Mémorial des sciences mathématiques

Pierre Humbert

Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 10 (1926)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1926__10__1_0>

© Gauthier-Villars, 1926, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CIRM - BIBLIOTHEQUE
N° d'Inventaire L 21335
Date 4/3/93

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE X.

Fonctions de Lamé et Fonctions de Mathieu,

Par Pierre HUMBERT,
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier.

C.I.R.M. * Luminy * BIBLIOTÈQUE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1926

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras figurant entre parenthèses dans le courant du texte renvoient à cette Bibliographie.

FONCTIONS DE LAMÉ

ET

FONCTIONS DE MATHIEU

Par M. Pierre HUMBERT,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier.

AVANT-PROPOS.

Je n'ai cherché, dans ce fascicule, qu'à exposer brièvement les propriétés fondamentales des fonctions de Lamé et de Mathieu, renvoyant parfois le lecteur à des ouvrages plus complets, pour certaines démonstrations trop longues ou délicates. On ne trouvera pas ici de théorie générale des équations à quatre singularités, ni même des équations à coefficients périodiques ou doublement périodiques; de telles études auraient grandement dépassé mon but. J'espère néanmoins avoir résumé ou indiqué d'un mot tout ce que l'on connaît d'important sur les cas particuliers considérés. Je n'ai pas craint d'insister sur les généralisations des fonctions étudiées : c'est vers elles en effet que peuvent surtout se tourner à présent les chercheurs.

En ce qui concerne les fonctions de Mathieu, il m'eût été impossible d'en faire un exposé complet sans les nombreux renseignements que m'ont aimablement communiqués mes amis et correspondants britanniques, à qui j'adresse mes remerciements : en premier lieu, M. Whittaker, mon ancien professeur à l'Université d'Édimbourg, le père de la théorie moderne des fonctions du cylindre elliptique; puis MM. E. Lindsay Ince, de l'Université de Liverpool, et E. G. C. Poole, d'Oxford.

Le travail aride de la bibliographie m'a été rendu facile par la collaboration d'un de mes étudiants de Montpellier, M. Jean Becqué; je suis heureux de l'en remercier ici.

*
* *

Peu de points restent à l'heure actuelle obscurs, dans la théorie des équations différentielles du type fuchsien, admettant trois singularités régulières, c'est-à-dire se rattachant à la fonction P de Riemann et à ses confluences. On ne saurait en dire autant des équations du même type à quatre singularités. La forme la plus simple à laquelle on puisse réduire ces équations est la suivante, indiquée par Karl Heun (1) :

$$x(x-1)(x-a)y'' + [(\alpha+\beta+1)x^2 - (\alpha+\beta+a\gamma+a\delta+1)x + a\gamma]y' + \alpha\beta(x-q)y = 0,$$

les points singuliers étant 0, 1, a et ∞, avec les exposants respectifs $0,\ 1-\gamma;\ 0,\ 1-\delta;\ 0,\ \gamma+\delta-\alpha-\beta;\ \alpha,\ \beta$.

On désigne par $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ l'intégrale régulière au voisinage de l'origine, et correspondant à l'exposant zéro. De cette équation générale, l'équation de Lamé est un cas particulier; celle de Mathieu un cas de confluence. Ce sont les seules de ce type dont les solutions aient fait l'objet d'études poussées. L'intérêt de ces deux équations spéciales provient du fait qu'on les rencontre, comme nous le verrons, dans d'assez nombreuses applications, en particulier dans des problèmes de potentiel, point qui les rapproche des équations du type hypergéométrique.

La curieuse remarque suivante a d'ailleurs été faite par Klein (79) et Bôcher (80) que toutes les fonctions jouant un rôle en Physique mathématique satisfont à l'une ou à l'autre des équations différentielles que l'on obtient par confluence à partir de l'équation la plus générale à *cinq* singularités. Désignons en effet par $a_1, \ldots, a_5$ les cinq points singuliers, et faisons-les confluer de toutes les manières possibles : nous obtenons des équations à *quatre* singularités ou moins, dont nous indiquons ci-dessous les noms et les applications.

1° $a_4 = a_5$. Équation de *Lamé* (fonctions de Laplace pour l'*ellipsoïde*);

2° $a_3 = a_4 = a_5$. Équation de *Mathieu* (fonctions du *cylindre elliptique*);

3° $a_2 = a_3$; $a_4 = a_5$. Équation de *Riemann-Gauss* (fonctions *sphériques*, *coniques*, *toroïdales*);

4° $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Équation de *Weber* (fonctions du *cylindre parabolique*);

5° $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4 = a_5$. Équation de *Bessel* (fonctions du *cylindre circulaire*);

6° $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Équation de *Stokes* (qui se ramène au cas précédent).

Divers fascicules du *Mémorial* sont consacrés à l'étude des fonctions satisfaisant aux équations des quatre derniers types; nous considérons dans celui-ci les fonctions de Lamé et de Mathieu.

FONCTIONS DE LAMÉ.

Historique de la question. — Introduites par Gabriel Lamé (51) à propos de la distribution de la chaleur dans un ellipsoïde homogène, les fonctions auxquelles on a dès lors donné le nom de Lamé ont fait l'objet d'un grand nombre d'études. Celles de Liouville et de Heine, indépendantes, mais simultanées, sont les premières en date et comptent parmi les plus importantes. Viennent ensuite les belles recherches de Charles Hermite, continuées par divers auteurs, sur l'intégration de l'équation différentielle à laquelle satisfont ces fonctions. Plus près de nous se placent deux groupes distincts de travaux considérables : F. Klein et ses élèves généralisent les fonctions de Lamé et les envisagent d'une façon très nouvelle; Poincaré, Liapounov et leurs disciples perfectionnent la théorie en vue de son application au problème de l'équilibre d'un fluide tournant. Enfin M. Whittaker a récemment rattaché les fonctions de Lamé aux équations intégrales.

Divers ouvrages généraux font une large place au sujet qui nous occupe : celui de Todhunter (**3**), clair mais élémentaire, et celui de Heine (**4**), trop touffu, ne sont plus à jour. On trouvera l'étude complète de l'équation différentielle de Lamé dans Forsyth (**2**) ou dans Halphen (33), l'exposition des principales propriétés des fonctions dans les traités sur les figures d'équilibre d'un fluide, de Poincaré (**6**) ou de M. Appell (**5**). Nous pourrons donc, dans ce qui suit, être assez bref sur certaines démonstrations, qu'on lira ailleurs aisément.

Coordonnées elliptiques. Équation de Lamé. — Nous introduirons l'équation de Lamé en écrivant l'équation de Laplace en coordonnées elliptiques. Soit un système de quadriques homofocales représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

et soient ρ, μ, ν les trois coordonnées elliptiques d'un point de l'espace, c'est-à-dire les trois valeurs de λ définissant les trois quadriques du système, passant par ce point. Nous supposerons

$$c < \nu < b < \mu < a < \rho.$$

On fait souvent $c = 0$; les formules obtenues sont plus simples, mais moins symétriques.

Les coordonnées cartésiennes du point considéré sont alors exprimées par

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \\ y &= \frac{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}}{\sqrt{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z &= \frac{\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}. \end{aligned} \right.$$

On sait d'autre part que si l'élément linéaire

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

s'écrit, avec les variables ρ, μ, ν,

$$ds^2 = A^2 d\rho^2 + B^2 d\mu^2 + C^2 d\nu^2,$$

l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

prend, avec les mêmes variables, la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{CA}{B}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{AB}{C}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) = 0.$$

Dans notre cas, les coefficients du ds^2 étant

$$A^2 = \frac{\rho^2(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}, \qquad B^2 = \ldots, \qquad C^2 = \ldots,$$

on formera aisément l'équation de Laplace. Cherchons-en une solution qui soit un produit d'une fonction de ρ seul par une fonction de μ seul et par une fonction de ν seul, soit

$$R(\rho)\,M(\mu)\,N(\nu).$$

L'équation (2) devient

$$\frac{1}{R(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dR}{d\rho}\right)+\ldots=0,$$

ou, remplaçant A, B, C par leur valeur,

$$(\mu^2-\nu^2)\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho R}$$
$$\times\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right]+\ldots=0,$$

les deux termes non écrits étant semblables au premier, toutes permutations effectuées. Nous écrirons, symboliquement, le signe de sommation ayant une signification évidente,

$$\sum(\mu^2-\nu^2)\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho R}\tag{3}$$
$$\times\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right]=0.$$

D'autre part, H et h étant des constantes arbitraires, on a identiquement

$$\sum h(\mu^2-\nu^2)=0,$$
$$\sum H\rho^2(\mu^2-\nu^2)=0.$$

L'équation (3) pourra donc s'écrire

$$\sum(\mu^2-\nu^2)\left[\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho R}\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right)+H\rho^2+h\right]=0.$$

Elle sera vérifiée si nous annulons séparément les trois quantités entre crochets; chacune d'elles d'ailleurs ne dépend que d'une seule variable. On aura ainsi trois équations différentielles, la première entre R et ρ,

$$(4)\quad \frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho} \times \frac{d}{d\rho}\left[\frac{\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right]+(H\rho^2+h)R=0,$$

les deux autres, soit entre M et μ, soit entre N et ν, étant de forme tout à fait semblable. Une fonction harmonique en coordonnées elliptiques sera alors le produit RMN, R, M et N définis par les équations en question.

Cherchons si ce produit peut être un *polynome* en x, y, z. Il est évident, d'après la forme même des équations (1) du changement de coordonnées, que R (ρ) devra être, soit un polynome entier en ρ^2, soit un tel polynome multiplié par une ou plusieurs des trois quantités $\sqrt{\rho^2-a^2}$, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$; M et N s'en déduisant alors par simples permutations. C'est à de telles solutions de l'équation (4), si elles existent, que l'on donnera le nom de *Fonctions de Lamé*.

Or, si l'on cherche, par substitution, à quelles conditions doivent alors satisfaire les constantes arbitraires H et h, on trouve tout d'abord, par l'examen des termes du plus haut degré en ρ^2, que H doit être de la forme

$$H=-n(n+1),$$

n étant un entier. Quant à h, cette quantité doit avoir certaines valeurs spéciales sur lesquelles nous reviendrons. Admettant dès lors que ces diverses conditions soient vérifiées, l'*équation différentielle de Lamé* sera

$$(5)\quad \frac{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}{\rho^2}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2\rho^6-(a^2+b^2+c^2)\rho^4+a^2b^2c^2}{\rho^3}\frac{dR}{d\rho}-[n(n+1)\rho^2+h]R=0,$$

qu'on pourra encore écrire, en posant $\rho^2=r$,

$$(6)\quad (r-a^2)(r-b^2)(r-c^2)\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{2}[3r^2-2(a^2+b^2+c^2)r+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2]\frac{dR}{dr} - \frac{1}{4}[n(n+1)r+h]R=0.$$

Sous cette forme, on reconnaît une équation à quatre singularités. Faisons en effet (ce qui ne restreint pas la généralité) $c = 0$ et $b = 1$, une de ses solutions s'écrira, avec la notation de Heun,

$$F\left(a^2, \frac{h}{n(n+1)}; -\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; r\right).$$

Autres formes de l'équation de Lamé. — La présence d'un polynome du troisième ordre comme coefficient de la dérivée seconde suggère l'idée d'introduire les fonctions elliptiques.

1° *Notations de Jacobi.* — Faisons $c = 0$, prenons b pour unité et a (que nous désignerons par k) comme module des fonctions elliptiques; posons enfin

$$\rho = k\,\mathrm{sn}\,x.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{d^2R}{dx^2} - [n(n+1)k^2\mathrm{sn}^2x + h]R = 0. \tag{7}$$

2° *Notations de Weierstrass.* — Posons

$$e_1 = \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{3},$$

$$e_2 = \frac{2b^2 - c^2 - a^2}{3},$$

$$e_3 = \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{3};$$

considérons la fonction pu définie par

$$p'u = 2\sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},$$

et soit

$$\rho^2 = pu + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

L'équation de Lamé s'écrira alors, avec la nouvelle variable u,

$$\frac{d^2R}{du^2} - [n(n+1)pu + h]R = 0.$$

Dégénérescence des fonctions de Lamé. — Avant d'étudier les fonctions de Lamé elles-mêmes, voyons ce qu'elles deviennent dans le cas de dégénérescence où, lorsqu'on fait $b = a$, les quadriques du système orthogonal primitif sont de révolution. Supposons, pour simplifier l'écriture, $c = 0$. La coordonnée μ, qui est comprise entre a et b, devient égale à ces deux quantités. Posons alors $\rho = as$, $\nu = a \cos\theta$, et, à la limite, $\sqrt{\frac{\mu^2 - a^2}{b^2 - a^2}} = \cos\varphi$. Les coordonnées s, θ et φ ainsi introduites sont appelées *coordonnées sphéroïdales*, et l'on a pour les coordonnées cartésiennes les formules de transformation

$$x = as \cos\theta,$$
$$y = a\sqrt{s^2 - 1} \sin\theta \cos\varphi,$$
$$z = a\sqrt{s^2 - 1} \sin\theta \sin\varphi.$$

L'équation de Lamé pour R devient

$$(\rho^2 - a^2)^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho(\rho^2 - a^2) \frac{dR}{d\rho} - [n(n+1)\rho^2 + h] R = 0,$$

ou, avec la variable s,

$$(s^2 - 1) \frac{d^2 R}{ds^2} + 2s \frac{dR}{ds} - \left[n(n+1)s^2 + \frac{h}{a^2}\right] \frac{R}{s^2 - 1} = 0,$$

ou encore, avec un léger changement de notation,

$$\frac{d}{ds}\left[(1 - s^2) \frac{dR}{ds}\right] + \left[n(n+1) + \frac{m^2}{1 - s^2}\right] R = 0,$$

équation des fonctions de Legendre associées, dont une solution est

$$R = P_n^m(s).$$

L'équation entre N et ν prend une forme analogue, et l'on en aura une solution par

$$N = P_n^m(\cos\theta).$$

Mais l'équation en M se simplifie bien davantage et devient

$$\frac{d^2 M}{d\varphi^2} - m^2 M = 0,$$

admettant les solutions $M = {}^{\cos}_{\sin}\, m\varphi$.

