondant, cette fois, à l'équation (2); celle-ci doit bien contenir les x' puisque (3), pour $b_k = a^0_\lambda$ d'où $c_k = a_k$, donne $x'' = x'$ d'après (1).

La coexistence de (1), (2), (3) est assurée par celle de (6) et (7).

4. Les trois paragraphes précédents représentent, en somme, les trois théorèmes fondamentaux de Lie. Maurer montra, perfectionnement important, que les α^{ik} peuvent être isolés en des équations différentielles spéciales.

La première équation (7) développée donne

$$\alpha_{jm}\frac{\partial\alpha_{kn}}{\partial a_m} - \alpha_{km}\frac{\partial\alpha_{jn}}{\partial a_m} = c_{jks}\,\alpha_{sn}.$$

Multipliant par α^{tn} on peut écrire ensuite

$$\alpha_{jm}\alpha_{kn}\left(\frac{\partial\alpha^{tm}}{\partial a_n} - \frac{\partial\alpha^{tn}}{\partial a_m}\right) = c_{jkt}.$$

Multipliant par $\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}$, on obtient les *équations de Maurer*

(9) $$\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} = c_{jkt}\,\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}.$$

La formule de Stokes, prise sous la forme

$$\int_C \alpha^{t\lambda}\,da_\lambda = \frac{1}{2}\int\int_S\left(\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu}\right)da_\mu\,da_\nu,$$

les transforme en

(10) $$\int_C \alpha^{t\lambda}\,da_\lambda = \frac{1}{2}c_{jkt}\int\int_S \alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu}\,da_\mu\,da_\nu.$$

Leur intégration se ramène à celle d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants (Schur), donc uniquement à des opérations algébriques; du moins entre autres cas.

Notre brève esquisse appuie la théorie générale sur la construction préliminaire du *groupe paramétrique*, groupe défini par la première équation (7). M. E. Cartan a généralisé [38] l'équation (10).

Rappelons encore *l'identité de Jacobi*, entre opérateurs X,

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{vmatrix} c_{si\tau} & c_{sj\tau} & c_{sk\tau} \\ c_{i\omega s} & c_{j\omega s} & c_{k\omega s} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0,$$

si l'on tient compte de la seconde équation (7) pour des mineurs tels que

$$X_j X_k - X_k X_j = (X_j, X_k).$$

En outre, on voit aisément, par exemple à l'aide de (9), que

$$(12)\qquad c_{jkl} + c_{kjl} = 0.$$

5. On peut déjà faire un tableau de comparaison entre les théories de Lie et d'Einstein, tableau qui pourrait être développé bien davantage. Remarquons seulement que dans les théories de :

Lie.	*Einstein.*

Deux formes différentielles, l'une linéaire l'autre bilinéaire, jouent un rôle fondamental.

Ce sont les deux formes engagées sous les intégrales dans l'équation (10).	Ce sont [*cf.* (4), (7), Chap. II] $P_i\,dx_i$, $M_{ij}\,dx_i\,dx_j$.

Les formules stokiennes interviennent à la base des deux théories.

Ces deux théories ont des opérateurs de dérivation, plus généraux que les dérivées partielles ordinaires et, en général, non permutables.

Ce sont les transformations infinitésimales (5) $A_j(F)$, $X_j(F)$.	Ce sont les dérivées en D conformes à l'équation schématique (§ 10, Chap. II).

Il y a des égalités, se construisant à l'aide de déterminants symboliques, qui, d'une théorie à l'autre, se comparent aisément.

Telle est l'identité de Jacobi avec sa conséquence (11). *Voir* aussi (12).	Telle est l'identité de Bianchi (29_2), Chapitre II. *Voir* aussi (28), Chapitre II.

Outre les citations déjà faites, signalons, dans l'ordre d'idées qui vient d'être indiqué, un remarquable Chapitre de Weyl [3]. De même Levi-Civita, dans le dernier Chapitre de son *Calcolo* [20*], indique, par l'intermédiaire des « coefficients de rotation » de Ricci, un très intéressant procédé de transformation des opérateurs D en opérateurs X.

Au point de vue de la coordination des phénomènes physiques par l'emploi de la notion de groupe, il faut attacher une grande importance aux travaux [37] de M. Eugène Cosserat et de son regretté frère François.

NOTE

SUR LA COURBURE ET LES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE ORDINAIRE.