On voit ainsi apparaître un lien de limite entre les fonctions de Lamé et les fonctions sphériques. Une nouvelle dégénérescence, consistant à faire croître a indéfiniment, conduirait aux fonctions de

Bessel. Ces problèmes ont été étudiés de façon approfondie par Häntzschel (18).

Il existe d'ailleurs une relation encore plus nette entre les fonctions de Lamé et les fonctions sphériques.

Lien avec les fonctions sphériques. — Supposons en effet ρ constant, et faisons correspondre, par la transformation homographique ordinaire, à chacun des points de l'ellipsoïde ainsi fixé les points d'une sphère de rayon 1. On aura ainsi

$$x = \xi\sqrt{\rho^2 - a^2}, \qquad y = \eta\sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad z = \zeta\sqrt{\rho^2 - c^2}$$

et, sur la sphère, en introduisant les coordonnées polaires,

$$\xi = \cos\psi, \qquad \eta = \sin\psi\cos\varpi, \qquad \zeta = \sin\psi\sin\varpi.$$

Si l'on passe maintenant des coordonnées elliptiques μ et ν aux coordonnées nouvelles ψ et ϖ, M et N deviendront des fonctions de ψ et ϖ; et, si l'on cherche à quelle équation aux dérivées partielles par rapport à ψ et ϖ satisfait le produit MN, on trouvera l'équation

$$\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\sin\psi\frac{\partial(\mathrm{MN})}{\partial\psi}\right] + \frac{\partial^2(\mathrm{MN})}{\partial\varpi^2} + n(n+1)\sin^2\psi.\mathrm{MN} = 0$$

qui est celle de la fonction sphérique Y_n. Le produit MN, exprimé en ψ et ϖ, est donc une fonction sphérique générale.

Formation des fonctions de Lamé. Leur nombre. — Comme nous l'avons vu, nous appelons *fonctions de Lamé* les solutions de l'équation (5) de l'un des types suivants (appelés *classe* de la fonction) :

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{R} = f(\rho^2),$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - a^2}\,f(\rho^2), \\ \mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,f(\rho^2), \\ \mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,f(\rho^2), \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \mathrm{R} = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}\,f(\rho^2), \\ \mathrm{R} = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - c^2)}\,f(\rho^2), \\ \mathrm{R} = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,f(\rho^2), \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{R} = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,f(\rho^2),$$

$f(\rho^2)$ désignant un polynome dont le degré en ρ^2 est $\frac{n}{2}$ pour la classe (I), $\frac{n-1}{2}$ pour la classe (II), $\frac{n}{2}-1$ pour la classe (III) ou $\frac{n-3}{2}$ pour la classe (IV). Il n'existe donc de fonctions que des classes (I) et (III) si n est pair, (II) et (IV) si n est impair.

Nous pourrons dire aussi, passant aux notations de Weierstrass, que les fonctions de Lamé sont les polynomes en pu, multipliés par 0, 1, 2 ou 3 radicaux de la forme $\sqrt{pu-e_\alpha}$, solutions de l'équation (8). Elles sont donc doublement périodiques en u.

Voyons maintenant comment l'on peut déterminer la constante h pour que les fonctions de Lamé existent. Supposons n pair, et attachons-nous aux fonctions de la première classe. Une telle fonction pourra s'écrire sous forme de polynome en ρ^2 d'ordre $\frac{n}{2}$, contenant $\frac{n}{2}+1$ coefficients. La substitution dans l'équation différentielle donnera un polynome d'ordre $\frac{n}{2}+1$, qui devra être identiquement nul. Mais nous nous sommes déjà arrangés, en assignant à la constante primitive H la valeur $-n(n+1)$, pour que le coefficient du terme de degré le plus élevé disparaisse de lui-même; il reste donc $\frac{n}{2}+1$ coefficients à annuler, d'où $\frac{n}{2}+1$ équations linéaires et homogènes, contenant linéairement la constante h : cette constante devra donc satisfaire à une équation de degré $\frac{n}{2}+1$, dite *caractéristique*, obtenue par élimination des coefficients entre les $\frac{n}{2}+1$ équations en question. Chaque valeur de h donnant naissance à une fonction de Lamé différente, il existera donc $\frac{n}{2}+1$ fonctions de première classe.

D'ailleurs, si n est pair, il existera aussi des fonctions de troisième classe; et le même raisonnement prouvera qu'alors l'équation caractéristique est de degré $\frac{n}{2}$. A chaque valeur de h correspondra alors un polynome $f(\rho^2)$, et à chaque polynome correspondront trois fonctions R : il y aura donc $\frac{3n}{2}$ fonctions de troisième classe; et par conséquent, en tout, pour n pair, $2n+1$ fonctions de Lamé.

On verra que ce nombre est le même quand n est impair; les équations caractéristiques sont alors de degrés $\frac{n+1}{2}$ pour la classe (II), d'où $\frac{3n+3}{2}$ fonctions de cette classe, et $\frac{n-1}{2}$ pour la classe (IV), d'où $\frac{n-1}{2}$ fonctions de classe (IV); en tout, $2n+1$ fonctions de Lamé.

Exemples des cas les plus simples. — Nous donnerons ici les valeurs des fonctions de Lamé pour les premières valeurs de n. On trouvera ces expressions jusqu'à $n = 10$ dans un travail de G. Guerritore (13). Pour plus de simplicité, nous nous servirons des fonctions elliptiques, désignant suivant l'usage par g_2 et g_3 les invariants de la fonction pu :

1° $n = 1$

Trois fonctions, de classe (I) :

$$\sqrt{pu - e_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

2° $n = 2$

Cinq fonctions de Lamé :

a. Deux fonctions de classe (I), de la forme

$$pu - \frac{h}{6},$$

les valeurs de h étant données par l'équation caractéristique

$$h^2 - 3g_2 = 0;$$

b. Trois fonctions de classe (III),

$$\sqrt{(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta)}.$$

3° $n = 3$

Sept fonctions de Lamé :

a. Une fonction de classe (IV), $p'u$;
b. Six fonctions de classe (II),

$$\left(pu + \frac{e_\alpha}{2} - \frac{h}{10}\right)\sqrt{pu - e_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

avec l'équation caractéristique

$$h^2 - 6he_1 + 45e_1^2 - 15g_2 = 0.$$

4° $$n = 4$$

Neuf fonctions de Lamé :

a. Trois fonctions de classe (I),

$$p''u - \frac{2}{7}h\,pu + \frac{3}{140}h^2 - \frac{2}{5}g_2,$$

équation caractéristique

$$h^3 - 52g_2h + 560\,g_3 = 0;$$

b. Six fonctions de classe (III),

$$\left(pu - \frac{e_\alpha}{2} - \frac{h}{14}\right)\sqrt{(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)},$$

équation caractéristique

$$h^2 + 10he_1 - 35e_1^2 - 7g_2 = 0.$$

Notations. — Poincaré a indiqué (55) une notation à laquelle il est nécessaire de recourir lorsqu'on veut préciser une fonction de Lamé sans aucune ambiguïté possible. Il faut introduire un système de trois indices, et écrire

$$R_{n,i}^{(k)}(\rho).$$

Les conventions sont alors les suivantes : on admet tout d'abord que, pour simplifier, on fait $c = 0$. Puis :

1° n est l'*ordre* de la fonction, c'est-à-dire son degré en ρ.

2° Si R est un polynome en ρ^2, ou un tel polynome multiplié par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, c'est-à-dire un polynome en ρ avec la simplification indiquée, on écrira $k = 1$. Si R est un polynome en ρ ou en ρ^2 multiplié par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, on fera $k = 2$; si multiplié par $\sqrt{\rho^2 - a^2}$, $k = 3$; et si par $\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}$, $k = 4$.

3° Le dernier indice, i, est choisi de telle façon que, d'après le processus de dégénérescence indiqué plus haut, la fonction $R_{n,i}$ se confonde pour $b = a$, avec la fonction sphérique P_n^i. On supprimera cet indice lorsque, de ce chef, il ne pourra y avoir ambiguïté.

Théoriquement parfait, ce mode de désignation des fonctions de Lamé est pratiquement un peu compliqué. Dans les applications, on n'a guère à considérer qu'une seule fonction de chaque ordre : on l'écrira simplement R_n.

Néanmoins, d'après une convention adoptée depuis le traité de Poincaré (6), les symboles $R_1, R_2, \ldots, R_9$ s'appliquent aux fonctions d'ordre 1, 2, 3 : le tableau ci-dessous indique les valeurs de ces fonctions et la concordance avec les symboles généraux.

Ordre	Valeur	Notation à 3 ou 2 indices	Notation simplifiée
1	$\sqrt{\rho^2 - a^2}$	$R_1^{(3)}$	R_1
	$\sqrt{\rho^2 - b^2}$	$R_1^{(2)}$	R_2
	$\sqrt{\rho^2 - c^2}$	$R_1^{(1)}$	R_3
2	$\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)}$	$R_2^{(2)}$	R_4
	$\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)}$	$R_2^{(3)}$	R_5
	$\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}$	$R_2^{(4)}$	R_6
	$\rho^2 - \alpha_1$ $\quad (\alpha_1 > \alpha_2)$	$R_{2,2}^{(2)}$	R_7
	$\rho^2 - \alpha_2$	$R_{2,0}^{(2)}$	R_8
3	$\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - a^2)}$	$R_3^{(4)}$	R_9

Il faut remarquer d'ailleurs que certains auteurs emploient des notations différentes. Heine, et en général les Allemands, préfèrent le symbole $E(\rho)$: c'est aussi celui qu'utilise Liapounov, l'affectant d'indices analogues à ceux de Poincaré.

Enfin Darwin (8), abandonnant complètement la forme ordinaire, qu'il trouve impropre au calcul, et renonçant de parti pris à la symétrie, met deux des fonctions figurant dans le produit de Lamé sous forme de polynomes (dans certains cas multipliés par un radical) dont les coefficients sont des fonctions sphériques ordinaires, la troisième fonction étant sous forme de polynome dont les coefficients sont des fonctions circulaires. La complication de cette méthode la rend difficilement assimilable.

Théorèmes sur les fonctions de Lamé. — On trouvera dans les ouvrages généraux la démonstration des points suivants, fort importants, et dont nous avons admis implicitement quelques-uns.

1° Les équations caractéristiques ont toutes leurs racines réelles et distinctes.

Cependant si les axes de l'ellipsoïde de référence étaient imaginaires, les équations caractéristiques pourraient avoir des racines doubles; deux des $2n+1$ fonctions d'ordre n se confondraient alors. Ce cas a été étudié par Fr. Cohn (17).

2° Le polynome $f(\rho^2)$ qui figure dans les diverses classes des fonctions de Lamé a toutes ses racines réelles, distinctes, et comprises entre c^2 et a^2.

Il existe d'ailleurs, parmi les polynomes f correspondant à une valeur n paire donnée, un polynome ayant o racine entre c^2 et b^2 et $\frac{n}{2}$ entre b^2 et a^2; un polynome ayant 1 racine entre c^2 et b^2, et $\frac{n}{2}-1$ entre b^2 et a^2; etc.

3° Propriétés d'intégrales définies. Si l'on désigne par l_0 la valeur de la dérivée de u prise suivant la normale extérieure à l'ellipsoïde E_0 défini par $\rho=\rho_0$ (u étant la variable elliptique correspondant à ρ), on aura la formule

$$\int\int_{E_0} l_0\, M(\mu)\, N(\nu)\, M_1(\mu)\, N_1(\nu)\, d\sigma = 0,$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface de l'ellipsoïde E_0; $M(\mu)$ et $M_1(\mu)$ étant, soit des fonctions différentes de même ordre, soit des fonctions d'ordre différent; N et N_1 les solutions correspondantes en ν.

Cette propriété peut s'écrire aussi

$$\int\int(\wp v-\wp w)\, M(v)\, N(w)\, M_1(v)\, N_1(w)\, dv\, dw = 0,$$

v et w étant les variables elliptiques correspondant à μ et ν; les limites de l'intégrale sont

$$0<\frac{v-\omega}{i}<\frac{4\omega'}{i},$$
$$0<w-\omega'<4\omega.$$

On aura également, dans les mêmes conditions,

$$\int\int(\wp v-\wp w)\,[M_n(v)\, N_n(w)]^2\, dv\, dw = 8(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)\, i\pi,$$

les constantes $\alpha, \ldots, \beta_1$ étant les premiers termes des décompositions en éléments simples suivants :

$$[R_n(\rho)]^2 = \alpha + \beta pu + \gamma p''u + \ldots,$$
$$[pu\, R_n(\rho)]^2 = \alpha_1 + \beta_1 pu + \gamma_1'' pu + \ldots.$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients du développement d'une fonction en série de produits MN. Les conditions de convergence sont les mêmes que celles des développements en séries de fonctions sphériques.

Dans un ordre d'idées analogue, Heine (4) a développé le polynome P_n de Legendre en série limitée de produits de Lamé.

Équations intégrales. — M. Whittaker (19) a établi le remarquable résultat suivant : les fonctions de Lamé, solutions de l'équation

$$y'' - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]\, y = 0,$$

sont solutions de diverses équations intégrales dont la plus simple est

$$y(x) = \lambda \int_0^{4K} (\operatorname{dn} x \operatorname{dn} z + k \operatorname{cn} x \operatorname{cn} z)^n\, y(z)\, dz.$$

Il est intéressant de remarquer que le paramètre h ne figure plus dans cette équation intégrale.

Le même auteur a prouvé (20) que les solutions de l'équation de Lamé qui sont rationnelles en $\operatorname{sn} x$ sont solutions de l'équation intégrale

$$y(x) = \lambda \int_0^{4K} P_n(k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} z)\, y(z)\, dz$$

où P_n est la fonction de Legendre d'ordre n.

SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE LAMÉ.

Fonctions de Lamé de seconde espèce. — On obtiendra comme à l'ordinaire, par la méthode d'Euler, une seconde solution de l'équation de Lamé : cette fonction connue sous le nom de *fonction de Lamé de seconde espèce*, et importante dans la théorie du potentiel, est définie par

$$S_n(\rho) = (2n+1) R_n(\rho) \int_{-\infty}^{\rho} \frac{\rho\, d\rho}{[R_n(\rho)]^2 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

ou, avec la variable u,

$$S_n(u) = (2n+1) R_n(u) \int_0^u \frac{du}{[R_n(u)]^2}.$$

Lorsque u tend vers zéro, ou ρ vers l'infini, la valeur principale de S_n est ρ^{-n-1}, alors que celle de R_n est ρ^n.

L'introduction et l'étude de cette seconde solution sont dues à Liouville (21) et à Heine (22). Divers auteurs s'en sont également occupés. F. Lindemann (26) a développé la quantité $(z_1 - z)^{-1}$, où z et z_1 sont deux quantités réelles quelconques, en série procédant suivant des produits du type $R_n(z) S_n(z_1)$; il étudie aussi d'autres développements du même genre, en séries de fonctions de Lamé de première ou de seconde espèce : les domaines de convergence de ces diverses séries sont en général limités par des courbes du quatrième ordre.

Le rôle fondamental joué, dans le problème de l'équilibre d'un fluide tournant, par des équations où figure le produit $R_n S_n$, a amené les auteurs qui se sont occupés de la question à chercher pour la fonction S une forme propre au calcul numérique. Liapounov (27) donne des expressions où figurent des fonctions symétriques des racines des fonctions R, ou plus exactement du polynome $f(\rho^2)$ qui est attaché à ces fonctions : ces formules sont encore assez compliquées. Celles qu'a indiquées Pierre Humbert (28) sont plus simples : elles permettent de réduire toute fonction S_n aux fonctions S du premier ordre. Ainsi, dans le cas où R_n est un polynome en ρ, on aura, en supposant encore $c = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{S_n(\rho)}{(2n+1) R_n(\rho)} = \frac{B_n(\rho)}{R_n(\rho)\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)}} &- \frac{a}{3}\frac{B_n(a)}{R_n(a)}\frac{S_1(\rho)}{\sqrt{\rho^2-a^2}} \\ &- \frac{b}{3}\frac{B_n(b)}{R_n(b)}\frac{S_2(\rho)}{\sqrt{\rho^2-b^2}},\end{aligned}$$

où $B_n(\rho)$ est le polynome, de degré en ρ inférieur à celui de R_n, tel que l'on ait

$$A_n(\rho) R_n(\rho) + B_n(\rho) R'_n(\rho) \equiv 1,$$

$A_n(\rho)$ étant un polynome de degré inférieur à celui de R'_n. L'application de cette formule au cas $n = 1$ permet d'écrire la relation

$$\frac{S_1}{R_1} + \frac{S_2}{R_2} + \frac{S_3}{R_3} = \frac{3}{R_9}.$$

Intégration de l'équation différentielle. — De très importants résultats ont été obtenus par Hermite sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé (29, 30, 31)

$$y'' = [n(n+1)\,\mathrm{p}u + h]\,y,$$

dans laquelle on suppose que h n'est plus déterminé par les équations caractéristiques, *mais a une valeur quelconque.*

On peut alors satisfaire à l'équation par une fonction doublement périodique de deuxième espèce. Prenons en effet y sous forme d'une telle fonction, par

$$y = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{\sigma(u+a_i)}{\sigma u . \sigma a_i} e^{-u\zeta a_i},$$

où les a sont des constantes. De très élémentaires transformations (décompositions en éléments simples, etc.) nous montreront que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{y''}{y} = {} & n(n+1)\,\mathrm{p}u + (2n-1)\sum \mathrm{p}a_i \\ & + \sum_i \sum_j \frac{\mathrm{p}'a_i - \mathrm{p}'a_j}{\mathrm{p}a_i - \mathrm{p}a_j}[\zeta(u+a_i) - \zeta(u+a_j) - \zeta a_i + \zeta a_j]. \end{aligned}$$

Si donc nous annulons séparément les coefficients des termes tels que $\zeta(u+a_i) - \zeta a_i$, nous trouverons $(n-1)$ équations distinctes entre les $2n$ quantités $\mathrm{p}a_i$, $\mathrm{p}'a_i$, ..., qui sont en plus liées par les n formules fondamentales

$$\mathrm{p}'^2 a_i = 4\,\mathrm{p}^3 a_i - g_2\,\mathrm{p}a_i - g_3.$$

En y joignant l'équation

$$(2n-1)\sum \mathrm{p}a_i = h,$$

on aura déterminé par $2n$ équations les $2n$ quantités a telles que la fonction doublement périodique de seconde espèce considérée satisfasse à l'équation de Lamé.

D'ailleurs, si cette fonction est solution, la fonction

$$\prod \frac{\sigma(a_i - u)}{\sigma u . \sigma a_i} e^{u\zeta a_i}$$

l'est aussi. En sorte que l'intégration complète de l'équation étudiée pourra s'effectuer par les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Ainsi, dans le cas $n = 1$, la solution générale de l'équation

$$y'' = (2pu + h)y$$

sera

$$y = c_1 \frac{\sigma(u-a)}{\sigma u} e^{u\zeta a} + c_2 \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a}$$

avec $pa = h$.

On trouvera, dans le traité d'Halphen (33), d'importants développements sur la recherche pratique des constantes a_i dans le cas général. De très nombreux auteurs se sont occupés de la question.

APPLICATIONS DES FONCTIONS DE LAMÉ.

Analyse harmonique. — Les fonctions de Lamé sont, nous l'avons vu, associées à l'ellipsoïde en analyse harmonique : leurs applications sont donc nombreuses; elles s'introduiront dans tous les problèmes où l'on rencontre, conjointement, l'équation de Laplace et les ellipsoïdes.

Divers auteurs anglais ont, à la suite de Darwin (47), considéré les fonctions de Lamé surtout à ce point de vue de l'analyse harmonique : on peut citer à ce propos les travaux de Niven (48), de Dixon (49), de Hargreaves (50); comme conséquence des équations intégrales indiquées plus haut, M. Whittaker (20) donne d'une fonction harmonique générale sur l'ellipsoïde l'expression

$$G_n(x, y, z) = \lambda \int_0^{2\pi} P_n\left(\frac{k'x\,\mathrm{sn}\,t + y\,\mathrm{cn}\,t + iz\,\mathrm{dn}\,t}{k'c}\right) R_n(t)\,dt.$$

Distribution de la chaleur. — Ce sont, nous l'avons dit, les recherches sur cette question qui ont été le point de départ de toute la théorie. Divers Mémoires de Lamé sont consacrés à ce probléme, en particulier à l'équilibre des températures à l'intérieur d'un ellipsoïde homogène dont la paroi extérieure est maintenue à des températures fixes, mais variables d'un point à un autre (51-54).

Figures d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation. — C'est l'application la plus importante des fonctions de Lamé, celle qui a conduit aux plus belles découvertes. On en trouvera l'exposé complet, avec une abondante bibliographie, dans l'ouvrage de M. Appell (5). Nous serons donc très bref sur ce point (55-60).

Si E_0 est un ellipsoïde correspondant à la valeur ρ_0 du paramètre ρ, soient $(R_i)_0$ et $(S_i)_0$ les valeurs connues que prennent sur cet ellipsoïde les fonctions de Lamé de première et de seconde espèce R_i et S_i. On démontre alors que le potentiel intérieur de cet ellipsoïde, supposé homogène et de volume T, est donné par la formule

$$V = -\frac{T}{2}\left[\frac{(S_1)_0}{(R_1)_0}x^2 + \frac{(S_2)_0}{(R_2)_0}y^2 + \frac{(S_3)_0}{(R_3)_0}z^2\right].$$

Si l'ellipsoïde tourne autour de l'axe des x, avec une vitesse angulaire ω, pour qu'il soit une figure d'équilibre, il faut que l'équation de sa surface soit identique à l'équation

$$V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = \text{const.}$$

On peut alors, avec Poincaré, déformer l'ellipsoïde en équilibre en lui ajoutant une couche infiniment mince, d'épaisseur tantôt positive et tantôt négative, dont le volume total est nul, et chercher si la nouvelle surface obtenue est une surface d'équilibre. Les résultats de cette discussion appliquée aux ellipsoïdes à trois axes inégaux, dits de Jacobi, sont les suivants (nous laissons de côté le cas des ellipsoïdes de révolution ou de Maclaurin qui se traite par les fonctions sphériques) :

1° Il existe des figures d'équilibre non ellipsoïdales, infiniment voisines de certains ellipsoïdes de Jacobi, dits critiques.

2° Les axes d'un ellipsoïde critique doivent satisfaire aux équations de Poincaré

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_n S_n}{2n+1},$$

où R_n est une fonction d'ordre n, qui n'est divisible ni par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ni par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, et dont tous les zéros sont inférieurs à b^2. On doit prendre $n \geqq 3$.

3° La surface d'équilibre (ou surface de Poincaré) infiniment voisine de l'ellipsoïde critique correspondant à R_n s'obtient en portant sur la normale à cet ellipsoïde, en chaque point défini par les deux coordonnées μ et ν, une longueur dont la valeur est, en première approximation,

$$\frac{\varepsilon M_n(\mu) N_n(\nu)}{\sqrt{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}}$$

où ε est une constante arbitraire, dont on néglige le carré.

On lira dans un autre fascicule du *Mémorial* les conséquences cosmogoniques que l'on a cru pouvoir tirer de la découverte de Poincaré.

Problème de Roche. — Dans un ordre d'idées voisin, les fonctions de Lamé s'introduisent dans le problème, posé et résolu par Édouard Roche, de la forme et de la stabilité d'un satellite liquide au voisinage de sa planète; en employant des méthodes partiellement graphiques, Roche a fixé la limite à laquelle peut descendre le rayon de l'orbite d'un satellite infiniment petit à 2,44 rayons équatoriaux de la planète (**61**). Darwin a repris la question de très près, par l'analyse harmonique, a vérifié l'exactitude des résultats de Roche, et a généralisé le problème en introduisant l'action des marées (**62**). Schwarzschild a apporté aussi une contribution à cette étude (**63**).

Géométrie. — Plusieurs problèmes de géométrie conduisent à l'équation de Lamé (**64** *bis*). Ainsi la recherche de surfaces, non de révolution, admettant un système de lignes de courbure planes, et pouvant être divisées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure, mène à l'équation pour le cas $n=1$. Le problème de Plateau, surfaces minima passant par un contour fermé donné, conduit au cas où n est quelconque. Enfin l'équation de Lamé, et d'autres analogues mais plus générales, ont été rencontrées par Darboux (**64**) dans la recherche de surfaces ayant une représentation sphérique donnée, et par M. Henri Villat (**65**) dans le problème de la représentation conforme d'un domaine plan doublement connexe sur une couronne circulaire.

Problèmes divers de dynamique. — On est conduit, comme l'a indiqué Hermite (**66**), à l'équation de Lamé où n est égal à 1 et h quelconque, dans les problèmes de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'existe point de forces accélératrices, et de la détermination de la figure d'équilibre d'un ressort; et à la même équation pour $n=2$ dans la théorie du pendule sphérique.

La recherche de certains mouvements tourbillonnaires des fluides conduit également au cas le plus général (65). Enfin un cas particulier de l'équation a été rencontré dans la théorie des perturbations (67).

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DES FONCTIONS DE LAMÉ.

Fonctions de Lamé dans le plan. — Le problème des figures d'équilibre d'une masse fluide en forme de cylindre elliptique indéfini, tournant autour de son axe de figure, conduit à un problème plan, qu'a traité M. Globa-Mikhaïlenko avec les méthodes de Poincaré (68). Il a pour cela défini des fonctions de Lamé dans le plan, solutions de l'équation de Laplace à deux variables en coordonnées elliptiques planes. Ces fonctions se réduisent, par un changement de variables approprié, à des fonctions circulaires ou hyperboliques. Les résultats obtenus sur les figures cylindriques à base infiniment voisine d'une ellipse avaient déjà été signalés par M. Jeans, qui avait suivi une voie différente.

Fonctions du cône elliptique. — Étudiées par E. Hobson (70), elles jouent le rôle de fonctions harmoniques pour un cône elliptique. Si l'on introduit les trois coordonnées correspondantes r, μ et ν, l'équation de Laplace admettra la solution

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\,{\sin \atop \cos}(p\log r)\,A_p(\mu)\,B_p(\nu)$$

où A satisfait à l'équation

$$(\mu^2-b^2)(\mu^2-a^2)\frac{d^2A}{d\mu^2}+\mu(2\mu^2-b^2-c^2)\frac{dA}{d\mu} + \left[(b^2+a^2)\alpha+\left(p^2+\frac{1}{4}\right)\mu^2\right]A=0,$$

qui n'est autre que l'équation de Lamé, où l'indice n serait remplacé par $-\frac{1}{2}+ip$. Les fonctions du cône elliptique sont donc des fonctions de Lamé à indices imaginaires, tout de même que les fonctions coniques ordinaires sont des fonctions de Legendre à indices imaginaires.

Lorsque les axes a et b deviennent égaux et le cône de révolution, A se réduit à un sinus ou à un cosinus, et B à la fonction conique de Mehler.

Fonctions de Lamé-Wangerin. — Une nouvelle généralisation de l'équation de Lamé s'obtient lorsqu'on cherche les fonctions de Laplace pour des cyclides de révolution. On est alors amené à une équation différentielle identique à celle de Lamé, mais où l'entier n est remplacé par un paramètre égal à la moitié d'un entier impair. C'est donc exactement le fait qui se produit pour l'équation de Legendre, quand on passe des fonctions sphériques aux fonctions toroïdales. Ce résultat ayant été signalé par A. Wangerin (71), certains auteurs ont proposé de donner à l'équation différentielle considérée et aux fonctions qui s'y rattachent le nom de Lamé-Wangerin, réservant pour le cas ordinaire le nom de Lamé-Hermite.

Fonctions de Lamé généralisées. — F. Klein (75-79) et ses disciples ont obtenu d'importants théorèmes sur des équations analogues à l'équation de Lamé, mais admettant m singularités finies. Si l'on désigne par $e_1, \ldots, e_m$ les m points singuliers, et si l'on pose

$$f(x) = (x - e_1)\ldots(x - e_m),$$

le type le plus général de ces équations sera

$$4f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2f'(x)\frac{dy}{dx} + \left[\frac{m-4}{4(m-1)}f''(x) + ax^{m-4} + bx^{m-5} + \ldots + l\right]y = 0;$$

ou, en introduisant la variable hyperelliptique,

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{f(x)}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[-\frac{m-4}{4(m-1)}f''(x) + ax^{m-4} + bx^{m-5} + \ldots + l\right]y,$$

les nombres arbitraires $a, b, \ldots, l$ recevant le nom de paramètres accessoires.

Le cas $m = 4$ conduit simplement à l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ay,$$

de sorte que y s'y exprime par des fonctions circulaires de la variable elliptique t.

Dans le cas général, les exposants à l'infini sont $\frac{m}{4}$ et $\frac{m}{4} - 1$; si nous introduisons des variables homogènes en posant $x = \frac{x_1}{x_2}$, ces exposants deviendront 0 et 1. Posons alors

$$y = x_2^{\frac{m}{4} - 1} F(x_1, x_2),$$

F sera une fonction homogène, de degré $1 - \frac{m}{4}$, que Klein appelle *Forme de Lamé*. Elle satisfait à une équation aux dérivées partielles que l'on obtiendra facilement, et qui, si l'on pose

$$f(x) = x_2^{-m} f(x_1, x_2),$$

s'écrira

$$4 f(x_1, x_2) \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{m-4}{4(m-1)} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} F$$
$$= x_2^2 (a x_1^{m-4} + b x_1^{m-5} x_2 + \ldots + l x_2^{m-4}) F,$$

ce qui peut, en utilisant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, être mis sous la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = \frac{m(m-4)}{4} (a x_1^{m-4} + \ldots + l x_2^{m-4}) F.$$

Le premier membre est un covariant connu, que l'on a l'habitude d'indiquer par le symbole $(f, F)_2$; et le second membre est le produit de F par une fonction rationnelle entière générale de x_1 et x_2, de degré $m - 4$, que l'on désignera par φ_{m-4}. L'équation de Lamé généralisée prend alors la forme symbolique très simple suivante :

$$\left(f_m, F_{1-\frac{m}{4}}\right)_2 = F_{1-\frac{m}{4}} \cdot \varphi_{m-4}.$$

La propriété qu'elle exprime pourrait, d'après Klein, être prise comme définition des formes et des fonctions de Lamé générales.

Les travaux les plus remarquables de l'école de F. Klein se rapportent à la question suivante : combien les fonctions considérées admettent-elles de racines dans chacun des intervalles e_i, e_{i+1} ? Dans le cas $m = 4$, où il n'y a qu'un seul paramètre accessoire, la réponse est fournie par les classiques propositions de Sturm; la courbe représenlative de la fonction, dans les intervalles où t est réel, *oscille* comme une sinusoïde. Pour $m = 5$, l'équation étant

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[-\frac{f''(x)}{16} + ax + b\right] y,$$

le théorème fondamental de Klein, qui a donné lieu à toute une littérature de thèses (80-88), est le suivant : les deux paramètres accessoires peuvent être déterminés (et d'une seule manière) de façon qu'il existe une solution particulière y_1 qui, dans un intervalle arbitraire $p_1 p_2$ de l'axe des x, effectue p demi-oscillations, c'est-à-dire s'annule p fois, et une autre solution y_2 qui, dans un autre intervalle $q_1 q_2$, effectue q demi-oscillations; les deux solutions s'annulant d'ailleurs respectivement aux extrémités des intervalles.

Ce cas $m = 5$ est fort important, car l'équation correspondante s'introduit d'elle-même lorsqu'on étudie, en coordonnées pentasphériques, l'équation du potentiel pour des volumes limités par des cyclides quelconques. On lira, dans un ouvrage capital de M. Bôcher (80), tous les renseignements sur cette théorie, ainsi que son extension à l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Dans un cas de dégénérescence, les fonctions envisagées se réduisent à celles de Lamé-Wangerin, pour lesquelles le théorème des oscillations est dès lors valable.

Fonctions de Heine. — Étant donnés deux polynomes quelconques $A(x)$ et $B(x)$, dont les degrés sont respectivement $p + 1$ et p, considérons l'équation différentielle

$$A(x)y'' + 2B(x)y' + C(x)y = 0,$$

où C est un polynome de degré $p - 1$ au plus. Il existe toujours certaines déterminations particulières de C telles que l'équation admette comme intégrale un polynome de degré m donné. Cette propriété est le fondement de la théorie des fonctions de Lamé, généralisées par Heine (89-90). D'une façon générale, on appelle *Fonction de Lamé* de première espèce, d'ordre p et de degré m, une fonction entière de degré m, satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{du^2} + V\varphi(z) = 0,$$

u étant une variable hyperelliptique définie par

$$du = \frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}},$$

où $\psi(z)$ est un polynome donné d'ordre $p+1$, et $\varphi(z)$ étant un polynome d'ordre $p-1$ qui doit satisfaire à certaines conditions. Le nombre des fonctions de Lamé correspondant à des valeurs données de m et p est

$$\frac{(m+1)\ldots(m+p-2)}{(p-1)!}(2m+p-1).$$

Ces fonctions, dont Stieltjes a étudié les racines (91), s'introduisent dans la théorie du potentiel pour des systèmes orthogonaux d'hyperquadriques, dans l'espace à $p+1$ dimensions. Elles se réduisent, pour $p=2$, aux fonctions de Lamé proprement dites, et, dans un cas particulier, aux fonctions de Gegenbauer.

Équations plus générales. — En même temps que l'équation de Lamé, Hermite a considéré les trois équations suivantes, plus générales, où n et ν sont des entiers, et où l'on suppose $n \geqq \nu$ (93) :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\nu+1)k^2\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}\frac{dy}{dx} = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\operatorname{sn}^2x + h]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\nu+1)\frac{\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{cn}x}\frac{dy}{dx} = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\operatorname{sn}^2x + h]y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2(\nu+1)\frac{\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x}{\operatorname{sn}x}\frac{dy}{dx} = [(n-\nu)(n+\nu+1)k^2\operatorname{sn}^2x + h]y.$$

Elles s'intègrent, comme l'équation de Lamé, par les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Leur étude a été faite par Brioschi (94-96) et par Elliot (97). Par un changement d'inconnue, la première de ces trois équations peut s'écrire

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left[h + n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2x + m(m-1)\frac{k^2\operatorname{cn}^2x}{\operatorname{dn}^2x}\right]z = 0.$$

Sous cette forme, elle a pour solutions les fonctions appelées *Fonctions de Lamé associées*, jouant par rapport aux fonctions de Lamé ordinaires le rôle que jouent les fonctions associées P_n^m de Legendre par rapport aux polynomes P_n. M. Ince a indiqué une équation intégrale à laquelle satisfont ces fonctions (100).

Darboux intègre par la méthode d'Hermite l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{\mu(\mu+1)}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{\mu'(\mu'+1)}{\operatorname{cn}^2 x}\operatorname{dn}^2 x \right.$$
$$\left. + \frac{\mu''(\mu''+1)}{\operatorname{dn}^2 x}\, k^2\operatorname{sn}^2 x + n(n+1)\,k^2\operatorname{sn}^2 x + h\right]$$

qu'il a rencontrée dans un problème de géométrie (99), et M. de Sparre étudie l'équation plus générale encore (98)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2\nu\,\frac{k^2\operatorname{sn} x\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} + 2\nu_1\,\frac{\operatorname{sn} x\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x} - 2\nu_2\,\frac{\operatorname{cn} x\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$= y\left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}(n_3-\nu_2)(n_3+\nu_2+1) + \frac{\operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x}(n_2-\nu_1)(n_2+\nu_1+1)\right.$$
$$+ \frac{k^2\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{sn}^2 x}(n_1-\nu)(n_1+\nu+1)$$
$$\left. + k^2\operatorname{sn}^2 x\,(n+\nu+\nu_1+\nu_2)(n-\nu-\nu_1-\nu_2+1) + h\right].$$

M. Whittaker (101) rattache à la théorie des équations intégrales une équation différentielle à quatre singularités dont une solution, écrite avec la notation de Heun, serait

$$F\left(a, q; -\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1-\mu, \frac{1}{2}, 1-\mu; x\right).$$

Enfin A. Markov établit divers théorèmes (séparation des racines, etc.) sur certaines fonctions introduites comme dénominateurs des réduites successives dans le développement en fraction continue d'une intégrale très générale, et qui comprennent les fonctions de Lamé comme cas particuliers (102).

FONCTIONS DE MATHIEU.

Historique. — Comme les fonctions de Lamé, dont elles sont un cas limite, les fonctions de Mathieu s'introduisent dans la théorie du potentiel : elles jouent le rôle de fonctions harmoniques pour un cylindre droit à base elliptique. Mais c'est en étudiant le problème des vibrations d'une membrane elliptique qu'Émile Mathieu a été conduit à leur équation différentielle. Heine et, après lui, un très grand nombre d'auteurs allemands, ont cherché quelles pouvaient être les propriétés des solutions de cette équation, qu'ils appelaient *équation du cylindre elliptique;* mais ils n'ont pas obtenu de résultats bien intéressants; nous ne les mentionnerons que pour mémoire (104-114). Ce n'est que beaucoup plus tard que M. E. T. Whittaker (119) trouva l'équation intégrale à laquelle satisfont toutes les solutions périodiques de cette équation différentielle, découverte fondamentale, qui a suscité de nombreux travaux de l'école britannique contemporaine, et qui a rejeté dans l'ombre presque tout ce qui avait été fait auparavant, si ce n'est les belles recherches de Lindemann sur la solution générale de l'équation.

La théorie des fonctions de Mathieu, dont les applications physiques, mécaniques et astronomiques sont assez nombreuses, ne se trouve exposée, sous cette forme nouvelle, que dans quelques pages de *Modern Analysis*, de MM. Whittaker et Watson (117); elle est bien peu connue, surtout en France, et ne doit pas être regardée comme définitivement fixée.

Équation différentielle de Mathieu. — Écrivons l'équation de Laplace dans le changement de variables suivant, qui introduit des cylindres droits ayant pour base des coniques homofocales :

$$x = \cos\xi \operatorname{ch}\eta,$$
$$y = \sin\xi \operatorname{sh}\eta,$$
$$z = z.$$

On trouve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + (\operatorname{ch}^2\eta - \cos^2\xi)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

et, si l'on en cherche des solutions de la forme

$$U = X(\xi)\, Y(\eta)\, e^{ikz},$$

on obtient pour X et Y les équations, où A est arbitraire :

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + (A + k^2\cos^2\xi)X = 0,$$
$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} - (A + k^2\operatorname{ch}^2\eta)Y = 0,$$

qu'un changement de variables évident ramènera l'une à l'autre.

On donne le nom d'*équation de Mathieu* à l'équation

$$\text{(I)}\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + (A + k^2\cos^2 x)y = 0$$

ou (le changement de notation ayant pour but de la rendre plus maniable)

$$\text{(II)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (a + 16\,q\cos 2x)y = 0,$$

avec $k = \sqrt{32q}$.

La recherche des fonctions de Laplace pour le système orthogonal de paraboloïdes

$$\frac{x^2}{p+\lambda} + \frac{y^2}{q+\lambda} - 2z - \lambda = 0$$

conduit à la même équation différentielle.

Fonctions de Mathieu. — Les applications physiques de l'équation conduisent à considérer spécialement ses solutions périodiques, de période 2π. Pour que de telles solutions existent, il est nécessaire, d'après la théorie générale des équations à coefficients périodiques, que les constantes a et q soient liées par une relation, d'ailleurs compliquée. Nous admettrons toujours que q est considéré comme donné, et nous supposerons que a est choisi, en fonction de q, de telle sorte que l'équation admette des solutions périodiques. Ainsi, dans l'équation de Lamé, supposions-nous la valeur du paramètre h fixée de telle sorte que l'équation admette des solutions du type R_n.

Dans le cas particulier où $q = 0$, l'équation de Mathieu se réduit à

$$\text{(III)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0,$$

et l'étude de ce cas de dégénérescence va jeter quelque clarté sur le problème général. L'équation (III) admet une infinité de solutions périodiques, obtenues en donnant à a l'une des valeurs $1^2, 2^2, \ldots, m^2, \ldots$; et ses solutions périodiques correspondant à $a = m^2$ sont $\cos mx$ et $\sin mx$. On appellera *Fonction de Mathieu d'ordre m*, toute solution périodique (de période 2π) de l'équation (II), se réduisant, lorsque $q = 0$ (et $a = m^2$), à $\cos mx$ ou à $\sin mx$. On désignera par $ce_m(x, q)$, ou plus simplement par $ce_m(x)$ une fonction de Mathieu paire en x, et se réduisant pour $q = 0$ à $\cos mx$; par $se_m(x, q)$ ou plus simplement $se_m(x)$, une fonction impaire se réduisant à $\sin mx$; en supposant, ce qui achève de les déterminer, que, dans leurs développements respectifs en série de Fourier, les coefficients de $\cos mx$ ou de $\sin mx$ soient égaux à l'unité.

Il peut ainsi exister quatre formes différentes pour les fonctions de Mathieu, dont les développements sont des types suivants :

$$
(\mathrm{IV})\qquad
\begin{cases}
ce_{2n}\ \ (x, q) = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} a_r \cos 2rx,\\[2mm]
ce_{2n+1}(x, q) = \displaystyle\sum \alpha_r \cos(2r+1)x,\\[2mm]
se_{2n}\ \ (x, q) = \displaystyle\sum b_r \sin 2rx,\\[2mm]
se_{2n+1}\ (x, q) = \displaystyle\sum \beta_r \sin(2r+1)x.
\end{cases}
$$

Un problème vient ici se poser naturellement : dans le cas de dégénérescence $q = 0$, à la même valeur de $a = m^2$ correspondent *deux* solutions périodiques, $\cos mx$ et $\sin mx$, formant un système fondamental. Peut-il de même, pour des valeurs convenablement choisies de q et de a, exister simultanément deux fonctions de Mathieu? On a longtemps pensé qu'il pouvait en être ainsi, et que l'équation de Mathieu admettait, au moins dans certains cas, pour les mêmes valeurs de q et de a, une solution du type *ce* et une solution du type *se*. M. Ince a montré récemment qu'il n'en était rien, par un raisonnement simple et élégant que nous reproduisons, en nous bornant à considérer le cas où m est impair; le cas m pair se traiterait de façon identique (**120**).

Supposons que l'équation de Mathieu soit satisfaite simultanément par $ce_{2n+1}(x, q)$ et par $se_{2n+1}(x, q)$. En portant dans cette équation les séries (IV), on trouve entre les coefficients les relations

$$
\begin{gathered}
(a - 1 + 8q)\,\alpha_0 + 8q\alpha_1 = 0,\\
[(2p+1)^2 - a]\,\alpha_p = 8q\,(\alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}),\\
(a - 1 - 8q)\,\beta_0 + 8q\beta_1 = 0,\\
[(2p+1)^2 - a]\,\beta_p = 8q(\beta_{p+1} + \beta_{p-1}).
\end{gathered}
$$

Nous excluons *a priori* le cas de dégénérescence où q est nul et a égal au carré d'un entier impair; on voit alors que tous les coefficients α et β sont finis, et que α_0 et β_0 ne peuvent être nuls. Mais de ces relations, on tire, quel que soit p,

$$
\begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_{p+1} \\ \beta_p & \beta_{p+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \beta_{p-1} & \beta_p \end{vmatrix} = \ldots = 2\alpha_0\beta_0.
$$

Ces déterminants doivent donc conserver une valeur constante, non nulle, pour toutes les valeurs de p; mais d'autre part, pour que les développements (IV) convergent, il est nécessaire que α_p et β_p tendent vers zéro quand p augmente indéfiniment, d'où une contradiction, qui permet d'établir la non-existence simultanée de deux fonctions de Mathieu du même ordre, correspondant aux mêmes valeurs de q et a.

Équation intégrale des fonctions de Mathieu. — En utilisant un résultat établi par lui-même, sur une expression très générale du potentiel par une intégrale définie (**118**), M. Whittaker a obtenu diverses équations intégrales fondamentales, auxquelles satisfont les fonctions de Mathieu (**119**). Ainsi, toute fonction de Mathieu, paire ou impaire, est solution de l'équation intégrale

$$(\mathrm{V}) \qquad y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik \sin x \sin\theta} y(\theta)\, d\theta.$$

On vérifiera bien aisément ce résultat : portons en effet cette valeur de $y(x)$ dans l'équation différentielle, il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik \sin x \sin\theta}[-k^2 \cos^2 x \sin^2\theta - ik \sin x \sin\theta + a + k^2 \cos^2 x]\, y(\theta)\, d\theta = 0,$$

ou, en remplaçant $\cos^2 x \sin^2\theta$ par $(1-\sin^2 x)(1-\cos^2\theta)$,

$$(\mathrm{VI}) \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik \sin x \sin\theta}[-k^2 \sin^2 x \cos^2\theta - ik \sin x \sin\theta + a + k^2 \cos^2\theta]\, y(\theta)\, d\theta = 0.$$

Mais une intégration par parties nous donnera

$$\begin{aligned} -\int_{-\pi}^{\pi} k^2 \sin^2 x \cos^2\theta\, e^{ik \sin x \sin\theta} y(\theta)\, d\theta &= [ik \sin x \cos\theta\, e^{ik \sin x \sin\theta} y(\theta)]_{-\pi}^{\pi} \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} ik \sin x \cos\theta\, e^{ik \sin x \sin\theta} \frac{dy}{d\theta}\, d\theta \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} ik \sin x \sin\theta\, e^{ik \sin x \sin\theta} y(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

La relation (VI) s'écrira donc, en observant que le terme tout intégré est nul, puisque $y(\theta)$ est périodique,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik \sin x \sin\theta}\left[-ik \sin x \cos\theta \frac{dy}{d\theta} + (a + k^2 \cos^2\theta)\, y(\theta)\right] d\theta = 0,$$

ou encore, après une seconde intégration par parties,

$$\left[-e^{ik\sin x\sin\theta}\frac{dy}{d\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\sin x\sin\theta}\left[\frac{d^2y}{d\theta^2}+(a+k^2\cos^2\theta)y(\theta)\right]d\theta=0.$$

Or, si y est une fonction paire, $\frac{dy}{d\theta}$ s'annule pour $\theta=\pm\pi$; et si y est impaire, $\frac{dy}{d\theta}$ prend les mêmes valeurs pour $\theta=\pm\pi$; le terme tout intégré est donc, là encore, nul; et la relation est bien vérifiée, puisque y vérifie l'équation de Mathieu, dont le premier membre se retrouve, avec la variable θ, en facteur sous le signe d'intégration.

On a, de plus, pour chaque type de fonctions de Mathieu, les équations intégrales particulières suivantes :

$$(\text{VII})\qquad\left\{\begin{aligned}ce_m(x)&=\lambda\int_0^{2\pi}e^{k\cos x\cos\theta}ce_m(\theta)\,d\theta,\\ se_m(x)&=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\sin x\sin\theta)\,se_m(\theta)\,d\theta.\end{aligned}\right.$$

On remarquera que le paramètre a ne figure pas dans ces diverses équations.

M. Poole (**128**) a donné plusieurs autres équations de ce genre; il a montré, par exemple, que la fonction $se_{2n+1}(x)$ vérifie une équation intégrale dont le noyau est

$$\sin x\sin\theta\cos(k\cos x\cos\theta),$$

alors que, pour la fonction $se_{2n}(x)$, on peut prendre le noyau

$$\cos x\cos\theta\,\text{sh}\,(k\sin x\sin\theta).$$

Il y a lieu de noter qu'antérieurement à M. Whittaker, une équation intégrale pour les fonctions du cylindre elliptique avait été indiquée par M. Abraham (**115**) (qui y était d'ailleurs parvenu en suivant une voie discutable) et par M. Brillouin (**116**). Aucun de ces auteurs n'avait soupçonné l'importance mathématique de cette équation.

Calcul effectif de la fonction d'ordre zéro. — La fonction de Mathieu la plus simple, $ce_0(x)$, est celle qui se réduit à l'unité pour $q=0$. Nous allons calculer les coefficients de son développement en série,

$$ce_0(x, q) = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty} a_r \cos 2rx,$$

en nous servant de l'équation intégrale (VII) qu'elle vérifie.

Remarquons tout d'abord que, si l'on fait dans cette équation $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$ce_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lambda \int_0^{2\pi} ce_0(\theta)\, d\theta = 2\pi\lambda.$$

L'équation s'écrira donc

$$\text{(VIII)} \qquad ce_0(x) = \frac{1}{2\pi} ce_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{2\pi} e^{k\cos x \cos\theta}\, ce_0(\theta)\, d\theta.$$

Or on connaît, par la théorie des fonctions de Bessel, le développement, où h est quelconque,

$$e^{h\cos x} = J_0(ih) - 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(ih)\cos nx.$$

On tirera donc de l'équation (VIII), en égalant dans les deux membres les coefficients de $\cos 2rx$

$$a_r = \frac{(-1)^r}{\pi} ce_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{2\pi} J_{2r}(ik\cos\theta)\, ce_0(\theta)\, d\theta.$$

Remplaçant alors, au second membre, les fonctions de Mathieu et de Bessel par leurs développements et appliquant la formule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2m}\theta \cos 2p\,\theta\, d\theta = \frac{(2m)!}{2^{2m-1}(m+p)!\,(m-p)!},$$

nous obtenons a_r sous forme de série procédant suivant les puissances croissantes de k, à coefficients d'ailleurs très compliqués, et dont les premiers termes sont

$$a_r = \frac{k^{2r}}{2^{4r-1}\, r!\, r!} - \frac{r(3r+4)\,k^{2r+4}}{2^{4r+7}(r+1)!\,(r+1)!} + \ldots,$$

d'où le développement de $ce_0(x)$, que l'on pourra écrire, en introduisant, au lieu de k, le paramètre q,

$$ce_0(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{2^{r+1} q^r}{r!\,r!} - \frac{2^{r+3} r(3r+4) q^{r+2}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \ldots \right] \cos 2r x.$$

La valeur du paramètre a donnant naissance à cette solution périodique peut s'écrire sous forme de série dont les premiers termes sont

$$a = -32 q^2 + 224 q^4 - \frac{29}{9} 2^{10} q^6 + \ldots.$$

On pourra écrire de la même manière les développements des fonctions du premier ordre,

$$ce_1(x) = \cos x + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{2^r . q^r}{r!\,(r+1)!} - \frac{2^{r+1} r . q^{r+1}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \frac{2^r . q^{r+2}}{(r-1)!\,(r+2)!} + \ldots \right] \cos(2r+1)x$$

avec

$$a = 1 - 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + \ldots$$

et

$$se_1(x) = \sin x + \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{2^r . q^r}{r!\,(r+1)!} + \frac{2^{r+1} r . q^{r+1}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \frac{2^r . q^{r+2}}{(r-1)!\,(r+2)!} + \ldots \right] \sin(2r+1)x$$

avec

$$a = 1 + 8q - 8q^2 - 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + \ldots.$$

D'ailleurs, ordonnées suivant les puissances de q, ces séries se mettront sous la forme

$$ce_1(x) = \cos x + q \cos 3x + q^2 \left(\frac{1}{3} \cos 5x - \cos 3x \right) + \ldots,$$

$$se_1(x) = \sin x + q \sin 3x + q^2 \left(\frac{1}{3} \sin 5x + \sin 3x \right) + \ldots.$$

La relation qui doit, dans chaque cas, avoir lieu entre les constantes q et a pour que la solution périodique existe, a été spécialement étudiée par M. Burgess (122).

Propriétés diverses des fonctions de Mathieu. — Les relations d'orthogonalité suivantes s'établissent immédiatement, lorsqu'on sait que toutes les fonctions de Mathieu sont solutions d'une équation intégrale homogène à noyau symétrique :

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(x, q)\, se_n(x, q)\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(x, q)\, ce_n(x, q)\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} se_m(x, q)\, se_n(x, q)\, dx = 0.$$

Citons aussi la relation intéressante

$$ce_{2n+1}(x, q) = (-1)^n\, se_{2n+1}\left(x + \frac{\pi}{2}, -q\right).$$

Quand l'excentricité de l'ellipse fondamentale tend vers zéro, les fonctions ce_m et se_m se réduisent l'une et l'autre à la fonction de Bessel $J_m(ik \cos x)$.

Si cette excentricité tend vers l'unité, on est conduit aux fonctions de Weber ou du cylindre parabolique (cas particulier de la série de Kummer).

Divers auteurs ont traité la question de la convergence des séries représentant les fonctions de Mathieu. L'extrême complication des coefficients de ces séries rend cette étude fort ardue. M. Watson, en considérant une série majorante, a établi assez simplement la convergence de la série ce_0 (**121**).

La distribution dans le plan complexe des zéros des fonctions de Mathieu a été étudiée en détail par M. Einar Hille (**126**).

Enfin, à la recherche de séries représentant asymptotiquement les solutions de l'équation de Mathieu, sont attachés les noms de MM. Maclaurin, Marschall, Dougall (**148**, **123-125**), tandis que M. Jeffreys (**126** *bis*) indique des valeurs approchées de ces solutions quand k est très grand.

SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE MATHIEU.

Fonctions de Mathieu de seconde espèce. — Une seconde solution, non périodique, de l'équation de Mathieu où l'on suppose a choisi comme ci-dessus, s'écrira par la formule d'Euler. Les diverses fonctions de ce type, que l'on appellera *Fonctions de Mathieu de seconde espèce*, et qui, comme dans tous les cas analogues, s'introduisent dans les problèmes de potentiel extérieur, sont désignées par les notations

$$in_m(x) = ce_m(x)\int^x \frac{dz}{ce_m^2(z)},$$
$$jn_m(x) = se_m(x)\int^x \frac{dz}{se_m^2(z)},$$

la limite inférieure des intégrales étant arbitraire. L'étude de ces fonctions a été faite par M. Ince (127).

Pour les premières valeurs de l'indice, on aura

$$in_0(x) = x ce_0(x) - 4q\sin 2x - 3q^2\sin 4x + q^3\left[-\frac{22}{27}\sin 6x + 54\sin 2x\right] + \ldots,$$
$$in_1(x) = -8qx ce_1(x)\left[1 - 3q^2 + 6q^3 + \frac{31}{9}q^4 + \ldots\right] + \sin x + q\sin 3x + \ldots,$$
$$jn_1(x) = -8qx se_1(x)\left[1 - 3q^2 - 6q^3 + \frac{31}{9}q^4 + \ldots\right] + \cos x + q\cos 3x + \ldots.$$

Il existe pour ces fonctions des propriétés de quasi-périodicité dont la plus simple est

$$in_0(x + 2\pi) = in_0(x) + 2\pi\, ce_0(x).$$

Solutions à période 4π. — La très intéressante remarque suivante a été faite récemment par M. Poole (128) : q étant toujours considéré comme donné, on peut déterminer une valeur de a, se réduisant pour $q = 0$ à $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, n étant un entier, et telle que l'équation différentielle admette des solutions périodiques de période 4π, se réduisant pour $q = 0$, soit à $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x$, soit à $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$. On les désigne par $ce_{n+\frac{1}{2}}(x)$ ou $se_{n+\frac{1}{2}}(x)$. Ce ne sont pas de véritables fonctions de Mathieu, mais leur intérêt est que, pour une même valeur de a, une solution ce et une solution se existent simultanément, formant un système fondamental, à l'inverse de ce qui a lieu dans le cas des solutions à période 2π. On a d'ailleurs la relation

$$ce_{n+\frac{1}{2}}(\pi - x) = se_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

M. Poole a indiqué pour ces fonctions des équations intégrales telles que la suivante :

$$se_{n+\frac{1}{2}}(x) = \lambda \int_0^{2\pi} G(x, y)\, se_{n+\frac{1}{2}}(y)\, dy,$$

où

$$G(x, y) = e^{ik\cos x \cos y} \int_0^{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}} e^{-ikt^2}\, dt.$$

Il existe également des couples de solutions périodiques de période 6π, 8π, etc.

Intégration de l'équation générale. Méthode de Whittaker. — Si nous supposons à présent le paramètre a quelconque, l'équation de Mathieu n'admettra plus de solutions périodiques. On sait alors, d'après la théorie générale des équations à coefficients périodiques, due à Floquet, qu'elle admet une solution du type

$$y = e^{\mu x} \varphi(x), \tag{IX}$$

μ étant une constante, et $\varphi(x)$ une fonction périodique, de période 2π.

Le changement de x en $-x$ n'altérant pas l'équation différentielle, on voit que la solution générale sera de la forme

$$y = A e^{\mu x} \varphi(x) + B e^{-\mu x} \varphi(-x),$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Le problème revient donc à déterminer l'exposant μ en fonction de a et de q ; il est très ardu. C'est à propos de recherches semblables que Hill, étudiant une équation différentielle dont, comme nous le verrons plus loin, l'équation de Mathieu est un cas particulier, a introduit dans l'Analyse les déterminants infinis. M. Whittaker (129) est parvenu, au moyen d'un changement de paramètre, à exprimer μ d'une façon moins compliquée et plus propre aux calculs numériques. Il détermine μ et a sous forme de séries procédant suivant les puissances de q et dont les coefficients sont fonctions d'un nouveau paramètre σ, de telle sorte que l'équation sera vérifiée par une fonction du type (IX), où

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \sin(x-\sigma) &+ \alpha_3 \cos(3x-\sigma) + \beta_3 \sin(3x-\sigma)\\ &+ \alpha_5 \cos(5x-\sigma) + \beta_5 \sin(5x-\sigma)\\ &+ \ldots,\end{aligned}$$

α_3, β_3, ... étant des fonctions de q et de σ. Le cas particulier où $\sigma = 0$

conduirait à la fonction de Mathieu se_1, le cas $\sigma = \frac{\pi}{2}$ à la fonction ce_1. Les premiers termes de la série donnant μ sont alors

$$4\,q \sin 2\sigma - 12\,q^3 \sin 2\sigma - 12\,q^4 \sin 4\sigma - \ldots,$$

ceux de la série donnant a sont

$$1 + 8\,q \cos 2\sigma + (-16 + 8 \cos 4\sigma)\,q^2 - 8\,q^3 \cos 2\sigma + \ldots,$$

et les coefficients successifs des séries représentant α_3, β_3, ... s'obtiennent par une formule de récurrence assez simple. Si l'on désigne par $\Lambda(x, \sigma, q)$ la solution ainsi déterminée, une seconde solution sera $\Lambda(x, -\sigma, q)$.

Une contribution à l'étude des solutions de ce genre a été apportée par A. W. Young (130).

Méthode de F. Lindemann. — On peut, comme l'a fait Lindemann (131), étudier et former, en suivant une tout autre voie, la solution générale de l'équation de Mathieu. Faisons en effet dans cette équation le changement de variable

$$\cos^2 x = z.$$

Nous obtenons une équation à coefficients rationnels,

$$(\mathrm{X}) \qquad 4z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + 2(1-2z)\frac{dy}{dz} + (a - 16q + 32qz)y = 0,$$

qui possède deux singularités régulières (aux points 0 et 1) et une singularité irrégulière à l'infini. C'est donc un cas de confluence de l'équation générale à quatre singularités régulières; et l'une de ses solutions pourra s'écrire, dans la notation de Heun,

$$\lim_{\rho \to \infty} \mathrm{F}\left(4\rho^2, \frac{1}{2} - \frac{a\xi}{k^2}; \rho k, \rho k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right).$$

Les exposants, pour chacune des singularités 0 et 1, sont 0 et $\frac{1}{2}$; l'équation a donc des solutions de la forme

$$y_{00} = \Sigma\, a_n z^n,$$
$$y_{01} = \sqrt{z}\,\Sigma\, b_n z^n,$$
$$y_{10} = \Sigma\, a'_n (1-z)^n,$$
$$y_{11} = \sqrt{1-z}\,\Sigma\, b'_n (1-z)^n,$$

et il existera des relations telles que

$$y_{10} = C_1 y_{00} + C_2 y_{01}$$
$$y_{11} = K_1 y_{00} + K_2 y_{01}.$$

Supposons que z décrive un circuit fermé autour de l'origine : alors y_{01} change de signe, y_{00} restant le même, donc y_{10} devient $C_1 y_{00} - C_2 y_{01}$, et y_{11} devient $K_1 y_{00} - K_2 y_{01}$; de sorte que, en posant

$$Y = A^2 y_{10}^2 + B^2 y_{11}^2,$$

la fonction Y de z restera identique à elle-même quand z aura décrit le circuit, si l'on a la relation

$$\begin{aligned} &A^2(C_1 y_{00} + C_2 y_{01})^2 + B^2(K_1 y_{00} + K_2 y_{01})^2 \\ &= A^2(C_1 y_{00} - C_2 y_{01})^2 + B^2(K_1 y_{00} - K_2 y_{01})^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire si les constantes initiales sont liées par

$$A^2 C_1 C_2 + B^2 K_1 K_2 = 0.$$

D'ailleurs la fonction Y n'est pas altérée par un circuit décrit par z autour du point $z = 1$: et comme elle ne saurait évidemment avoir d'autres points singuliers, à distance finie, que 0 ou 1, c'est une fonction *entière* de z.

Ainsi nous parvenons au résultat fondamental suivant : il existe deux solutions de l'équation de Mathieu,

$$u_1 = A y_{10} + iB y_{11},$$
$$u_2 = A y_{10} - iB y_{11},$$

dont le produit est une fonction entière de z.

Pour intégrer complètement l'équation de Mathieu, il faut donc commencer par déterminer la fonction Y, ce qui peut se faire assez aisément. On sait former en effet l'équation différentielle (du troisième ordre) à laquelle satisfont les carrés des intégrales de l'équation de Mathieu, et par conséquent toute combinaison linéaire de ces carrés ; on trouve ainsi pour Y l'équation

$$z(1-z)\frac{d^3 Y}{dz^3} + (3-z)\frac{d^2 Y}{dz^2} + (a - 1 - 16q + 32qz)\frac{dY}{dz} + 16qY = 0$$

et, en y posant

$$Y = \sum_0^\infty \gamma_n z^n,$$

on obtiendra pour les coefficients γ des formules de récurrence suffisamment maniables, pouvant d'ailleurs être rattachées à la théorie des fractions continues.

La fonction Y étant connue, on pourra former sans difficulté les solutions u_1 et u_2 de l'équation de Mathieu, telles que

$$u_1 u_2 = \mathrm{Y}.$$

En effet, de cette relation on tire

$$\text{(XII)} \qquad \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} = \frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{Y}}$$

et de l'équation de Mathieu elle-même,

$$u'_1 u_2 - u'_2 u_1 = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

Donc

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{u'_1}{u_1} - \frac{u'_2}{u_2} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Y}\sqrt{z(1-z)}},$$

C étant une constante. Les équations (XII) et (XIII) permettront de calculer les rapports $\frac{u'_1}{u_1}$, $\frac{u'_2}{u_2}$, d'où par intégration

$$u_1 = \sqrt{\mathrm{Y}}\, e^{\frac{\mathrm{C}}{2}\int_0^z \frac{dz}{\mathrm{Y}\sqrt{z(1-z)}}},$$

$$u_2 = \sqrt{\mathrm{Y}}\, e^{-\frac{\mathrm{C}}{2}\int_0^z \frac{dz}{\mathrm{Y}\sqrt{z(1-z)}}}$$

et la constante C pourra se calculer en portant dans l'équation de Mathieu les premiers termes du développement de u_1 autour de l'origine. On a ainsi entièrement résolu le problème proposé.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DE L'ÉQUATION DE MATHIEU.

Fonctions de Mathieu associées. — L'équation suivante

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\nu \cot g x \frac{dy}{dx} + (a + k^2 \cos^2 x) y = 0,$$

que l'on peut écrire encore, en posant $z = y \sin^\nu x$,

$$\text{(XV)} \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \left[a + \nu^2 - \frac{\nu(\nu-1)}{\sin^2 x} + k^2 \cos^2 x\right] z = 0,$$

est une généralisation de l'équation de Mathieu, à laquelle elle se réduit pour $\nu = 0$ ou $\nu = 1$. Ses solutions périodiques ont été étudiées simultanément par E. L. Ince (**133-134**) et P. Humbert (**135**) : on les désigne sous le nom de Fonctions de Mathieu associées, ou d'ordre supérieur.

Comme pour l'équation de Mathieu, les solutions peuvent être de quatre types. On représente par $ce^{\nu}_{2n}(x)$ ou $ce^{\nu}_{2n+1}(x)$ celles qui se réduisent pour $\nu = 0$ à $ce_{2n}(x)$ ou $ce_{2n+1}(x)$. Elles sont solutions de l'équation intégrale

$$\text{(XVI)} \qquad u(x) = \lambda \int_0^{\pi} e^{k\cos x\cos\theta} \sin^{\nu} x \sin^{\nu}\theta \, u(\theta)\, d\theta$$

et peuvent se développer en séries de fonctions de Mathieu,

$$ce^{\nu}_{2n}(x) = \sin^{\nu} x \sum_0^{\infty} A_r ce_{2r}(x),$$

$$ce^{\nu}_{2n+1}(x) = \sin^{\nu} x \sum_0^{\infty} B_r ce_{2r+1}(x).$$

D'autres solutions, du type se, ont des propriétés analogues, et l'on a d'ailleurs les relations

$$se^{\nu}_{2n}(x) = ce^{1-\nu}_{2n-1}(x),$$

$$se^{\nu}_{2n+1}(x) = ce^{1-\nu}_{2n}(x).$$

Pour $k = 0$, ces diverses fonctions se réduisent aux fonctions de Gegenbauer.

Les solutions d'une équation analogue à (XV), mais où le $\sin^2 x$ du dénominateur est remplacé par $\cos^2 x$, satisfont à une équation intégrale analogue à (XVI).

Équation de Hill. — Le problème des petites oscillations d'un planétoïde autour d'une de ses orbites périodiques conduit à une équation, célèbre en analyse et en astronomie, étudiée par Hill à propos du mouvement du périgée lunaire, et dont l'équation de Mathieu est un cas très particulier. Si, au temps t, on désigne par ω la distance normale du planétoïde à l'orbite connue, on a en effet entre ω et t l'équation différentielle (**136**)

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + (\theta_0 + \theta_1 \cos 2t + \theta_2 \cos 4t + \ldots)\,\omega = 0,$$

où les θ sont des constantes, décroissant rapidement. En se bornant donc dans la parenthèse aux deux premiers termes, on retrouve l'équation de Mathieu générale. Divers travaux ont été faits sur l'équation de Hill; on en trouvera le détail dans le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand (139). Indiquons simplement la marche suivie par Hill pour en obtenir la solution.

D'après la théorie générale, cette solution est de la forme

$$\omega = \mathrm{A}\, e^{ict} f_1(t) + \mathrm{B}\, e^{-ict} f_2(t),$$

f_1 et f_2 étant des fonctions périodiques, et les constantes ic et $-ic$ ayant reçu de Poincaré le nom d'exposants caractéristiques. Pour déterminer c, Hill pose

$$e^{it} = \zeta;$$

le coefficient de ω dans l'équation différentielle est alors

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \theta_n \zeta^{2n}.$$

Faisant

$$\omega = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^{c+2n},$$

portant dans l'équation et identifiant, Hill trouve pour les b des équations linéaires en nombre infini, d'où l'on tire, en éliminant les b, un déterminant d'ordre infini ne contenant que les quantités connues θ et l'inconnue c. Poincaré (137-138) démontre la convergence de ce déterminant, et que les solutions sont stables si les exposants caractéristiques sont purement imaginaires. Le calcul de c est chose malaisée : Hill a indiqué qu'on avait une approximation très suffisante en ne considérant que les trois lignes et colonnes centrales du déterminant infini.

M. Ince a appliqué avec succès à l'équation de Hill la méthode du changement de paramètre donnée par M. Whittaker pour celle de Mathieu (140).

Équation de Whittaker. — L'équation différentielle

$$\text{(XVII)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \xi \sin 2x \frac{dy}{dx} + (\eta - p\xi \cos 2x)\, y = 0,$$

où p, ξ, η désignent des constantes, jouit de propriétés intéressantes qui ont été indiquées par M. Whittaker (144). Si l'on fait tendre p vers l'infini et ξ vers zéro, le produit $p\xi$ restant fini, l'équation se réduit à celle de Mathieu. Si d'ailleurs dans (XVII) on pose

$$y = e^{\frac{1}{4}\xi\cos 2x} u,$$

on trouve pour u l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - (p+1)\xi\cos 2x + \frac{1}{8}\xi^2\cos 4x\right] u = 0.$$

Donc (XVII), plus générale que l'équation de Mathieu, est néanmoins un cas particulier de l'équation de Hill.

Le point intéressant est que, si p est un entier positif, l'équation admet comme solutions des polynomes d'ordre p en $\sin x$ et $\cos x$, lorsque certaine relation existe entre ξ et η. Ces solutions satisfont également à l'équation intégrale

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^p(x-s)\, e^{-\frac{1}{4}\xi\cos 2s} y(s)\, ds.$$

La relation entre ξ et η, $F_p(\xi, \eta) = 0$, donne $p+1$ valeurs distinctes de η, fonctions de ξ. A chacune de ces valeurs de η correspond une solution du type polynome. M. Ince a étudié de très près les familles de courbes planes définies par l'équation $F_p(\xi, \eta) = 0$; il a obtenu ainsi diverses propriétés des fonctions considérées, et, en passant à la limite, des fonctions de Mathieu (145).

Fonction de l'hypercylindre elliptique. — Le changement de variables dans l'espace à quatre dimension,

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \sin v \cos\varphi, \\ y &= a \sin u \sin v \sin\varphi, \\ z &= ai \cos u \cos v, \\ t &= t, \end{aligned}$$

introduit des hypercylindres parallèles à l'axe des t, ayant pour base dans l'espace des xyz des quadriques de révolution. L'équation de Laplace à quatre variables $\Delta U = 0$ peut être vérifiée par le produit

$$U = e^{ht} \cos\mu\varphi \sin^{\mu} u \sin^{\mu} v\, V(u, v),$$

V, fonction de l'hypercylindre elliptique, étant solution de

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (2\mu + 1)\operatorname{cotg} u \frac{\partial V}{\partial u} - (2\mu + 1)\operatorname{cotg} v \frac{\partial V}{\partial v} + h^2 a^2(\cos^2 u - \cos^2 v)V = 0.$$

On pourra prendre, comme solution de cette équation, soit le produit de deux fonctions de Mathieu associées, soit un cas très particulier d'une fonction $M(u, v)$, généralisation des fonctions de Mathieu, et pour cette raison appelée *Fonction de Mathieu à deux variables*, et dont les principales propriétés, indiquées par P. Humbert, sont les suivantes (**146**) :

1° Elle vérifie le système de deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} - \operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} - n \operatorname{cotg} u \frac{\partial M}{\partial u} + (m+1)\operatorname{cotg} v \frac{\partial M}{\partial v} + (a + k^2 \cos^2 u) M = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} - \operatorname{cotg} u \operatorname{cotg} v \frac{\partial^2 M}{\partial u\, \partial v} - m \operatorname{cotg} v \frac{\partial M}{\partial v} + (n+1)\operatorname{cotg} u \frac{\partial M}{\partial u} + (a' + k^2 \cos^2 v) M = 0.$$

2° On suppose que, pour $k = 0$, a et a' se réduisent respectivement à $(m+1)(m+n+1)$ et $(n+1)(m+n+1)$; la fonction de Mathieu à deux variables se réduit alors à $\mathfrak{U}_{m,n}(\cos u, \cos v)$, l'un des polynomes hypergéométriques à deux variables étudiés par Hermite, et qui généralise la fonction $\cos nx$.

3° Il existe une relation telle que

$$M(u, v) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(\cos u \cos \rho + \cos v \cos \sigma)} \sin \rho \sin \sigma\, N(\rho, \sigma)\, d\rho\, d\sigma,$$

où la fonction N, périodique en ρ et σ, satisfait au système

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \rho^2} - \operatorname{cotg} \rho \operatorname{cotg} \sigma \frac{\partial^2 N}{\partial \rho\, \partial \sigma} + (n+3)\operatorname{cotg} \rho \frac{\partial N}{\partial \rho} + m \operatorname{cotg} \sigma \frac{\partial N}{\partial \sigma} + (a + m - n - 1 + k^2 \cos^2 \rho) N = 0,$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \sigma^2} - \operatorname{cotg} \rho \operatorname{cotg} \sigma \frac{\partial^2 N}{\partial \rho\, \partial \sigma} + (m+3)\operatorname{cotg} \sigma \frac{\partial N}{\partial \sigma} + n \operatorname{cotg} \rho \frac{\partial N}{\partial \rho} + (a' + n - m - 1 + k^2 \cos^2 \sigma) N = 0.$$

Pour $k = 0$, ce système se réduit précisément à celui que vérifie le polynome $\mathfrak{V}_{m,n}(\cos \rho, \cos \sigma)$, associé de $\mathfrak{U}$.

APPLICATIONS DES FONCTIONS DE MATHIEU.

Mouvements vibratoires. — Ainsi que nous l'avons dit, c'est le problème des vibrations d'une membrane elliptique qui a conduit Mathieu (147) à l'équation différentielle considérée. Une membrane tendue dont le contour est une ellipse étant mise en vibration, les lignes nodales qui se forment sont des coniques homofocales ; le déplacement ω, normal au plan de la membrane, pour un point de coordonnées x, y, étant donné par

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2},$$

où m est une constante, il est indiqué de faire le changement de variables

$$x = c \cos \alpha \operatorname{ch} \beta,$$
$$y = c \sin \alpha \operatorname{sh} \beta,$$

qui, si l'on pose

$$\omega = \sin 2\lambda m t \, P(\alpha) Q(\beta),$$

amène aux équations

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (N - 4\lambda^2 c^2 \cos^2 \alpha) P = 0,$$
$$\frac{d^2 Q}{d\beta^2} - (N - 4\lambda^2 c^2 \operatorname{ch}^2 \beta) Q = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation de Mathieu.

On rencontre également cette équation dans un grand nombre de problèmes du même genre, en rapport avec le cylindre elliptique : vibrations de l'air dans un tuyau cylindro-elliptique, ondes de marée ou tourbillons dans un vase de même forme ou dans un lac elliptique (156), etc. Toutes ces questions sont étudiées avec grands détails dans un fort important Mémoire de R. Maclaurin, malheureusement un peu ancien, mais où théorie et applications sont exposées de façon remarquable (148).

Questions diverses. — Le même travail fait intervenir, soit l'équation de Mathieu elle-même, soit l'équation des fonctions associées, à propos de problèmes analogues pour des sphéroïdes. L'étude des oscillations hertziennes à la surface d'un sphéroïde conduit à l'équation

$$(\xi^2-1)\frac{d^2y}{d\xi^2}+\xi\frac{dy}{d\xi}+(\lambda^2\xi^2-p^2)y=0, \tag{XVIII}$$

qui s'avère identique à l'équation de Mathieu par le changement de variables $\xi=\cos x$. L'intérêt mathématique de cette question est que les développements asymptotiques des solutions s'introduisent naturellement. Un autre problème d'électricité, l'étude du courant obtenu en faisant varier les constantes d'un circuit oscillant, par modulation sur la fréquence, amène aussi à l'équation de Mathieu (155).

Les vibrations des couches sphéroïdales d'air, la dispersion d'ondes planes brisées par un obstacle sphéroïdal, la propagation de la chaleur dans les sphéroïdes, etc., sont autant de problèmes conduisant à une équation semblable à (XVIII), mais où le coefficient de $\frac{dy}{d\xi}$ est $2(n+1)\xi$: le même changement de variable la ramènera à l'équation des fonctions de Mathieu associées. Elle a d'ailleurs été rencontrée dans des questions du même genre par M. Abraham, et, d'après M. Poole, dans la théorie des marées sur un globe tournant (149-152).

Une équation très analogue à celles qui nous occupent,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+k\frac{d\theta}{dt}+(n^2-2\alpha\sin 2pt)\,\theta=0,$$

définit, comme l'a montré Lord Rayleigh, la vibration d'une corde lorsque le point d'attache est lui-même soumis à une vibration de période connue (153).

Problème des deux équilibristes. — Enfin l'équation de Mathieu se rencontre, fait assez inattendu, dans un problème de mécanique de genre entièrement différent, dont on peut donner l'énoncé sous la forme suivante :

Un équilibriste E_1 se tient sur une sphère qui peut rouler sur le plan horizontal. Il supporte, sur sa tête, une longue perche verticale, rigide, à l'extrémité de laquelle se tient un deuxième équilibriste E_2. Déterminer les petits mouvements que doit imprimer nécessairement à la sphère l'acrobate E_1 pour que le système entier demeure en équilibre.

Tel qu'il est posé, le problème est fort compliqué. Hamel, qui l'a étudié (154), est arrivé, en le schématisant et en le simplifiant autant que faire se pouvait, au résultat suivant : l'abscisse x du centre de la sphère, à partir d'une origine convenablement choisie, satisfait à l'équation différentielle, où τ est proportionnel au temps,

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (A + B \cos 2\tau) x = 0.$$

qui n'est autre que l'équation de Mathieu.

CONCLUSION.

Le bref exposé qui précède montre que les fonctions de Lamé, et surtout celles de Mathieu, offrent encore aux recherches un champ étendu.

C'est probablement dans le domaine des équations intégrales que l'on pourra obtenir les plus fructueux résultats. Ainsi, nous l'avons vu, l'équation intégrale des fonctions de Mathieu a jeté un jour nouveau sur leur théorie : il serait intéressant de refaire l'étude des fonctions de Lamé à partir de leur équation intégrale : peut-être arriverait-on ainsi à des propriétés nouvelles.

Il y aurait lieu également de rechercher les équations intégrales attachées à des équations différentielles plus générales que celles de Lamé et Mathieu, ce qui n'a été fait que partiellement.

D'autre part, existe-t-il quelque chose d'analogue à ces équations intégrales lorsqu'on passe aux équations différentielles ayant plus de quatre singularités? Problème qui mérite fort d'être étudié, et qu'on pourrait aborder en commençant par les équations de Klein et Bôcher.

Il serait curieux aussi de généraliser les fonctions de Mathieu dans le sens de Klein; peut-être pourrait-on rattacher de telles fonctions à des problèmes de potentiel.

Enfin, puisque les fonctions de Klein permettent d'exprimer le potentiel des cyclides, ne pourrait-on pas, leur appliquant les méthodes de Poincaré, arriver à répondre à la question suivante, jadis posée par M. Appell, très difficile mais du plus grand intérêt : Existerait-il, pour un fluide tournant, des figures d'équilibre en forme de cyclides ?

C.I.R.M. Luminy BIBLIOTÈQUE

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I. — Équations a quatre singularités.

1. Heun (Karl). — Zur Theorie der Riemannschen Functionen... (*Math. Ann.*, t. 33, 1889).
2. Forsyth (A.-R.). — Theory of differential equations, vol. IV (Cambridge Univ. Press, 1902).

II. — Fonctions de Lamé. Exposés généraux.

3. Todhunter (I.). — An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions (London, 1875).
4. Heine (H.-E.). — Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin, 1878).
5. Appell (P.). — Traité de Mécanique rationnelle, t. IV (Paris, 1921).
6. Poincaré (H.). — Figures d'équilibre d'une masse fluide (Paris, 1903).
7. Bierly. — An elementary treatise on Fourier series, and spherical, cylindrical and ellipsoidal harmonics (Boston, 1895).
8. Darwin (G.-H.). — Ellipsoidal harmonic analysis (*Scientific papers*, vol. III, Cambridge, 1910).
9. Wangerin (A.). — *Encyklop. Math. Wiss.*, II, A. 10 (Leipzig, 1904). Édition française par A. Lambert (*Encyclopédie*, II, 28).

III. — Propriétés des fonctions de Lamé.

10. Liouville (J.). — Lettres sur diverses questions... (*Journal de Liouville*, 1re série, t. 11, 1846).
11. Heine (E.). — Auszug eines Schreibens über die Lame'schen Funktionen an den Herausgeber (*Crelle*, t. 56, 1859, p. 79).
12. Heine (E.). — Einige Eigenschaften der Lame'schen Functionen (*Ibid.*, p. 87).
13. Guerritore. — Calcolo delle funzioni di Lame fino a quelle di grado 10 (*Giornale di Matematica*, 1909).
14. Schläfli. — Einige Bemerkungen über die Lame'schen Functionen (*Collectanea... in memoriam D. Chelini*; Milan, 1881).
15. Heun (K.). — Beiträge zur Theorie der Lame'schen Functionen (*Math. Ann.*, t. 33, 1889).
16. Heun (K.). — Die Kugelfunctionen und Lame'schen Functionen als Determinanten (*Dissert. Göttingen*, 1881).

17 Cohn (Fr.). — Ueber Lame'sche Functionen mit complexen Parametern (*Dissert. Königsberg*, 1888).

18. Häntzschel. — Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lameschen, Laplaceschen und Besselschen Funkt. (*Zeitsch. Math. Phys.*, 1886).

19. Whittaker (E.-T.). — On an integral equation whose solutions are the functions of Lamé (*Proceedings Royal Soc. Edinburgh*, 1914-1915).

20. Whittaker (E.-T.). — On Lamé's differential equation and ellipsoidal harmonics (*Proceedings London Math. Soc.*, vol. 14, 1914).

IV. — Fonctions de Lamé de seconde espèce.

21 Liouville (J.). — Sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique (*Journal de Liouville*, 1re série, t. 10, 1845).

22. Heine. — Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme (*Crelle*, t. 29, 1845).

23. Heine. — Mittheilung über Kettenbrüche (*Crelle*, t. 67, 1867).

24. Bigler (U.). — Einige Bemerkungen über die Lameschen Functionen zweiter Art (*Archiv. Math. Phys.*, t. 12, 1893).

25. Escary. — Sur quelques remarques relatives à l'équation de Lamé (*C. R. Acad. sc.*, t. 91, 1880).

26. Lindemann (F.). — Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lameschen Functionen (*Math. Ann.*, t. 19, 1882).

27. Liapounov. — Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes..., IIIe Partie (*Acad. des sc. de Saint-Pétersbourg*, 1912).

28. Humbert (Pierre). — Sur les surfaces de Poincaré (*J. Ec. Polyt.*, 2e série, t. 20, 1919).

V. — Solution générale de l'équation de Lamé.

29. Hermite (Ch.). — Sur l'équation de Lamé (*Œuvres*, t. III, p. 118).

30. Hermite (Ch.). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*Ibid.*, t. III, p. 266).

31. Hermite (Ch.). — Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé (*Ibid.*, t. IV, p. 8).

32. Halphen (G.-H.). — Sur les invariants des équations... (*Acta math.*, t. III, 1884).

33. Halphen (G.-H.). — Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, t. II, p. 462 (Paris, 1888).

34. Appell et Lacour. — Principes de la théorie des fonctions elliptiques (Paris, 1897).

35. Chittenden (J.-B.). — A presentation of the theory of Hermite's form of Lamé's equation... (*Dissert. Königsberg*, 1893).

36. Greenhill. — Lamé's differential equation (*Proc. London Math. soc.*, 1889).

37. BRIOSCHI (F.). — Sur l'équation de Lamé (*C. R. Acad. sc.*, t. 85, 1878).
38. BRIOSCHI (F.). — Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé (*Ibid.*, t. 92, 1881).
39. BRIOSCHI (F.). — Sur l'équation différentielle Lamé-Hermite (*Bull. Saint-Pétersbourg*, t. 35, 1893).
40. KLEIN (F.). — Ueber den Hermiteschen Fall der Lameschen Differentialgleichung (*Math. Ann.*, t. 40, 1892).
41. STENBERG (E.-A.). — Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé (*Acta math.*, t. 10, 1887).
42. HUMBERT (Georges). — Sur une formule de M. Hermite (*Bull. Soc. math. France*, t. 9, 1881).
43. LINDEMANN (F.). — On Lame's differential equation (*British Assoc. Report.*, 1883).
44. CRAWFORD (L.). — On the solution of Lamé's equation... (*Quarterly J.*, t. 27, 1894).
45. PALMSTRÖM (A.). — Sur l'équation de Lamé (Christiania, 1894).
46. ROCY y TORRERS. — Algunas consideraciones sobre la ecuazione de Lame (*Cronica cientifica*, Barcelona, 1878).

VI. — APPLICATIONS DES FONCTIONS DE LAMÉ.

A. — *Analyse harmonique.*

47. DARWIN (G.-H.). — On the integrals of the squares of ellipsoïdal surface harmonic functions (*Scientific Papers*, vol. III; Cambridge, 1910).
48. NIVEN (W.-D.). — On ellipsoïdal harmonics (*Philos. Trans.*, London, 182 A, 1891).
49. DIXON. — Expansions by means of Lamé's functions (*Proc. London Math. soc.*, t. 35).
50. HARGREAVES. — Ellipsoïdal harmonics, aelotropic and isotropic (*Phil. Magazine*, t. 12).

B. — *Distribution de la chaleur.*

51. LAMÉ (G.). — Mémoire sur les surfaces isothermes... (*Journ. Liouville*, 1re série, t. 2, 1837).
52. LAMÉ (G.). — Mémoire sur l'équilibre des températures... (*Ibid.*, 1re série, t. 4, 1839, p. 126 et 351).
53. LAMÉ (G.). — Mémoire sur les surfaces orthogonales... (*Ibid.*, 1re série, t. 8, 1843).
54. LAMÉ (G.). — Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes (Paris, 1857).

C. — *Figures d'équilibre d'un fluide tournant.*

55. POINCARÉ (H.). — Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (*Acta math.*, t. 7, 1885).

56. Poincaré (H.). — Sur la stabilité de l'équilibre... (*Phil. Trans.*, London, 198 A, 1902).
57. Darwin (G.-H.). — The pear-shaped Figure of equilibrium... (*Sc. Papers*, vol. III).
58. Liapounov. — Sur un problème de Tchebychev (*Mémoires de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, vol. 17, n° 3, 1906).
59. Bénès (Ladislav). — Ueber das Vorzeichen des Poincaréschen Ausdrückes... (*Astr. Nachr.*, t. 186, n° 4459, 1910).
60. Jeans (J.-H.). — Problems of cosmogony and stellar dynamics (Cambridge, 1919). (Bibliographie complète de la question dans P. Appell, *op. cit.*)

D. — *Problème de Roche.*

61. Roche (Édouard). — La figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné (*Acad. des sc. de Montpellier*, vol. I, 1847-1850).
62. Darwin (G.-H.). — On the figure and stability of a liquid satellite (*Sc. Papers*, vol. III).
63. Schwarzschild. — Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts (*Annalen der K. Sternwarte München*, Bd III, 1889).

E. — *Géométrie.*

64. Darboux (G.). — Sur la représentation sphérique des surfaces (*C. R. Acad. sc.*, t. 94, 1882, p. 1290).
64 *bis*. Darboux (G.). — Théorie des surfaces, *passim*.
65. Villat (H.). — Sur certaines équations différentielles du second ordre à coefficients doublement périodiques (*C. R. Acad. sc.*, t. 178, 1924, p. 604).

F. — *Mécanique.*

66. Hermite (Ch.). — Sur quelques applications des fonctions elliptiques (*Œuvres*, t. III).
67. Gyldén. — Sur une application nouvelle de l'équation de Lamé (*C. R. Acad. sc.*, t. 93, 1881).

VII. — Généralisations diverses des fonctions de Lamé.

A. — *Fonctions de Lamé dans le plan.*

68. Globa-Mikhailenko. — Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation (*J. Math. pures et appl.*, 7e série, t. II, 1916).
69. Humbert (P.). — Sur une figure cylindrique d'équilibre des fluides en rotation (*Bull. astr.*, t. 35, 1918).

B. — *Fonctions du cône elliptique.*

70. Hobson (E.). — The harmonic functions for the elliptic cone (*Proc. London Math. Soc.*, t. 23, 1891).

C. — *Fonctions de Lamé-Wangerin.*

71. Wangerin (A.). — Reduktion der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper (Leipzig, 1875).
71 *bis*. Wangerin (A.). — Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem.. (*Crelle*, t. 82, 1877).
72. Häntzschel (E.). — Studien über die Reduktion der Potentialgleichung... (Berlin, 1893).
73. Häntzschel. — Rotationscykliden und Lamésche Produkte (*Archiv. Math. Phys.*, t. IV).
74. Safford. — Surfaces of revolution in the theory of Lamé's products (*Bull. American Math. Soc.*, t. 5, 1899).

D. — *Fonctions à* n *singularités finies.*

75. Klein (F.). — Ueber Lamé'sche Funktionen (*Math. Ann.*, t. 18, 1881).
76. Klein (F.). — Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind (*Math. Ann.*, t. 18, 1881).
77. Klein (F.). — Zur Theorie der allgemeinen Lameschen Funktionen (*Nach. der Kgl. Gesellschaft der Wiss.*, Gœttingen, 1890).
78. Klein (F.). — Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd II (Berlin, 1922).
79. Klein (F.). — Vorlesungen über lineare Differential gleichungen der zweiten Ordnung (autographié) (Gœttingen, 1894).
80. Bôcher (M.). — Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie (Gœttingen gekrönte Preisschrift) (Leipzig, 1894).
81. Jacottet (Ch.). — Ueber die allgemeine Reihenentwickelung der Potentialfunction nach Lameschen Producten (*Dissert. Gœttingen*, 1895).
82. Häntzschel. — Ueber die Reduction des Gleichung $\Delta U = 0$ (*Dissert. Iena*, 1883).
83. Pick. — Ueber die Integration des Lamesche Differentialgleichung (Wien, 1896).
84. Hilb. — Beiträge zur Theorie der Lameschen Funktionen (*Dissert. München*, 1903).
85. Hilb. — Eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationtheorem (*Jahresbericht D. Math. Verein*, 1907).
86. Roth. — Ueber das Grundtheorem... (*Monatshefte Wien*, 1908).
87. Richardson. — Die notwendigen.. Oszillation (*Math. Ann.*, 1913).
88. Crawford. — A proof of Klein's Theorem in connection with Lamé's functions (*Quarterly J.*, t. 30).

E. — *Fonctions de Heine.*

89. Heine (E.). — Die Laméschen Functionen verschiedener Ordnung (*Crelle*, t. 60, 1862).
90. Heine (E.). — Ueber einige bestimmte Integrale (*Ibid.*, t. 61, 1863).
91. Stieltjes (T.-J.). — Sur certains polynomes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre, et sur la théorie des fonctions de Lamé (*Acta math.*, t. VI, 1884).
92. Johanson. — Laméske funktioner med gifvet antal nollställen (*Öfversigt af vetenskapakademiens förhandlingar*, Stockholm, 1900).

F. — *Équations plus générales.*

93. Hermite (Ch.). — *Œuvres*, t. IV, p. 18.
94. Brioschi (Fr.). — Sopra una classe di equazioni... (*Opere Matematiche*, t. II, p. 177).
95. Brioschi (Fr.). — Di una proprietà delle equazioni... (*Ibid.*, p. 199).
96. Brioschi (Fr.). — Sopra une classe... (*Ibid.*, p. 203).
97. Elliot (V.). — Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques (*Acta math.*, t. II, 1882).
98. De Sparre (M.). — Sur l'équation... (*Acta math.*, t. III, 1883).
99. Darboux (G.). — Sur une équation linéaire (*C. R. Acad. sc.*, t. 94, 1882).
100. Ince (E.-L.). — *Proceedings Edinburgh Math. Soc.*, t. 41, 1923-1924 (*voir* plus bas).
101. Whittaker (E.-T.). — *Proceedings Edinburgh Math. Soc.*, t. 33, 1914-1915 (*Id.*).
102. Markov (A.). — Sur les racines de certaines équations (*Math. Ann.*, t. 27, 1886).
103. Sochotzky. — Sur les intégrales définies et les fonctions dont on se sert pour les développements en séries (1873, en russe).

VIII. — Fonctions du cylindre elliptique. Travaux anciens.

104. Heine. — Kugelfunctionen (*cit. supra*).
105. Häntzschel. — Zur Theorie der Functionen des ellipt. cylinders (*Progr, Duisburg*, 1886).
106. Häntzschel. — Beitrag zur Theorie der Functionen des elliptischen und der Kreiscylinders (*Progr. Berlin*, 1889).
107. Pockels (Fr.). — Ueber die partielle Differentialgleichung... (Leipzig, 1891).
108. Särchinger. — Beitrag zur Theorie der Functionen des ellip. cyl. (*Progr. Chemnitz*, 1894).
109. Burkhardt. — Zu den Funct. des ellipt. Zyl.... (*D. Math. Verein*, Bd 15).
110. Butts. — The elliptic cylinder function of class K (*Amer. Journal*, 1908).
111. Lerch. — Functionen des elliptischen Zylinders (*D. Math. Verein*, 1906).

112. LERCH. — Le problème du cylindre elliptique (*C. R. Acad. sc.*, t. 142, 1906).
113. WIESMANN. — *Dissert. Zürich.*
114. DANNACHER. — Zur Theorie der Functionen des ellipt. cyl. (*Dissert. Frauenfeld*).
115. ABRAHAM (Max). — Ueber einige bei Schwingsproblem auftretende Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. 51).
116 BRILLOUIN. — Propagation de l'électricité, Cours du Collège de France 1901-1902 (Paris, 1904).

IX. — FONCTIONS DE MATHIEU. TRAVAUX RÉCENTS.

117. WHITTAKER and WATSON. — Modern Analysis, ch. 19 (Cambridge, 1920).
118. WHITTAKER (E.-T.). — On the partial differential-equations of mathematical physics (*Math. Ann.*, t. 57).
119. WHITTAKER (E.-T.). — On the functions associated with the elliptic-cylinder in harmonic analysis (*Intern. Congress of Math.*, Cambridge, 1912).
120. INCE (E.-L.). — A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions (*Proceed. Cambridge Phil. Soc.*, t. 21, 1922).
121. WATSON (G.). — The convergence of the series in Mathieu functions (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 33, 1914-1915).
122. BURGESS. — Determinants connected with the periodic solutions of Mathieu equation (*Ibid.*, t. 33, 1914-1915).
123. DOUGALL. — On the solutions of Mathieu differential equation of hyperbolic type (*Ibid.*, t. 41, 1922-1923).
124. MARSCHALL. — The asymptotic representation of the elliptic-cylinder functions (*Amer. Journal Math.*, t. 31, 1909).
125. MARSCHALL. — Determination of the arbitrary constants... (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 40, 1921-1922).
126. HILLE (Einar). — On the zeros of Mathieu functions (*Proc. London Math. Soc.*, t. 23, 1924).
126 *bis*. JEFFREYS (Harold). — On certain solutions of Mathieu's equation (*Proc. London Math. Soc.*, t. 23, 1923).
126 *ter*. JEFFREYS (Harold). — On the modified Mathieu's equation (*Ibid*, t. 23, 1923).

X. — SOLUTIONS PARTICULIÈRES ET SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE MATHIEU.

127. INCE (E.-L.). — Elliptic cylinder functions of the second kind (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 33, 1914-1915).
128. POOLE (E.-C.-G.). — On certain classes of Mathieu functions (*Proc. London Math. Soc.*, t. 20, 1921).
129. WHITTAKER (E.-T.). — On a general solution of Mathieu equation (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 32, 1913-1914).

130. YOUNG (A.-W.). — On the quasi-periodic solutions of Mathieu differential equation (*Ibid.*, t. 32, 1913-1914).
131. LINDEMANN (F.). — Differentialgleichung der Funct. des ellipt. Cylinders (*Math. Ann.*, t. 22, 1883).
132. STIELTJES (T.-J.). — Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle (*Astron. Nachr.*, t. 109, 1884).

XI. — GÉNÉRALISATIONS DES FONCTIONS DE MATHIEU.

A. — *Fonctions associées.*

133. INCE (E.-L.). — On the connexion between linear differential systems and integral equations (*Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, t. 42, 1922-1923).
134. INCE (E.-L.). — Associated Mathieu functions (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 41, 1922-1923).
135. HUMBERT (P.). — On Mathieu functions of higher order (*Ibid.*, t. 40, 1921-1922).

B. — *Équation de Hill.*

136. HILL. — On the part of the motion of the lunar perigee... (*Acta math.*, t. 8).
137. POINCARÉ (H.) — Sur les déterminants d'ordre infini (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1886).
138. POINCARÉ (H.). — Sur le problème des trois corps... (*Acta math.*, t. 13, 1890).
139. TISSERAND. — Traité de Mécanique céleste, t. III.
140. INCE (E.-L.). — On a general solution of Hill's equation (*Monthly Notices*, t. 75, 76, 77).
141. BRUNS. — Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie (*Astr. Nachr.*, t. 106, 107).
142. CALLANDREAU. — Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations (*Ibid.*, t. 107).
143. RIEHLMANN. — Ueber einen besonderen Fall der Differentialgleichung $x'' + x(q^2 + 2q_1 \cos 2t + 2q_2 \cos 4t) = 0$ (*Dissert. Zürich*, 1903).

C. — *Équation de Whittaker.*

144. WHITTAKER (E.-T.). — On a class of differential equations whose solutions satisfy integral equations (*Proceedings Edinburgh Math. Soc.*, t. 33, 1914-1915).
145. INCE (E.-L.). — A linear differential equation with periodic coefficients (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 23, 1923).

D. — *Fonctions de l'hypercylindre elliptique.*

146. HUMBERT (P.). — Sur le produit de Laplace relatif à certains hypercylindres (*C. R. Acad. sc.*, t. 174, 1922).

XII. — Applications des fonctions de Mathieu.

147. Mathieu (E.). — Sur le mouvement vibratoire d'une membrane (*Journal de Liouville*, 2e série, t. 13, 1888).

148. Maclaurin (R.). — On the solutions of the equation $(\nabla^2 + K^2)\psi = 0$ in elliptic co-ordinates, and their physical applications (*Transactions Cambridge Philos. Soc.*, t. 27, 1899).

149. Abraham (Max). — *Op. cit. supra.*

150. Poole (E.-C.-G.). — A point in the dynamical Theory of tides (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. 19).

151. Poole (E.-C.-G.). — Some notes on spheroidal wave-functions (*Quart. Journal*, t. 49).

152. Poole (E.-C.-G.). — A new integral equation satisfied by... (*Messenger Math.*, t. 49).

153. Rayleigh. — On maintained vibrations (*Phil. Magazine*, 5e série, t. 15, 1883).

154. Hamel. — Lineare Differentialgleichung mit periodischen Koefficienten (*Math. Ann.*, t. 73, 1913).

155. Carson (J.-R.). — Notes on the theory of modulation (*Proc. Institute of Radio Engineers*, New-York, 1922).

156 Jeffreys (Harold). — The free oscillations of water in an elliptic lake (*Proc. London Math. Soc.*, t. 23, 1923).

TABLE DES MATIÈRES

FONCTIONS DE MATHIEU.

SOLUTION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DE MATHIEU.

GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DE L'ÉQUATION DE MATHIEU.

APPLICATIONS DES FONCTIONS DE MATHIEU.