Reprenons le paragraphe 14 du Chapitre II et notamment le calcul de K pour une surface ordinaire E_2. On a

$$g_{11}K = B^2_{121}$$

ce qui est

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{{11 \atop 2}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{{12 \atop 2}\right\} + \left\{{12 \atop 2}\right\}\left\{{11 \atop 1}\right\} + \left\{{22 \atop 2}\right\}\left\{{11 \atop 2}\right\} - \left\{{11 \atop 2}\right\}\left\{{12 \atop 1}\right\} - \left\{{12 \atop 2}\right\}^2.$$

Les quatre derniers termes peuvent être remplacés par

$$-\left\{{12 \atop 2}\right\}\left[\left\{{11 \atop 1}\right\} + \left\{{12 \atop 2}\right\}\right] + \left\{{11 \atop 2}\right\}\left[\left\{{22 \atop 2}\right\} + \left\{{12 \atop 1}\right\}\right] + 2\left[\left\{{11 \atop 1}\right\}\left\{{12 \atop 2}\right\} - \left\{{12 \atop 1}\right\}\left\{{11 \atop 2}\right\}\right]$$

ou d'après (35*), Chapitre II, par

$$-\left\{{12 \atop 2}\right\}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_1} + \left\{{11 \atop 2}\right\}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_2} + 2\left[\left\{{11 \atop 1}\right\}\left\{{12 \atop 2}\right\} - \left\{{12 \atop 1}\right\}\left\{{11 \atop 2}\right\}\right].$$

On peut alors écrire

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{{11 \atop 2}\right\}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{{12 \atop 2}\right\}\right)\right],$$

en négligeant des termes additifs qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$\frac{1}{g_{11}^2}\left[\left\{{11 \atop 2}\right\}\frac{Dg_{11}}{Dx_2} - \left\{{12 \atop 2}\right\}\frac{Dg_{11}}{Dx_1}\right]$$

et qui sont nuls parce qu'il en est ainsi de chaque dérivée en D.

Sur E_2 nous avons

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

d'où

$$(1)\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=g^{21}\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2(EG-F^2)}\left(-F\frac{\partial E}{\partial u}+2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

$$(2)\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=g^{21}\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}+g^{22}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2(EG-F^2)}\left(E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

$$K=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{2\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right].$$

Si l'on prend plus particulièrement encore

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2,$$

on a

$$(3)\quad E=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,\qquad EG-F^2=1+p^2+q^2,$$

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Passons maintenant aux géodésiques d'une E_2, à partir de l'équation générale (48) du Chapitre II.

Avec les coordonnées curvilignes x_1 et x_2 sur E_2, on a d'abord

$$d^2x_1+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}dx_1^2+2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}dx_1\,dx_2+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}dx_2^2=0,$$

$$d^2x_2+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}dx_1^2+2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}dx_1\,dx_2+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}dx_2^2=0.$$

Multiplions la première équation par dx_2, la seconde par dx_1 et retranchons; posons en outre $x_2=y$, $x_1=x$ en considérant x comme variable indépendante. Il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
$$+\left(2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right)\frac{dy}{dx}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0.$$

On calcule maintenant que

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}=\frac{pr}{1+p^2+q^2},\qquad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{ps}{1+p^2+q^2},\qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{pt}{1+p^2+q^2},$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{qr}{1+p^2+q^2},\qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{qs}{1+p^2+q^2},\qquad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}=\frac{qt}{1+p^2+q^2}.$$

La quatrième et la cinquième de ces formules se vérifient immédiatement d'après (1), (2), (3); les autres s'établissent de même. Et alors l'équation précédente devient

$$(1+p^2+q^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(p\frac{dy}{dx} - q\right)\left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0.$$

C'est bien l'équation (23) du Chapitre I.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. E. Cartan. — *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922).
   Exposé systématique relatif surtout aux formes différentielles, avec nombreuses ouvertures sur les équations générales de la Dynamique. La « dérivation extérieure » revient à la construction des formules stokiennes.
2. E. Goursat. — *Leçons sur le Problème de Pfaff* (J. Hermann, Paris, 1922).
   Aperçus généraux de Pfaff, Grassmann, etc. Méthodes prétensorielles. Aperçus non tendancieux mais d'autant plus intéressants sur l'analyse einsteinienne. Équations électromagnétiques (p. 151) équivalentes aux formules (8) du Chapitre II du présent fascicule.
3. H. Weyl. — *Raum, Zeit, Materie.* Vierte Auflage (J. Springer, Berlin, 1921) ou *Espace, Temps, Matière* (A. Blanchard, Paris, 1922).
4. A.-S. Eddington. — *Espace, Temps, Gravitation* (J. Hermann, Paris, 1921) ou *The mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, 1923).
   Cf. page 32 dans la partie mathématique du livre français et page 50 dans le livre anglais, la citation faite, dans le présent fascicule, Chapitre I, paragraphe 1.
5. Th. De Donder. — *La Gravifique de Weyl-Eddington-Einstein*, 48 pages (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924).
6. A. Buhl. — *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, Collection Scientia, 68 pages (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1920).
7. E. Goursat. — *Cours d'Analyse mathématique* (Gauthier-Villars et Cie, Paris).
   Cf. Tome II, 2e édition, 1911, p. 569-588.
8. P. Painlevé. — Adjonctions à F. Tisserand : *Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal* (Gauthier-Villars et Cie, Paris).
   Cf. 2e édition, 1896, p. 221-224.
9. G. Darboux. — Sur les congruences de courbes et les surfaces normales aux

droites d'un complexe (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 15 et 22 novembre 1909).

10. E. Turrière. — Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. II, 1910, p. 143-223).

11. E. Goursat. — *Leçons sur l'Intégration des Équations aux dérivées partielles du second ordre* (A. Hermann, Paris). Tome I, 1896, Tome II, 1898.

12. E. Goursat. — Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IV, 1902, p. 299-340).

13. E. Goursat. — Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. X, 1918, p. 65-173). *Voir* aussi « Mémorial », fascicule VI.

14. G. Darboux. — *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Troisième Partie, 1894 (Gauthier-Villars et Cie, Paris).

15. P. Appell. — *Question* 4639 (*L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XXIII, 1916). Réponses diverses dans le Recueil indiqué.

16. A. Buhl. — Sept Mémoires *Sur la formule de Stokes* et cinq Mémoires *Sur les formules fondamentales de l'Électromagnétisme et de la Gravifique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série; du Tome II, 1910, au Tome XVIII, 1926).

    Ces douze Mémoires, qu'il est inutile de mentionner plus en détail, représentent les recherches fondamentales de l'auteur sur les formules stokiennes. Les cinq derniers (1920-1926) correspondent particulièrement aux Chapitres II et III du présent fascicule.

17. Th. De Donder. — *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* et *La Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1920 et 1921).

17*. Th. De Donder. — *Théorie mathématique de l'Électricité*. Première Partie. Équations de Maxwell (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925).

    Électrodynamique des corps en repos, mais conduisant à la Gravifique qui contient le cas des corps en mouvement.

18. P. Appell. — *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III (Gauthier-Villars et Cie, Paris).

19. A.-E. Harward. — The Identical Relations in Einstein's Theory (*Philosophical Magazine*, vol. XLIV, sixth series, July-December 1922, p. 380-382).

20. T. Levi-Civita. — Nozione di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XLII, 1917, p. 173-205).

20*. T. Levi-Civita. — *Calcolo differenziale assoluto*, compilato dal Dott. Enrico Persico (Alberto Stock, Roma, 1925).

    Très bel ouvrage contenant la théorie géométrique du parallélisme généralisé, les différentielles quadratiques, les symboles de Riemann et la courbure, deux formes de l'identité de Bianchi, etc.

21. L. Bianchi. — *Lezioni di Geometria differenziale* (Nicola Zanichelli, Bologna).
Dans la troisième édition, vol. II, Parte II, 1924, voir la *Nota sul parallelismo di Levi-Civita* (p. 788-811). A noter que l'Ouvrage de L. Bianchi est, d'un bout à l'autre, une association de formules analogues à celles données dans le Chapitre II du présent fascicule.
La géométrie différentielle et l'électromagnétisme peuvent naître ensemble de formules stokiennes. *Voir* notre Mémoire de 1924 signalé, dans la présente Bibliographie, au n° 16. De très nombreux travaux ont été publiés dans le même ordre d'idées (Bouligand, Darmois, Dienes, Lagrange, Thiry, etc.) ; les étroites limites du fascicule n'ont pas permis d'en donner un aperçu. *Voir* encore vol. II, Parte II, p. 439, l'identité (F) dite précisément « de Bianchi ».

22. H.-A. Lorentz. — *The Theory of Electrons and its applications to the phenomena of Light and radiant Heat* (G.-E. Stechert, New-York; B.-G. Teubner, Leipzig, 1916).
Exposé d'une très grande clarté. Il donne très simplement, dans ses premières pages, les développements du paragraphe 17 du Chapitre II du présent fascicule.

23. H. Poincaré. — *Électricité et Optique*. Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899 (Gauthier-Villars et Cie, Paris).

24. C. Somigliana. — I fondamenti della Relatività (*Scientia*, juillet 1923).

25. C. Burali-Forti et T. Boggio. — *Espaces courbes. Critique de la Relativité* (Sten Editrice, Torino, 1924).
Transformation de Voigt-Lorentz, p. 204-212.

26. A. Einstein. — *Quatre Conférences sur la Théorie de la Relativité* faites à l'Université de Princeton, traduites par M. Solovine (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925).

26*. P. Painlevé. — *Les Axiomes de la Mécanique* (Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922).
Voir, dans cet Ouvrage (p. 96), la critique mentionnée ici à la fin du Chapitre II.

27. P. Appell. — *Traité de Mécanique rationnelle* (Gauthier-Villars et Cie, Paris).
Tome II, 2e édition, 1904. Chap. XXV : Équations canoniques. Théorèmes de Poisson et de Jacobi.

28. E. Goursat. — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (A. Hermann, Paris, 1891).
Théorèmes de Poisson et de Jacobi. Théorie des groupes de fonctions. Une seconde édition de l'ouvrage a été publiée récemment.

29. H. Poincaré. — *Leçons de Mécanique céleste* (Gauthier-Villars et Cie, Paris).
Tome I, 1905, Chap. I : Équations et transformations canoniques. Chap. IV : Méthode de Lagrange. Chap. VII : Problème restreint.

30. H. Poincaré. — *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (Gauthier-Villars et Cie, Paris).

Tome I, 1892, Chap. I : Théorèmes de Jacobi. Tome III, 1899 : Invariants intégraux.

31. F. TISSERAND. — *Traité de Mécanique céleste* (Gauthier-Villars et C^ie^, Paris). Tome I, 1889, Introduction, § 8, Identités de Jacobi.

32. B. RIEMANN. — *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl (J. Springer, Berlin, 1919).

33. S. LIE. — *Theorie der Transformationsgruppen* (B.-G. Teubner, Leipzig). Trois volumes d'une étude laborieuse ce dont Lie lui-même semble s'être aperçu en reprenant sa théorie à la fin du troisième volume (p. 544-815). Les auteurs modernes, Bianchi par exemple, ne s'inspirent guère que de ce résumé où l'on trouvera notamment les équations de Maurer (55), p. 581.

34. H. POINCARÉ. — Trois Mémoires *Sur les groupes continus.* (1° *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. XVIII, 1900; Memoirs presented in the occasion of the Jubilee of Sir GEORGE GABRIEL STOKES, Cambridge University Press, 1900. — 2° *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XV, 1901, parte prima. — 3° *Ibid.*, t. XXV, 1908, 1^er^ semestre.)

35. E. CARTAN. — 1° Sur les équations de la gravitation d'Einstein (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9^e^ série, t. I, 1922, p. 141-203). — 2° Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl (*Ibid.*, 9^e^ série, t. II, 1923, p. 167-192). — 3° Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée (*Annales de l'École Normale*, t. XL, 1923, p. 325-412; t. XLI, 1924, p. 1-25; t. XLII, 1925, p. 17-88).

Ces Mémoires unissent, de la manière la plus remarquable, la théorie des groupes et les théories einsteiniennes. Le troisième contient notamment (p. 329) cette affirmation : « Au fond les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme, s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée. »

Le même Mémoire contient (p. 339-342) la construction indiquée ici (Chap. II, § 5) pour les équations de la Dynamique des milieux continus.

En fait, ce sont les principes mêmes de l'Analyse qui sont en jeu, avec les identités intégrales déjà signalées dans l'Introduction du présent fascicule.

36. L. BIANCHI. — *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi continui finiti di Trasformazioni* (E. Spoerri, Pisa, 1918).

37. E. et F. COSSERAT. — 1° *Note sur la Théorie de l'Action euclidienne* adjointe au *Traité de Mécanique* de M. P. Appell, t. III, 2^e^ édition, 1909. — 2° *Note sur la Dynamique du Point et du Corps invariable;* 3° *Théorie des Corps déformables.* Adjonctions au *Traité de Physique* de O.-D. Chwolson également publiées à part (A. Hermann, Paris, 1906 et 1909)

38. E. CARTAN. — Sur la structure des groupes infinis (*Annales de l'École Normale*, 3^e^ série; t. XXI, 1904, p. 153-206; t. XXII, 1905, p. 219-303).

Ces théories se lient harmonieusement aux formules stokiennes mais le cadre du fascicule n'a pas permis l'exposition de cette liaison.

TABLE DES MATIÈRES

III. — Formules antistokiennes. Équations canoniques.

IV. — Théorie des Groupes

Note

77162 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins.