ÉLIE CARTAN

La géométrie des espaces de Riemann

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 9 (1925)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__9__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg

FASCICULE IX

La Géométrie des espaces de Riemann

Par Élie CARTAN
Professeur à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1925

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

LA

GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE RIEMANN

Par M. Élie CARTAN.

INTRODUCTION.

La théorie des espaces de Riemann, depuis l'apparition du Mémoire fondamental de Riemann : *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, a fait l'objet de travaux importants, notamment de E.-B. Christoffel, R. Lipschitz, F. Schur et A. Voss en Allemagne; G. Ricci en Italie. Depuis son utilisation en Physique mathématique par A. Einstein dans la théorie de la relativité géneralisée, elle a pris un nouveau développement, a suscité un peu partout des travaux nombreux et importants et a donné lieu à des généralisations de nature assez variée. Le point de départ de ce renouveau a été, en 1917, le Mémoire fondamental de T. Levi-Civita [34] qui, par sa notion de *parallélisme*, a permis peu à peu de dégager la géométrie des espaces de Riemann du caractère presque exclusivement formel qu'elle avait eu jusqu'alors. Les recherches de J.-A. Schouten [37] et E. Bompiani [41] montrèrent rapidement quelle lumière la conception nouvelle permettait de jeter sur la notion de courbure, considérée comme manifestant la non-intégrabilité du transport par parallélisme. T. Levi-Civita se plaçait, contrairement, peut-on dire, à Riemann, à un point de vue externe, nécessitant la considération d'un espace euclidien ambiant. H. Weyl [42] montra bientôt comment on pouvait se passer de ce détour; par sa généralisation de la notion d'espace métrique, il fut l'initiateur d'un mouvement singulièrement fécond, qui n'a peut-être pas encore atteint son complet développement. Aujourd'hui la géométrie des espaces de Riemann nous paraît jouer, au milieu des géométries nouvelles créées dans ces dernières années, le même rôle que la géométrie euclidienne classique au milieu des géométries à groupe fondamental (projective, affine, conforme, etc.) codifiées et classées par F. Klein dans le Programme d'Erlangen (*voir* E. Cartan [54]).

Ce n'est pas de ces géométries nouvelles que nous nous occuperons dans ce Fascicule. Nous laisserons même complètement de côté des chapitres entiers, et non des moins importants, de la géométrie des espaces de Riemann proprement dits, comme la théorie des congruences de courbes, celle des déplacements rigides, celle des transformations (isométriques, conformes, etc.) des espaces de Riemann. Nous laisserons également à l'arrière-plan les procédés de calcul (calcul différentiel absolu) qui ont été presque exclusivement employés jusqu'ici dans l'exposition de la théorie. Comme un espace de Riemann est, au fond, formé d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens, nous nous sommes surtout attaché à dégager, d'une part, les propriétés de l'espace euclidien qui subsistent dans les espaces de Riemann les plus généraux; d'autre part, les propriétés essentielles par lesquelles les espaces de Riemann se différencient de l'espace euclidien. Le principe de cette discrimination étant posé aussi nettement que possible, nous nous sommes abstenu de signaler les nombreux théorèmes de géométrie euclidienne multidimensionnelle susceptibles de généralisations dans les espaces de Riemann.

La méthode qui nous a paru la plus naturelle pour l'objet que nous avions en vue est non pas la méthode purement analytique et formelle de Christoffel, mais la méthode géométrique de Lamé [3], consistant à essayer de reconstituer, par l'usage d'un système de référence mobile, avec un élément linéaire arbitrairement donné, un espace euclidien admettant cet élément linéaire; quand cela n'est pas possible, on est conduit tout naturellement à la notion d'espace euclidien osculateur et par suite à celle de parallélisme: c'est en quelque sorte, pour arriver à cette dernière notion, l'envers de la méthode plus formelle des coordonnées géodésiques de H. Weyl.

Le Chapitre I est consacré à l'étude préliminaire indispensable des coordonnées curvilignes en géométrie euclidienne; le Chapitre II a pour but de montrer ce qui, dans un espace de Riemann, subsiste des propriétés de l'espace euclidien; les Chapitres III et IV étudient ce qui concerne la courbure riemannienne sous tous ses aspects principaux; les Chapitres V et VI constituent un exposé sommaire des notions fondamentales qui interviennent dans la théorie des variétés plongées dans un espace de Riemann; enfin le Chapitre VII introduit les notions récentes de degré de liberté et de groupe d'holonomie.

Nous espérons que le lecteur sera ainsi à même de mieux comprendre les exposés plus complets [**43**, **57**, **61**], ainsi que les plus récentes théories introduites en géométrie différentielle.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES CURVILIGNES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE.

I. — Vecteurs, multivecteurs, tenseurs.

1. Nous supposons connues les propriétés élémentaires des vecteurs dans un espace euclidien à un nombre quelconque n de dimensions. Rappelons simplement qu'on appelle *produit scalaire* de deux vecteurs le produit de leurs longueurs par le cosinus de leur angle. Un vecteur étant désigné par une lettre grasse telle que $\mathbf{e}$, le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$ sera désigné par la notation $\mathbf{ee}'$; la multiplication scalaire est une opération commutative et distributive.

Si l'espace est rapporté à un système de coordonnées rectangulaires, le produit scalaire de deux vecteurs de composantes (X^i) et (Y^i) est

$$X^1 Y^1 + X^2 Y^2 + \ldots + X^n Y^n.$$

Si au contraire l'espace est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes quelconque, l'expression du produit scalaire dépend de la forme quadratique

$$\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j$$

qui exprime le carré de la longueur d'un vecteur; le produit scalaire est la *forme polaire*

$$\sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j.$$

Les coefficients constants g_{ij} représentent eux-mêmes les produits scalaires des *vecteurs de coordonnées* pris deux à deux : ce sont les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf une qui est égale à 1, et l'on a

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Réciproquement, si l'on se donne arbitrairement une forme quadratique définie positive $\Sigma g_{ij} X^i X^j$, elle est susceptible de représenter le carré de la longueur d'un vecteur dans un système de coordonnées cartésiennes convenablement choisi.

2. On peut encore définir analytiquement un vecteur $\mathbf{e}$ par les n produits scalaires

$$X_i = \mathbf{e}\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{k=n} g_{ik} X^k \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

les X_i sont dits les composantes *covariantes* du vecteur, par opposition aux X^i, qui sont dites *contrevariantes*. On passe inversement des X_i aux X^i par les formules

$$X^i = \sum_{k=1}^{k=n} g^{ik} X_k \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où g^{ik} désigne le mineur relatif à l'élément g_{ik} du déterminant $|g_{ik}|$, ce mineur étant divisé par le déterminant lui-même, que nous appellerons g.

Le produit scalaire de deux vecteurs prend alors l'une des deux formes simples

$$\sum_{i=1}^{i=n} X^i Y_i = \sum_{i=1}^{i=n} X_i Y^i;$$

le cosinus de l'angle V de ces deux vecteurs est

$$\cos V = \frac{\Sigma X^i Y_i}{\sqrt{\Sigma X^i X_i} . \sqrt{\Sigma Y^i Y_i}}.$$

3. On appelle *multivecteur* l'ensemble de $p (\leqq n)$ vecteurs rangés dans un certain ordre, mais non parallèles à une même variété plane à $p - 1$ dimensions. Trois éléments sont essentiels dans un p-vecteur : la direction de la variété plane à p dimensions à laquelle sont paral-

lèles les vecteurs donnés, le volume (à p dimensions) du parallélépipède construit sur ces p vecteurs, enfin le sens, lequel se conserve par une permutation paire effectuée sur les vecteurs. Deux p-vecteurs sont dits égaux si ces trois éléments sont les mêmes.

On peut définir analytiquement un p-vecteur en écrivant le tableau à p lignes et n colonnes des composantes des vecteurs donnés rangés dans leur ordre. Les déterminants d'ordre p formés avec ce tableau sont les composantes (contrevariantes ou covariantes) du p-vecteur. En particulier, un *bivecteur* a $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes

$$X^{ij} = - X^{ji} \text{ (contrevariantes)} \qquad \text{ou} \qquad X_{ij} = - X_{ji} \text{ (covariantes)}.$$

Le carré du volume du parallélépipède construit sur les p vecteurs est

$$\sum_{(i_1 i_2 \ldots i_p)} X^{i_1 i_2 \ldots i_p} X_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

la somme étant étendue à toutes les *combinaisons* p à p des indices 1, 2, ..., n.

On peut désigner le multivecteur défini par les p vecteurs $\mathbf{e}$, $\mathbf{e}'$, ..., $\mathbf{e}^{(p-1)}$ au moyen de la notation $[\mathbf{e}\mathbf{e}' \ldots \mathbf{e}^{(p-1)}]$ (produit extérieur de Grassmann). En particulier, pour un bivecteur $[\mathbf{e}\mathbf{e}']$, si l'on a

$$\mathbf{e} = \Sigma X^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}' = \Sigma Y^i \mathbf{e}_i,$$

on obtient

$$[\mathbf{e}\mathbf{e}'] = \sum_{i,j} X^i Y^j [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] = \sum_{(ij)} (X^i Y^j - X^j Y^i)[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] = \sum_{(ij)} X^{ij} [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j],$$

la première somme étant étendue à tous les arrangements, les deux autres à toutes les combinaisons des indices 1, 2, ..., n.

Le cas particulier $p = n$ est à signaler : un n-vecteur n'a qu'une composante contrevariante $X^{12\ldots n}$ et une composante covariante $X_{12\ldots n}$ qui se déduit de la première en la multipliant par g. Pour le n-vecteur $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n]$, on a $X^{12\ldots n} = 1$, et le volume construit sur les n vecteurs de coordonnées est par suite égal à $\sqrt{g}$.

4. On appelle *multivecteur supplémentaire* d'un vecteur donné le $(n-p)$-vecteur défini par $n-p$ vecteurs tous perpendiculaires aux vecteurs du p-vecteur donné, ayant même mesure que ce p-vecteur,

et tel que le n-vecteur formé par les p vecteurs donnés et par les $n-p$ vecteurs du multivecteur supplémentaire ait le sens positif. Si le n-vecteur de coordonnées est positif, on passe des composantes du p-vecteur à celles du $(n-p)$-vecteur supplémentaire par les formules

$$Y_{j_1 j_2 \ldots j_{n-p}} = \sqrt{g}\, X^{i_1 i_2 \ldots i_p}, \qquad Y^{j_1 j_2 \ldots j_{n-p}} = \frac{1}{\sqrt{g}} X_{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

où l'on suppose que les n indices $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p}$ forment une permutation paire. En particulier, pour $n = 3$, $p = 2$, le vecteur $\mathbf{e}''$ supplémentaire du bivecteur $[\mathbf{e}\mathbf{e}']$ n'est autre que le produit vectoriel ordinaire des deux vecteurs $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$.

5. Les vecteurs, multivecteurs (et systèmes de multivecteurs) sont des cas particuliers des *tenseurs* (G. Ricci et T. Levi-Civita [**21**] et [**26**]). Dans son acception la plus générale, le mot de tenseur désigne un ensemble de quantités servant à représenter analytiquement un être géométrique (dont elles sont les *coordonnées* ou *composantes*) et qui, par un changement du système de référence, subissent une transformation, en général *linéaire*, dont les coefficients ne dépendent que des deux systèmes de référence et non des valeurs numériques particulières des composantes. On réserve plus particulièrement le nom de tenseur à un système de quantités susceptibles d'être désignées par une lettre affectée de plusieurs indices rangés dans un certain ordre, les uns supérieurs, les autres inférieurs, telle que $a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot}$, à la condition que la somme

$$\sum_{i,j,k} a^{i\cdot k}_{\cdot j \cdot} X_i Y^j Z_k,$$

où les X_i et les Z_k désignent les composantes covariantes de deux vecteurs arbitraires et les Y^j les composantes contrevariantes d'un troisième vecteur arbitraire, ait une valeur indépendante du choix du système de coordonnées (cartésiennes). Un tenseur à plusieurs indices peut toujours être indiqué par une notation où les indices sont tous supérieurs (composantes contrevariantes) ou tous inférieurs (composantes covariantes).

Une opération classique dans le calcul tensoriel permet de déduire d'un tenseur à plusieurs indices un tenseur à deux indices de moins;

elle repose sur la remarque que si la somme

$$\sum_{i,j} a^i_j X_i Y^j$$

a une valeur indépendante du système de référence, il en est de même de la quantité $\sum_i a^i_i$: c'est en effet la somme des racines de l'équation en λ qui exprime que les n formes linéaires en X_i, coefficients des Y^j dans l'expression invariante

$$\sum_{i,j} a^i_j X_i Y^j - \lambda \sum_j X_j Y^j,$$

sont linéairement dépendantes. D'une manière générale on pourra déduire d'un tenseur tel que a^{ijkl} de nouveaux tenseurs tels que $\sum_\rho a^{\rho ij}_\rho$ par exemple, dont certains du reste pourront être nuls. Chacun de ces nouveaux tenseurs pourra donner naissance à son tour à un tenseur scalaire.

L'opération précédente porte le nom de *contraction* ou de *saturation des indices*. Les tenseurs contractés d'un multivecteur sont tous nuls.

Les coefficients g_{ij} de la forme qui indique le carré de la longueur d'un vecteur forment eux-mêmes un tenseur, qui est dit le *tenseur fondamental*. Il est symétrique; ses composantes contrevariantes sont les quantités g^{ij} déjà signalées; ses composantes *mixtes* g^i_j sont égales à 1 si $i=j$, à 0 si $i \neq j$. Le tenseur contracté est égal à n.

6. Une application importante des notions précédentes est fournie par l'étude des rotations autour d'un point fixe, qu'on peut supposer pris pour origine des coordonnées. Dans un mouvement continu rigide, les composantes v^i de la vitesse d'un point de coordonnées x^i sont des fonctions linéaires des coordonnées

$$v^i = \sum_{k=1}^{k=n} a^i_k x^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la vitesse étant perpendiculaire au rayon vecteur issu de l'origine, on a

$$\sum_{i,j,k} g_{ij} a^i_k x^j x^k = 0,$$

d'où

$$\sum_i (g_{ij} a^i_k + g_{ik} a^i_j) = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Si donc on pose

$$\sum_i g_{ij} a^i_k = a_{kj},$$

les quantités $a_{ij} = -a_{ji}$ peuvent être regardées comme les composantes covariantes d'un système de bivecteurs, qui peut servir à représenter la rotation instantanée considérée. Les composantes contrevariantes sont

$$a^{ij} = \sum_k g^{ik} a^j_k,$$

et l'on a, pour la vitesse d'un point (x^i),

$$v^i = \sum_k a^{ki} x_k, \qquad v_i = \sum_k a_{ki} x^k.$$

Dans la rotation instantanée dont toutes les composantes contrevariantes sont nulles, sauf une a^{12} par exemple, les points situés dans le $(n-2)$-plan mené par l'origine perpendiculairement aux vecteurs de coordonnées $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ont une vitesse nulle; tout point tourne parallèlement au plan $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]$ avec une vitesse angulaire égale à l'aire du bivecteur $a^{12}[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]$ et dans le sens de ce bivecteur.

Si au contraire toutes les composantes covariantes sont nulles, sauf a_{12}, la rotation se fait autour du $(n-2)$-plan formé par les vecteurs de coordonnées autres que $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ avec une vitesse angulaire égale à $a_{12}\sqrt{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2}$. On peut dire que la quantité a_{12} définit dans le cas général la projection de la rotation sur le plan de coordonnées $[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]$.

On pourrait aussi représenter la rotation par le système de $(n-2)$-vecteurs supplémentaires du système de bivecteurs précédents. C'est du reste la représentation classique pour $n = 3$.

II. — Coordonnées curvilignes générales.

7. A tout système de coordonnées curvilignes $u^1, u^2, \ldots, u^n$ dans l'espace euclidien à n dimensions correspond une forme déterminée

de l'élément linéaire de cet espace

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, du^i\, du^j, \tag{1}$$

les coefficients g_{ij} étant certaines fonctions des variables $u^1, \ldots, u^n$.

Les deux problèmes fondamentaux qui se posent sont les suivants :

L'élément linéaire de l'espace euclidien étant supposé donné a priori, *passer, si c'est possible, des coordonnées curvilignes* (u^i) *d'un point à ses coordonnées par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes.*

Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions g_{ij} pour qu'elles soient susceptibles de représenter le ds^2 de l'espace euclidien.

Ces deux problèmes ont été résolus pour la première fois par G. Lamé [3], dans le cas où les coefficients des termes rectangles du ds^2 sont tous nuls.

8. Imaginons en chaque point M, de coordonnées curvilignes $u^1, \ldots, u^n$, de l'espace euclidien, un système de coordonnées cartésiennes (R) ayant ce point pour origine et tel que les coordonnées du point M′ infiniment voisin de M soient, par rapport à lui, $du^1, \ldots, du^n$. Les axes de coordonnées seront donc tangents aux *lignes coordonnées* et les produits scalaires des vecteurs de coordonnées $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ seront les quantités g_{ij}.

En passant du point M à un point M′ infiniment voisin, on passe du repère cartésien (R) attaché à M au repère cartésien (R′) attaché à M′, et l'on a, pour les variations infiniment petites $d\mathbf{e}_i$ subies par les vecteurs de coordonnées, des formules de la forme

$$d\mathbf{e}_i = \sum_{k,r} \Gamma^k_{ir}\, dx^r\, \mathbf{e}_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

formules auxquelles il faut ajouter

$$d\mathrm{M} = \sum_k du^k\, \mathbf{e}_k, \tag{3}$$

en désignant par dM le vecteur d'origine M et d'extrémité M′.

Les formules (2) et (3) définissent la situation respective des repères (R) et (R′). Elles sont équivalentes aux formules suivantes, qui indiquent les variations infiniment petites subies par les coordonnées cartésiennes (x^i) d'un point *fixe* de l'espace rapporté successivement aux repères (R) et (R′) :

$$dx^i + du^i + \sum_{k,r} \Gamma^i_{kr} x^k du^r = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Le problème proposé se décompose maintenant en deux :

1° Connaissant les g_{ij}, déterminer les coefficients Γ^k_{ir};

2° Connaissant les Γ^k_{ir}, déterminer les coordonnées rectangulaires du point M par rapport à des axes fixes.

9. On a immédiatement des équations entre les inconnus Γ^k_{ir} en partant des relations

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij};$$

elles donnent par différentiation un premier système de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations

$$\sum_k (g_{jk}\,{}^{k}_{ir} + g_{ik}\Gamma^k_{jr}) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \qquad (i, j, r = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Les conditions d'intégrabilité des équations (4) fournissent d'autres équations. Remarquons d'abord que les premiers membres des équations (4), que nous appellerons Dx^i, représentent les composantes du déplacement élémentaire *absolu* d'un point mobile dont les coordonnées, par rapport à (R), seraient x^i; de même les composantes de la variation géométrique absolue d'un vecteur X^i seraient

$$DX^i = dX^i + \sum_{k,r} \Gamma^i_{kr} X^k du^r.$$

Posons

$$D_r x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} + \varepsilon^i_r + \sum_k \Gamma^i_{kr} x^k \qquad (\varepsilon^i_r = 1, \text{ si } i = r;\ \varepsilon^i_r = 0, \text{ si } i \neq r),$$

$$D_r X^i = \frac{\partial X^i}{\partial u^r} + \sum_k \Gamma^i_{kr} X^k,$$

et formons, en tenant compte de ce que $D_r x^i$ est un vecteur, la combinaison

$$D_s D_r x^i - D_r D_s x^i = \Gamma^i_{rs} - \Gamma^i_{sr} + \sum_k x^k \left[\frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial u^r} + \sum_h (\Gamma^h_{kr}\Gamma^i_{hs} - \Gamma^h_{ks}\Gamma^i_{hr}) \right].$$

Le calcul qui vient d'être fait donne immédiatement les conditions d'intégrabilité

$$(6) \qquad \Gamma^i_{rs} - \Gamma^i_{sr} = 0 \qquad (i, r, s = 1, \ldots, n),$$

$$(7) \quad \frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial u^r} + \sum_h (\Gamma^h_{kr}\Gamma^i_{hs} - \Gamma^h_{ks}\Gamma^i_{hr}) = 0 \qquad (i, k, r, s = 1, \ldots, n).$$

Les $\frac{n^2(n-1)}{2}$ équations (6), jointes aux $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations (5), déterminent les coefficients cherchés Γ^h_{ij}; quant aux équations (7), elles fournissent des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions g_{ij} pour que le ds^2 donné puisse être regardé comme celui de l'espace euclidien.

La résolution des équations (5) et (6) se fait facilement en introduisant les quantités

$$\Gamma_{jir} = \sum_k g_{ik}\Gamma^k_{jr};$$

on obtient

$$(8) \qquad \Gamma_{ris} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{is}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial u^i}\right) = \begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix},$$

et l'on en déduit

$$(9) \qquad \Gamma^i_{rs} = \sum_k g^{ik}\Gamma_{rks} = \sum_k g^{ik}\begin{bmatrix} r\ s \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} r\ s \\ i \end{Bmatrix};$$

les quantités $\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} r\ s \\ i \end{Bmatrix}$ sont les *symboles de Christoffel* de première et de seconde espèce [5, p. 48 et 49].

Si l'on remplace dans les équations (7) les Γ^i_{sr} par les valeurs qui viennent d'être obtenues, elles fournissent un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfont nécessairement les coefficients d'un ds^2 euclidien. Elles sont dues à B. Riemann [2] et à Christoffel [5].

Ces conditions sont suffisantes. Si en effet elles sont vérifiées, les équations (4) sont complètement intégrables. Désignons par $(x^i)_0$ les valeurs initiales des fonctions inconnues x^i pour un système de valeurs numériques données $(u^i)_0$. La solution générale des équations (4) est de la forme

$$(x^i)_0 = a^i + \sum_k a^i_k x^k. \tag{10}$$

Imaginons dans l'espace euclidien à n dimensions un repère cartésien (R_0) dont les vecteurs de coordonnées aient deux à deux pour produits scalaires les quantités $(g_{ij})_0$. Si l'on regarde les $(x^i)_0$ comme les coordonnées d'un point rapporté à (R_0), les formules (10) peuvent être considérées comme définissant un changement de coordonnées, à chaque système de valeurs des u^i étant associé un repère (R). On démontre que les produits scalaires mutuels des vecteurs de coordonnées de (R) sont les g_{ij} correspondants; les coordonnées par rapport à (R_0) de l'origine mobile étant les a^i, on a identiquement

$$\Sigma (g_{ij})_0 \, da^i da^j = \Sigma \, g_{ij} \, du^i du^j,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le problème proposé est ainsi complètement résolu.

Il est très remarquable que la seule connaissance du ds^2 d'un espace euclidien en coordonnées curvilignes permette de déterminer complètement les Γ^i_{rs}, c'est-à-dire de localiser les uns par rapport aux autres les repères attachés aux différents points de l'espace; c'est au fond l'origine de ce que H. Weyl [42] appelle le théorème fondamental de la géométrie métrique. Il est important néanmoins de remarquer que les deux groupes d'équations (5) et (6) qui déterminent les inconnues sont d'origines bien différentes : les premières expriment que les différents repères ont la forme et la grandeur imposées par le ds^2 donné, les autres expriment des conditions d'intégrabilité.

10. Les repères cartésiens considérés dans les numéros précédents ne sont pas les seuls qu'on puisse utiliser dans un espace euclidien rapporté à des coordonnées curvilignes. On peut plus généralement attacher à chaque point M un repère cartésien arbitraire; dans ce cas les coordonnées d'un point M′ infiniment voisin de M seront des combinaisons linéaires des du^k, que nous appellerons

$$\omega^i(d) = \sum_r \Gamma^i_r du^r \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les formules (2) et (3) prennent maintenant la forme

$$(11)\qquad d\mathbf{e}_i = \sum_{r,k} \Gamma_{ir}^k du^r \mathbf{e}_k = \sum_k \omega_i^k(d)\mathbf{e}_k,$$

$$(12)\qquad d\mathrm{M} = \sum_k \omega^k(d)\mathbf{e}_k;$$

quant au déplacement élémentaire absolu d'un point (x^i), il devient

$$(13)\qquad \mathrm{D}x^i = dx^i + \omega^i(d) + \sum_k x^k \omega_k^i(d).$$

Pour former les conditions d'intégrabilité, imaginons deux symboles de différentiation d et δ échangeables entre eux, et désignons par D et Δ les symboles des déplacements absolus correspondants. On a

$$(14)\qquad \Delta \mathrm{D}x^i - \mathrm{D}\Delta x^i = \delta\omega^i(d) - d\omega^i(\delta) - \sum_k [\omega^k(\delta)\,\omega_k^i(d) - \omega^k(d)\,\omega_k^i(\delta)]$$
$$+ \sum_k x^k \left\{ \delta\omega_k^i(d) - d\omega_k^i(\delta) - \sum_h [\omega_k^h(\delta)\omega_h^i(d) - \omega_k^h(d)\omega_h^i(\delta)] \right\},$$

et par suite les conditions cherchées sont

$$(15)\qquad \delta\omega^i(d) - d\omega^i(\delta) = \sum_k [\omega^k(\delta)\,\omega_k^i(d) - \omega^k(d)\omega_k^i(\delta)];$$

$$(16)\qquad \delta\omega_k^i(d) - d\omega_k^i(\delta) = \sum_h [\omega_k^h(\delta)\,\omega_h^i(d) - \omega_k^h(d)\omega_h^i(\delta)].$$

Les premiers membres des équations (15) et (16) ne sont autres que les *covariants bilinéaires* des expressions ω^i, ω_k^i; en les désignant par un accent, ces équations peuvent être mises sous la forme symbolique condensée

$$(17)\qquad (\omega^i)' = \sum_k [\omega^k \omega_k^i],$$

$$(18)\qquad (\omega_k^i)' = \sum_h [\omega_k^h \omega_h^i].$$

Les coefficients Γ_{rs}^i s'obtiennent de la manière suivante. Posons

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,\omega^i \omega^j,$$

$$\omega_{ji} = \sum_k g_{ik}\,\omega_j^k;$$

les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions ω_{ij} sont données par les équations

$$(19) \qquad dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

$$(17) \qquad \sum_k [\omega^k \omega_k^i] = (\omega^i)',$$

qui les déterminent sans ambiguïté, et qui remplacent les équations (5) et (6). Les équations (18) donnent ensuite les conditions pour que le ds^2 donné soit euclidien.

En introduisant les quantités ω_{ij}, ainsi que les composantes covariantes ω_i du vecteur infiniment petit dM, les formules (17) et (18) prennent la forme

$$(20) \qquad (\omega_i)' = \sum_k [\omega_{ik}\omega^k] = \sum_k [\omega_i^k \omega_k],$$

$$(21) \qquad (\omega_{ij})' = \sum_k [\omega_{jk}\omega_i^k] = \sum_k [\omega_j^k \omega_{ik}].$$

11. Un cas particulièrement important est celui où le repère (R) attaché à chaque point est formé de n vecteurs unitaires rectangulaires; les équations (19) se réduisent alors à

$$\omega_{ij} + \omega_{ij} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Gamma_{ijr} + \Gamma_{jir} = 0.$$

Les $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ sont les composantes covariantes de la rotation infiniment petite qui amène le repère (R) à être parallèle au repère infiniment voisin (R′). La considération de repères de cette nature remonte au fond à G. Ricci [**24**, **31**], qui en a tiré un grand parti dans la théorie des espaces de Riemann. *Voir* aussi A. Carpanese [**39**], la Thèse de R. Lagrange [**49**] et les Mémoires de E. Cartan [**45**, **51**, **52**, **58**].

CHAPITRE II.

ESPACES DE RIEMANN; ESPACES EUCLIDIENS TANGENTS ET OSCULATEURS; PARALLÉLISME; GÉODÉSIQUES.

I. — Espace euclidien tangent et osculateur en un point.

12. On arrive à la notion d'espace de Riemann en considérant un continuum à n dimensions dans lequel on s'est donné une forme différentielle quadratique (que nous supposons, sauf avis contraire, définie positive),

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, du^i\, du^j; \tag{22}$$

cette forme est l'*élément linéaire* de l'espace de Riemann. Les conditions pour qu'un élément linéaire soit euclidien ne faisant intervenir (n° 9) que les dérivées secondes de ces coefficients g_{ij}, toutes les propriétés infinitésimales de l'espace euclidien qui ne font intervenir, en coordonnées curvilignes arbitraires, que les g_{ij} et leurs dérivées du premier ordre, s'étendront d'elles-mêmes aux espaces de Riemann les plus généraux. Encore est-il nécessaire de préciser ce point de vue. On y arrive par les notions d'espace euclidien tangent en un point, d'espace euclidien osculateur en un point, d'espace euclidien de raccordement le long d'une ligne.

13. Un espace euclidien tel qu'on ait établi une correspondance biunivoque (au moins dans une certaine région) entre les points de cet espace et les points d'un espace de Riemann donné sera dit *tangent* à cet espace de Riemann en un point $M(u^1, \dots, u^n)$ si les coefficients des éléments linéaires des deux espaces ont les mêmes valeurs numériques pour les coordonnées de M. Il existe évidemment une infinité d'espaces euclidiens tangents en M à l'espace donné et leur ensemble est indépendant du choix des coordonnées. Dans chacun d'eux la distance du point M à un point infiniment voisin M′ a la même valeur que dans l'espace de Riemann; il en est de même du cosinus de l'angle V de deux lignes issues de M :

$$\cos V = \frac{\Sigma g_{ij}\, du^i\, \delta u^j}{\sqrt{\Sigma g_{ij}\, du^i\, du^j}\,.\sqrt{\Sigma g_{ij}\, \delta u^i\, \delta u^j}};$$

cette expression sera prise comme *définition* dans l'espace de Riemann.

On pourra de même définir l'élément de volume

$$d\tau = \sqrt{g}\, du^1 du^2 \dots du^n$$

de l'espace de Riemann, et par suite le volume d'une région quelconque de cet espace; plus généralement le volume d'une portion de variété à p dimensions. Enfin on pourra attacher au point M de l'espace de Riemann des vecteurs, des bivecteurs, etc., issus de M, et les relations existant entre ces différents êtres géométriques seront les mêmes que dans un quelconque des espaces euclidiens tangents. On pourrait même attacher idéalement au point M un repère cartésien (R) et considérer des figures euclidiennes qui seraient définies analytiquement par rapport à (R) comme dans l'espace euclidien.

14. La notion d'espace euclidien *osculateur* en un point M fournit des généralisations beaucoup moins immédiates et auxquelles on n'est arrivé en fait qu'après de longs détours. Un espace euclidien sera osculateur en M si, pour les éléments linéaires de cet espace et de l'espace de Riemann, les g_{ij} ont les mêmes valeurs numériques au point M *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre*. On démontre facilement l'existence de ds^2 euclidiens osculateurs en prenant par exemple pour coefficients $\overline{g}_{ij}$ de ces ds^2 des polynomes du second degré par rapport aux coordonnées u^i. L'ensemble des espaces euclidiens osculateurs en M est indépendant du choix des coordonnées; d'autre part, pour un choix donné des coordonnées, les quantités Γ^i_{rs} (n° 8) ont pour tous ces espaces les mêmes valeurs en M; elles correspondent donc à des propriétés géométriques intrinsèques de l'espace de Riemann (*cf.* J.-A. Schouten [37]; H. Weyl [42]).

Ces quantités permettent en effet de comparer les directions de deux vecteurs (X^i) et ($X^i + dX^i$) attachés à deux points infiniment voisins M et M' de l'espace de Riemann; leur différence géométrique *absolue*, évaluée dans l'espace euclidien osculateur en M, a en effet pour composantes, par rapport au repère (R) attaché à M,

$$DX^i = dX^i + \sum_k X^k \Gamma^i_{kr} du^r; \tag{23}$$

on l'appelle la *différentielle covariante* (G. Ricci [19, 21]) du vecteur variable (X^i). Deux vecteurs d'origines infiniment voisines sont dits *parallèles* (ou plutôt *équipollents*), au sens de T. Levi-Civita [34], si leur différence géométrique covariante (ou absolue) est nulle. Le transport par équipollence de M à M' d'une figure formée de vecteurs d'origine M ne change évidemment pas les longueurs des vecteurs de la figure, ni les angles qu'ils font entre eux.

On a une image simple de l'espace euclidien osculateur dans le cas d'un espace de Riemann réalisé par une variété V_n à n dimensions plongée dans un espace euclidien $E_{n+\nu}$ à $n+\nu$ dimensions. Il suffit pour cela de considérer la représentation de V_n obtenue en projetant normalement ses points sur l'hyperplan à n dimensions tangent en M à V_n. Cet hyperplan, *avec la correspondance ponctuelle ainsi définie par projection normale*, est un espace euclidien osculateur en M : c'est au fond de ce point de vue que T. Levi-Civita [34] t parti pour définir sa notion de parallélisme.

15. On conçoit d'après ce qui précède la possibilité de définir la différentielle covariante d'un *tenseur* quelconque attaché à un point M d'un espace de Riemann. On pourrait même définir la vitesse covariante d'un point attaché suivant une loi arbitraire à l'espace euclidien tangent à M; les composantes contrevariantes de cette vitesse seraient

$$D_r x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} + \varepsilon_r^i + \sum_k x^k \Gamma_{kr}^i \qquad (\varepsilon_r^i = 1 \text{ si } i = r;\ \varepsilon_r^i = 0 \text{ si } i \neq r).$$

II. — Espace euclidien de raccordement. Géodésiques. Courbure des courbes.

16. L'existence, en un point quelconque M, d'un espace euclidien osculateur prouve la possibilité de raccorder entre eux les espaces euclidiens tangents en M et en un point infiniment voisin M', c'est-à-dire de localiser dans un même espace euclidien (d'une manière invariante) les repères (R) et (R') attachés aux deux points M et M'. Si l'on considère dans l'espace de Riemann une ligne quelconque AB, on pourra raccorder de proche en proche l'espace euclidien tangent en A (E. Cartan [51]). Pour faire analytiquement ce raccord, on imaginera exprimées les coordonnées d'un point M de la ligne en fonction d'un paramètre t et l'on intégrera le système d'équations différentielles ordinaires

$$(24) \qquad \frac{dx^i}{dt} + \frac{du^i}{dt} + \Sigma \Gamma_{kr}^i x^k \frac{du^r}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Si l'on désigne par $(x^i)_0$ les valeurs initiales des fonctions inconnues x^i pour la valeur t_0 du paramètre correspondant au point A, la solution générale des équations (24) se mettra sous la forme

$$(x^i)_0 = a^i(t) + \sum_k a^i_k x^k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

On imaginera dans un espace euclidien un repère (R_0) égal au repère attaché au point A et l'on regardera les $(x^i)_0$ comme les coordonnées par rapport à (R_0) d'un point de l'espace euclidien. Les formules (25) définissent un changement de coordonnées cartésiennes dépendant du paramètre t; on démontre que le repère $(\overline{R})$ correspondant à chaque valeur de t est égal au repère (R) attaché au point correspondant de la ligne AB et que la position respective de deux repères $(\overline{R})$ et $(\overline{R}')$ infiniment voisins est la même que celle des repères correspondants (R) et (R'). On a ainsi *développé* sur un espace euclidien auxiliaire, par exemple sur un des espaces euclidiens tangents en A, la ligne AB avec tous les repères (R) qui lui sont attachés.

Comme conséquence on pourra dire que deux vecteurs issus de A et de B sont équipollents, mais il est essentiel de remarquer que jusqu'à présent cette manière de parler n'a de sens que si l'on s'est donné le chemin AB suivi dans l'espace de Riemann pour aller de A en B.

17. Les considérations précédentes peuvent être complétées; on peut en effet montrer qu'il existe une infinité de ds^2 euclidiens tels que tout le long de la ligne AB, les coefficients de ces ds^2 aient, ainsi que toutes leurs dérivées partielles du premier ordre, les mêmes valeurs numériques que pour le ds^2 donné. Si par exemple, ce qui ne restreint pas la généralité, les variables $u^2, \ldots, u^n$ sont toutes nulles le long de la ligne, on pourra poser

$$v^i = a^i(u^1) + \sum_k^{2,\ldots,n} u^k a^i_k(u^1) + \sum_{j,k}^{2,\ldots,n} u^j u^k a^i_{jk}(u^1),$$

les $a^i_{jk}(u^1)$ étant des fonctions convenablement choisies; si l'on regarde les v^i comme les coordonnées d'un espace euclidien rapporté au repère (R_0), le ds^2 de cet espace,

$$ds^2 = \sum_{i,j} (g_{ij})_0 \, dv^i dv^j,$$

satisfait aux conditions énoncées. Nous dirons que cet espace est un *espace euclidien de raccordement* le long de la ligne AB (*cf.* Fermi [48]; T. Levi-Civita [55], p. 190). Il existe une infinité d'espaces euclidiens de raccordement, mais dans tous la ligne AB et les repères (R) qui lui sont attachés constituent toujours la même figure euclidienne.

On peut remarquer que si dans l'espace de Riemann on considère une ligne partant de A et aboutissant à B en s'écartant infiniment peu de la ligne considérée, il lui correspond dans l'espace euclidien de raccordement une ligne analogue dont la longueur n'est altérée qu'*aux infiniment petits près du second ordre*. Par suite, la variation première de la longueur de l'arc AB quand on passe de la ligne donnée à une ligne infiniment voisine sera en même temps nulle ou non nulle dans l'espace de Riemann et dans l'espace euclidien de raccordement.

18. On appelle précisément *géodésique* d'un espace de Riemann une ligne telle que la longueur de l'un quelconque de ses arcs ait une valeur stationnaire par rapport à toutes les lignes infiniment voisines de mêmes extrémités. Les géodésiques d'un espace de Riemann peuvent donc être caractérisées par la propriété de se développer suivant une droite dans l'espace euclidien tangent en un de leurs points, ou, ce qui revient au même, de posséder des tangentes restant de proche en proche parallèles entre elles. Il en résulte immédiatement les équations différentielles

$$(26) \qquad \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma^i_{kh} \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

qu'on pourrait aussi obtenir directement en appliquant les principes du calcul des variations à l'intégrale $\int ds$.

Ces équations sont tout simplement celles qu'on écrirait pour obtenir les droites d'un espace euclidien rapporté à des coordonnées curvilignes.

18 *bis*. La considération des géodésiques permet de donner du

transport par parallélisme une définition remarquable (E. Cartan [61], p. 228). On définit d'abord la symétrie par rapport à un point A comme une transformation ponctuelle faisant correspondre à tout point M suffisamment voisin de A le point M′ obtenu en construisant l'arc de géodésique MA et en le prolongeant d'un arc AM′ de même longueur. Cela posé, si M et M′ sont deux points infiniment voisins, le transport parallèle de M à M′ d'un vecteur d'origine M consiste à prendre son symétrique successivement par rapport à M et par rapport au milieu A de l'arc de géodésique MM′.

La symétrie par rapport à un point ne conserve pas en général les distances. Les espaces riemanniens pour lesquels cette symétrie est isométrique (*espaces riemanniens symétriques*) jouissent de propriétés remarquables qui touchent à la théorie des groupes de transformations finis et continus (E. Cartan [58], [62]). On trouvera plus loin (n° 37 *bis*) une autre propriété caractéristique de ces espaces.

19. Les notions euclidiennes de *courbure*, *torsion*, etc. d'une courbe s'étendent d'elles-mêmes aux espaces de Riemann, toute ligne d'un tel espace se développant suivant une ligne d'un espace euclidien. Par exemple, si $n=3$, on pourra attacher à tout point d'une ligne trois vecteurs unitaires rectangulaires $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, le premier étant tangent à la courbe, de telle sorte qu'on ait les formules classiques de Frenet

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}; \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}+\frac{1}{\tau}\mathbf{b}; \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\frac{1}{\tau}\mathbf{n}.$$

Dans ces formules la dérivation indiquée est naturellement la dérivation covariante. Les quantités $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ sont la courbure et la torsion de la courbe; on dit d'habitude : la courbure *géodésique* et la torsion *géodésique*. Une ligne géodésique est une ligne dont la courbure géodésique est partout nulle.

20. Les résultats obtenus dans les numéros précédents ne peuvent pas se généraliser quand on passe d'une *ligne* à une *surface*, parce qu'il est en général impossible de localiser en un seul et même espace euclidien les repères attachés aux différents points de la surface en conservant leurs formes, leurs grandeurs et les relations mutuelles qu'ils ont de proche en proche. Les équations différentielles (24) devraient ici être remplacées par des équations aux dérivées partielles, en général non complètement intégrables. Si, par hasard, pour une certaine surface, ces équations étaient complètement intégrables, on pourrait encore démontrer l'existence d'un espace euclidien de raccordement tout le long de la surface.

La difficulté qui se présente n'empêche pas néanmoins une généralisation *partielle* des propriétés des surfaces en géométrie euclidienne. Il suffit de remarquer que la première courbure d'une courbe passant par un point M de l'espace ne fait intervenir que les valeurs des g_{ij} et de leurs dérivées partielles *du premier ordre* en ce point, autrement dit n'exige la considération que de l'espace euclidien osculateur en M.

Cela posé, supposons un espace de Riemann à trois dimensions et une surface plongée dans cet espace. Les lois qui régissent la courbure en M des différentes courbes tracées sur cette surface sont les mêmes que dans l'espace osculateur en M. Par suite les notions de tangentes conjuguées, de tangentes principales, de tangentes asymptotiques, d'indicatrice, de courbures principales, d'ombilic, etc., ainsi que tous les théorèmes classiques de la théorie des surfaces (de Meusnier, d'Euler, etc.), s'étendent sans modification aux espaces de Riemann. La propriété des surfaces dont les tangentes asymptotiques sont rectangulaires de correspondre à un minimum de l'aire s'étend également, de sorte que l'équation différentielle des surfaces minima est exactement la même pour un espace de Riemann que pour un espace euclidien rapporté à des coordonnées curvilignes.

Au contraire les propriétés, même locales, d'une surface qui font intervenir les éléments du troisième ordre de cette surface ne subsistent plus sans modification.

Ce qui vient d'être dit pour les surfaces dans un espace à 3 dimensions s'étend naturellement aux variétés à p dimensions dans un espace à n dimensions (*voir* le Chapitre VI).

CHAPITRE III.

LE TENSEUR DE RIEMANN-CHRISTOFFEL ET LA COURBURE RIEMANNIENNE.

I. — Le tenseur de Riemann-Christoffel.

21. On arrive à la notion de *courbure riemannienne* d'un espace non euclidien en comparant les différentes localisations, dans l'espace euclidien tangent en un point A, du repère attaché à un autre point B, suivant le chemin qu'on suit pour aller de A en B (J.-A. Schouten [37]; E. Bompiani [41]; E. Cartan [51]). Bornons-nous au cas le plus simple où les coordonnées de B sont les mêmes que celles de A, sauf la $r^{\text{ième}}$ et la $s^{\text{ième}}$ qui sont respectivement augmentées de deux quantités très petites α et β. On aura un premier chemin en faisant d'abord varier la $r^{\text{ième}}$ coordonnée de α, puis la $s^{\text{ième}}$ de β; on en aura un second en faisant d'abord varier la $s^{\text{ième}}$ coordonnée de β, puis la $r^{\text{ième}}$ de α. Soient ACB et ADB ces deux chemins; le contour fermé ou *cycle* ACBD est une espèce de parallélogramme infiniment petit délimitant une *facette* à deux dimensions.

Soit maintenant un champ quelconque de vecteurs dont chacun est défini par ses composantes X^i par rapport au repère (R) attaché à son origine. Quand on suit le chemin ACB, on démontre que la partie principale de la variation géométrique covariante du vecteur du champ est

$$\alpha D_r(X^i) + \beta D_s(X^i) + \alpha\beta D_r D_s(X^i);$$

au contraire cette partie principale est, pour le chemin ADB,

$$\beta D_s(X^i) + \alpha D_r(X^i) + \alpha\beta D_s D_r(X^i);$$

la différence est

$$\alpha\beta[D_s D_r(X^i) - D_r D_s(X^i)] = \alpha\beta \sum_k R^i_{krs} X^k, \tag{27}$$

en posant

$$R^i_{krs} = \frac{\partial \Gamma^i_{kr}}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma^i_{ks}}{\partial u^r} + \sum_h (\Gamma^h_{kr}\Gamma^i_{hs} - \Gamma^h_{ks}\Gamma^i_{hr}). \tag{28}$$

L'ensemble des quantités R^i_{krs} constitue, comme on le verra bientôt, un tenseur, qu'on appelle le *tenseur de Riemann-Christoffel*.

On aurait pu considérer, au lieu d'un champ de vecteurs, un *champ de points* P, dont chacun serait situé dans l'espace euclidien tangent en un point de l'espace de Riemann. La différence des déplacements géométriques covariants du point P, suivant qu'on va de A en B par le chemin ACB ou par le chemin ADB, serait

$$\alpha\beta[D_s D_r(x^i) - D_r D_s(x^i)] = \alpha\beta \sum_k R^i_{krs} x^k. \tag{29}$$

22. Le vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante figure dans les seconds membres des équations (27) peut être envisagé comme la variation géométrique du vecteur (X^i) du champ considéré le long du contour fermé BCADB, ou, ce qui revient au même, ADBCA. On peut dire encore, à un autre point de vue, que c'est la variation géométrique subie par un vecteur (X^i) quand on le déplace par parallélisme le long du cycle ACBDA; il résulte par suite d'un certain déplacement rigide de l'espace euclidien tangent en A, à savoir celui qu'on obtient en le raccordant à lui-même par l'intermédiaire du cycle ADBCA. Le résultat obtenu [form. (29)] dans le cas analogue du champ de points montre que ce déplacement est une *rotation autour du point* A, que nous appellerons la *rotation associée au cycle* ACBDA. On peut vérifier qu'on a effectivement (n° 6)

$$\sum_i (g_{hi} R^i_{krs} + g_{ki} R^i_{hrs}) = 0.$$

Si l'on pose

$$(30)\qquad R_{hk,sr} = \sum_i g_{ki} R^i_{hsr},$$

le calcul donne

$$(31)\qquad \begin{aligned} R_{hk,sr} &= \frac{\partial \Gamma_{hks}}{\partial u^r} - \frac{\partial \Gamma_{hkr}}{\partial u^s} + \sum_i (\Gamma_{hir}\Gamma^i_{ks} - \Gamma_{his}\Gamma^i_{kr}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{hr}}{\partial u^k \partial u^s} - \frac{\partial^2 g_{hs}}{\partial u^k \partial u^r} - \frac{\partial^2 g_{kr}}{\partial u^h \partial u^s} + \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial u^h \partial u^r}\right) \\ &\quad + \sum_{i,j} g^{ij}(\Gamma_{hir}\Gamma_{kjs} - \Gamma_{his}\Gamma_{kjr}). \end{aligned}$$

Sous cette forme, on vérifie immédiatement que, les indices r et s étant donnés, les $R_{hk,sr}$ sont les composantes covariantes d'un système de bivecteurs, définissent par suite un déplacement infiniment petit rigide autour du point A. On a de plus les relations

$$R_{hk,sr} = -R_{kh,sr} = -R_{hk,rs} = R_{kh,rs} = R_{sr,hk};$$

enfin les expressions (28) de R^i_{ksr} montrent qu'on a

$$(32)\qquad R^i_{ksr} + R^i_{srk} + R^i_{rks} = 0$$

ou

$$(33)\qquad R_{ik,sr} + R_{is,rk} + R_{ir,ks} = 0.$$

Grâce à ces relations, on peut démontrer qu'il y a exactement $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ composantes $R_{hk,sr}$ distinctes.

23. Si l'on utilise, au lieu du repère cartésien (R) naturellement attaché à chaque point de l'espace de Riemann par le système de coordonnées curvilignes choisi, un autre repère arbitraire (n° 10), le tenseur de Riemann-Christoffel s'introduit d'une manière analogue. En conservant les notations du n° 10, les formules (17) subsistent, puisqu'elles servent à la détermination des coefficients Γ^k_{ir} des formes ω^j_i, mais les formules (18), vraies pour un espace euclidien, prennent la forme

$$(\omega^i_k)' = \sum_i [\omega^h_k \omega^i_h] + \Omega^i_k, \tag{34}$$

en posant

$$\Omega^i_k = \sum_{(rs)} R^i_{ksr} [\omega^r \omega^s]; \tag{35}$$

les formules (21) deviennent de même

$$(\omega_{ij})' = \sum_k [\omega_{jk} \omega^k_i] + \Omega_{ij} = \sum_k [\omega^k_j \omega_{ik}] + \Omega_{ij}, \tag{36}$$

en posant

$$\Omega_{ij} = \sum_{(rs)} R_{ij,sr} [\omega^r \omega^s]. \tag{37}$$

24. Si au lieu du parallélogramme infiniment petit considéré précédemment, on considère un parallélogramme infiniment petit quelconque ACBD dont les sommets ont respectivement pour coordonnées

$$(u^i), \quad (u^i + \alpha^i), \quad (u^i + \alpha^i + \beta^i), \quad (u^i + \beta^i),$$

il lui est associé une rotation infiniment petite représentée par le système de bivecteurs de composantes

$$a_{ij} = \sum_{r,s} R_{ij,rs} \alpha^r \beta^s.$$

Plus généralement à un cycle infiniment petit est associée une rotation représentée par un système de bivecteurs dont les composantes sont des éléments d'intégrales doubles étendues à une *facette* limitée par le cycle (J. Pérès [40]). Avec les notations du numéro précédent, ces composantes sont les quantités Ω_{ij}.

Si l'on considère deux vecteurs quelconques (γ^i) et (δ^i), le produit scalaire du vecteur (δ^i) par le déplacement infiniment petit du vecteur (γ^i) dans la rotation associée au parallélogramme construit sur les vecteurs (α^i) et (β^i) est

$$\sum_{i,j} a_{ij}\gamma^i\delta^j = \sum_{i,j,r,s} R_{ij,rs}\gamma^i\delta^j\alpha^r\beta^s;$$

le second membre peut être écrit sous la forme suivante, où l'on a pris quatre vecteurs infiniment petits représentés chacun par un symbole de différentiation d_1, d_2, d_3 et d_4 :

$$G = \sum_{i,j,r,s} R_{ij,rs}\, d_1 u^i\, d_2 u^j\, d_3 u^r\, d_4 u^s;$$

cette forme peut encore s'écrire

$$(38)\quad G = \sum_{(ij)(rs)} R_{ij,rs}(d_1 x^i\, d_2 x^j - d_1 x^j\, d_2 x^i)(d_3 x^r\, d_4 x^s - d_3 x^s\, d_4 x^r),$$

la somme du second membre étant maintenant étendue à toutes les combinaisons (ij), (rs) des indices 1, 2, ..., n. La signification invariante de cette forme, due à Riemann [1] et Christoffel [5] [*voir* aussi R. Lipschitz (6)], met bien en évidence le caractère tensoriel des quantités $R_{ij,rs}$.

On déduit de la forme G de Christoffel une nouvelle forme, signalée par Riemann [2], en identifiant d_3 avec d_1, d_4 avec d_2 :

$$(39)\qquad R = \sum_{(ij)(rs)} R_{ij,rs}(du^i\,\delta u^j - du^j\delta u^i)(du^r\,\delta u^s - du^s\,\delta u^r);$$

cette forme, quadratique par rapport aux composantes d'un bivecteur infiniment petit, détermine complètement les quantités $R_{ij,rs}$.

II. — Courbure riemannienne.

25. A un parallélogramme infiniment petit ACBD est associée une rotation qui peut se décomposer en plusieurs autres, l'une se faisant parallélement au plan du parallélogramme (supposé considéré dans l'espace euclidien tangent en A), les autres se faisant dans des plans perpendiculaires. Par la première rotation le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tourne d'un angle ε de manière à venir en $\overrightarrow{AC'}$: le produit scalaire $\overrightarrow{CC'}.\ \overrightarrow{AD}$, égal à $S\,\varepsilon$, où S désigne l'aire du parallélogramme, n'est autre que la forme R de Riemann (où les du^i et δu^i désignent les composantes de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$). Elle est donc égale au produit de l'aire du parallélogramme par l'angle de la rotation obtenue en projetant sur le plan de ce parallélogramme la rotation qui lui est associée.

On appelle *courbure riemannienne* de l'espace au point A, dans la direction de l'élément plan défini par les deux symboles d et δ, le rapport $\frac{\varepsilon}{S}$, c'est-à-dire $\frac{R}{S^2}$:

$$K = \frac{R}{S^2} = \frac{\sum\limits_{(ij)(rs)} R_{ij,rs}(du^i\,\delta u^j - du^j\,\delta u^i)(du^r\,\delta u^s - du^s\,\delta u^r)}{\sum\limits_{(ij)(rs)} (g_{ir}g_{js} - g_{is}g_{jr})(du^i\,\delta u^j - du^j\,\delta u^i)(du^r\,\delta u^s - du^s\,\delta u^r)}.$$

Elle ne dépend que de la direction de l'élément plan considéré.

L'espace euclidien est le seul dont la courbure riemannienne soit nulle en tout point et dans toute direction.

On peut plus généralement interpréter la forme G de Riemann-Christoffel (E. Bompiani [41]). Considérons deux parallélogrammes infiniment petits de sommet commun A, l'un défini par les deux directions d_1 et d_2, l'autre par les deux directions d_3 et d_4. Soient S_{12} et S_{34} les aires de ces deux parallélogrammes, ε_{34} l'angle de la projection sur le plan du premier parallélogramme de la rotation associée au second, et ε_{12} l'angle de la projection sur le plan du second parallélogramme de la rotation associée au premier. On a

$$G = \varepsilon_{12}S_{34} = \varepsilon_{34}S_{12}.$$

La valeur commune des deux rapports $\frac{\varepsilon_{12}}{S_{12}} = \frac{\varepsilon_{34}}{S_{34}}$ est, d'après E. Bompiani [50], la *courbure mixte* en A des deux directions d'éléments plans considérées; elle se réduit à la courbure riemannienne quand ces deux directions sont confondues.

III. — Coordonnées normales de Riemann.

26. Riemann [1] a indiqué un procédé permettant de pénétrer plus profondément dans la question; c'est au fond l'application d'une méthode fréquemment employée en Géométrie, consistant à utiliser un système de référence aussi simple que possible.

Imaginons en un point A de l'espace un repère (R_0) formé de n vecteurs unitaires rectangulaires. Soient $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ les cosinus directeurs de la tangente en A à une géodésique quelconque issue de A; Riemann prend pour coordonnées curvilignes d'un point quelconque M de cette géodésique les quantités

$$v^i = \alpha^i s,$$

s désignant l'arc de géodésique AM. Représentons l'espace de Riemann sur un espace euclidien, le point représentatif de M ayant pour coordonnées rectangulaires les quantités v^i. Dans cette représentation les géodésiques issues de A ont pour images des droites issues de l'origine et les longueurs de leurs arcs sont conservées. Il est évident que cette représentation définit un espace euclidien osculateur en A à l'espace donné; c'est l'espace euclidien osculateur *normal*.

Au voisinage du point A les composantes Γ^i_{rs} sont infiniment petites du premier ordre; on peut obtenir leurs parties principales connaissant le tenseur de Riemann-Christoffel en A. La condition que les lignes $\frac{v^1}{\alpha^1} = \ldots = \frac{v^n}{\alpha^n}$ soient des géodésiques donne d'abord, d'après les formules (26), l'identité

$$\sum_{r,s} v^r v^s \Gamma^i_{rs} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{r,s} v^r v^s \Gamma_{ris} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial \Gamma_{ris}}{\partial v^t} + \frac{\partial \Gamma_{sit}}{\partial v^r} + \frac{\partial \Gamma_{tir}}{\partial v^s} = 0. \tag{40}$$

On a ensuite

$$\frac{\partial \Gamma_{hkr}}{\partial v^s} - \frac{\partial \Gamma_{hks}}{\partial v^r} = R_{hk,rs};$$

on déduit de là

$$\Gamma_{jik} = \frac{1}{3} \sum_s (R_{ij,sk} + R_{ik,sj}) v^s$$

et

$$g_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{r,s}(R_{ir,js} + R_{jr,is}) v^r v^s \qquad (\varepsilon_{ij} = 1 \text{ si } i = j;\ \varepsilon_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j),$$

d'où enfin, en se bornant aux termes du second ordre dans les coefficients,

$$(41)\quad ds^2 = (dv^1)^2 + \ldots + (dv^n)^2 - \frac{1}{3}\sum_{(ij)(rs)} R_{ij,rs}(v^i dv^j - v^j dv^i)(v^r dv^s - v^s dv^r).$$

La somme indiquée dans le second membre n'est autre que la forme R de Riemann, calculée pour les deux vecteurs infiniment petits (v^i) et (dv^i).

Cette formule met en évidence la différence des mesures de longueurs faites au voisinage du point A, dans l'espace de Riemann et dans l'espace euclidien normal osculateur.

27. Considérons dans l'espace de Riemann un triangle géodésique infiniment petit APQ ayant un de ses sommets en A; il aura pour image dans l'espace euclidien normal en A un triangle mixtiligne A'P'Q' dont les côtés rectilignes A'P' et A'Q' sont respectivement égaux en longueur à AP et AQ et dont l'angle en A' est égal à l'angle $\widehat{PAQ}$. Quant au côté P'Q' il sera curviligne; le segment de droite P'C'Q' sera au contraire l'image d'un arc de courbe PCQ *non géodésique* de l'espace de Riemann. Or on peut démontrer facilement que dans un espace de Riemann la longueur s d'un arc de courbe très petit est donnée par la formule approchée

$$s = c - \frac{c^3}{24\rho^2},$$

c désignant la distance géodésique des extrémités (corde géodésique) et ρ le rayon de courbure de l'arc. Ici la courbure géodésique de l'arc PCQ (qui a pour image le segment de droite P'Q') est, comme le calcul le montre, de l'ordre de la hauteur h issue de A' dans le triangle rectiligne A'P'Q'; par suite, *avec une erreur relative de l'ordre du carré de l'aire du triangle*, la distance géodésique des points P et Q est égale à la longueur de l'arc PCQ qui a pour image le segment de droite P'Q'.

Si alors on désigne par a, b, c les côtés PQ, AP, AQ du triangle géodésique et si, ce qui ne restreint pas la généralité, on suppose les coordonnées $v^3, \ldots, v^n$ des points P et Q nulles, on a, d'après la formule (41),

$$a^2 = \overline{P'Q'}^2 - \frac{4}{3} R_{12,12}(AP'Q')^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} - \frac{2}{3} R_{12,12} S\, bc \sin \hat{A}$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\hat{A} - \frac{1}{3} R_{12,12} S\right),$$

en désignant par S l'aire du triangle géodésique, et en négligeant les termes en S^2. Or $R_{12,12}$ désigne ici la courbure riemannienne K en A dans la direction plane du triangle. Par suite *les angles du triangle euclidien rectiligne ayant les mêmes côtés que le triangle géodésique donné se déduisent des angles de ce dernier en retranchant de chacun d'eux le tiers du produit de l'aire du triangle par la courbure riemannienne de la direction plane du triangle.*

En particulier la courbure riemannienne dans la direction plane du triangle est égale au quotient $\frac{A + B + C - \pi}{S}$ de l'excès de la somme des angles du triangle sur π par l'aire du triangle. C'est un résultat classique dans la théorie des surfaces (G. Darboux [22], Livre VI, Chap. VI).

28. On peut déduire du théorème précédent une autre définition de la courbure fondée sur la considération, due à T. Levi-Civita [34], d'un *parallélogrammoïde :* c'est un quadrilatère ABB′A′ formé par quatre arcs de géodésiques, les deux arcs AA′ et BB′ ayant même longueur et la direction de l'arc BB′ au point B se déduisant par parallélisme de la direction de l'arc AA′ en A, quand on va de A à B par l'arc de géodésique AB; en particulier les angles en A et en B du quadrilatère sont supplémentaires. L'arc de géodésique AB′ n'est pas en général dans un même élément plan en A avec les arcs AB et AA′, mais en utilisant l'espace euclidien normal en A, on voit facilement que, *avec une erreur de l'ordre du carré du quadrilatère*, l'angle $\widehat{A'AB}$ est égal à la somme des angles $\widehat{A'AB'}$ et $\widehat{B'AB}$.

Le théorème relatif aux triangles géodésiques montre alors qu'au degré d'approximation considéré, il existe un quadrilatère plan euclidien ayant les mêmes côtés que le parallélogrammoïde, et dans ce quadrilatère on a

$$\widehat{AB'B} - \widehat{A'AB'} = \frac{KS}{2},$$

S étant l'aire du parallélogrammoïde. Un calcul élémentaire de trigonométrie rectiligne fournit alors la formule, due à T. Levi-Civita [34], p. 201; *cf.* F. Severi [35] :

$$K = \frac{\overline{AB}^2 - \overline{A'B'}^2}{S^2}.$$

29. Il existe d'autres expressions intéressantes de la courbure riemannienne (H. Vermeil [36]). Considérons le lieu des géodésiques issues de A et tangentes en A à un même élément plan : la surface ainsi engendrée est dite *géodésique en* A; elle a pour image dans l'espace euclidien normal un plan passant par A. On définirait de même des variétés à p dimensions *géodésiques en* A.

Portons, sur chacune des géodésiques considérées, à partir du point A, une longueur constante ρ. Le lieu de l'extrémité est une courbe analogue à un cercle et qui a pour image, dans l'espace euclidien normal, un vrai cercle de rayon ρ. On peut évaluer facilement, à l'aide de la formule (41), l'aire $\mathcal{A}$ limitée par cette courbe dans l'espace de Riemann; en la comparant à l'aire $\mathcal{A}'$ d'un cercle euclidien de rayon ρ, on trouve

$$\frac{K}{12} = \frac{\mathcal{A}' - \mathcal{A}}{\mathcal{A}'\rho^2}.$$

La comparaison des périmètres C et C' des deux courbes, dans l'espace de Riemann et dans l'espace euclidien, donne de même

$$\frac{K}{6} = \frac{C' - C}{C'\rho^2}.$$

Si l'on fait la même construction dans une variété à p dimensions géodésique en A, on obtient un volume à p dimensions qui a pour image, dans l'espace euclidien normal, une hypersphère. Si V et V' sont les nombres qui mesurent le volume de l'espace de Riemann et son image, on a, en supposant la variété définie par $v^{p+1} = \ldots v^n = 0$,

$$\frac{V' - V}{V'\rho^2} = \frac{1}{3(p+2)} \sum_{(ij)}^{1, \ldots, p} R_{ij,ij};$$

on en déduit facilement, en ce qui concerne les aires à $(p-1)$ dimensions qui limitent les volumes $\left(S = \frac{dV}{d\rho}\right)$,

$$\frac{S' - S}{S'\rho^2} = \frac{1}{3p} \sum_{(ij)}^{1, \ldots, p} R_{ij,ij}.$$

La somme $\Sigma R_{ij,ij}$, étendue à toutes les combinaisons deux à deux des indices $1, 2, \ldots, p$, peut être appelée la *courbure riemannienne* en A dans la direction de l'élément plan $dv^{p+1} = \ldots dv^n = 0$. En particulier si $p = n$, on obtient une quantité scalaire attachée au point A, *la courbure riemannienne totale en* A, *égale à* $\sum_{(ij)}^{1,\ldots,n} R_{ij,ij}$.

Les résultats précédents fournissent en même temps le théorème suivant : *Si dans un élément plan à p dimensions issu de* A *on considère p directions rectangulaires et les* $\frac{p(p-1)}{2}$ *directions planes que ces p directions déterminent deux à deux, la somme des courbures riemanniennes en* A *suivant ces* $\frac{p(p-1)}{2}$ *directions planes est indépendante des p directions rectangulaires choisies et représente la courbure riemannienne en* A *dans la direction de l'élément plan à p dimensions. C'est aussi la courbure riemannienne totale en* A *de la variété à p dimensions géodésique en* A *qui est tangente à cet élément.*

30. Les résultats qui précèdent ont été établis en partant d'un repère formé de n vecteurs unitaires rectangulaires issus de A. Dans le cas général signalons la forme $\sum_{ij} R_{ij}^{ij}$ que prend la courbure riemannienne totale. En la désignant par la lettre R, l'expression de la courbure riemannienne dans la direction de l'élément plan à $n-1$ dimensions perpendiculaire à la direction (du^i) est

$$(42)\qquad \frac{\sum_{i,j} (g_{ij} R - R_{ij})\, du^i\, du^j}{\sum_{i,j} g_{ij}\, du^i\, du^j},$$

en désignant par R_{ij} le tenseur contracté

$$R_{ij} = \sum_k R_{ijk}^{k}.$$

Le tenseur R_{ij}, ainsi que le tenseur $R_{ij} - g_{ij}R$, ont été considérés pour la première fois par G. Ricci [30]; le dernier joue, pour $n = 4$, un rôle important dans la théorie de la relativité. Nous désignerons sous le nom de *forme d'Einstein* la forme quadratique

$$\sum_{i,j} (R_{ij} - g_{ij} R)\, du^i\, du^j. \tag{43}$$

On appelle, d'après G. Ricci [30], *directions principales* en un point A de l'espace de Riemann les directions jouissant de la propriété que la courbure riemannienne dans la direction du $(n-1)$-plan perpendiculaire passe par un extremum. Il y en a en général n réelles et rectangulaires entre elles. Elles sont indéterminées s'il existe (au point A) un rapport constant entre les quantité R_{ij} et g_{ij}.

IV. — Décomposition du tenseur de Riemann-Christoffel.

31. Le tenseur de Ricci R_{ij} admet pour composantes des combinaisons linéaires (à coefficients fonctions des g_{ij}) des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel. On peut se proposer de chercher tous les systèmes de combinaisons linéaires de cette nature susceptibles de former un tenseur (au sens général de ce terme). Un tel système est dit, d'après E. Cartan [45], *irréductible* si, en désignant par r le nombre de ses composantes linéairement indépendantes, il est impossible de former, au moyen de $r' < r$ combinaisons linéaires de ses composantes, un nouveau tenseur. Le tenseur de Riemann-Christoffel est en général décomposable en trois tenseurs irréductibles (E. Cartan [52]) :

Le premier est scalaire, c'est la courbure riemannienne totale R;

Le second est à $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ composantes, c'est le tenseur

$$R_{ij} - \frac{1}{n} g_{ij} R \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

dont le tenseur contracté est nul;

Le troisième est à $\frac{(n-3)n(n+1)(n+2)}{12}$ composantes; il est engendré par la *forme génératrice*

$$\sum_{(ij)(rs)} (a^i b^j - b^i a^j)(a^r b^s - b^r a^s) R_{ij,rs},$$

où l'on suppose les paramètres a^i et b^i assujettis aux trois seules relations

$$\sum_i a_i a^i = 0, \qquad \sum_i a_i b^i = 0, \qquad \sum_i b_i b^i = 0.$$

Les espaces de Riemann pour lesquels ce dernier tenseur est identiquement nul sont caractérisés par la propriété que *la courbure mixte de deux facettes totalement normales entre elles* (c'est-à-dire telles que toute direction de l'une soit perpendiculaire à toute direction de l'autre) *est nulle*.

Si $n = 4$, ce troisième tenseur n'est plus irréductible; il se décompose en deux tenseurs irréductibles à cinq composantes, susceptibles d'une interprétation géométrique assez simple.

CHAPITRE IV.

IDENTITÉS DE BIANCHI. COURBURE VECTORIELLE. ESPACES A COURBURE CONSTANTE.

I. — Identités de Bianchi.

32. Il existe entre les dérivées covariantes des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel des identités dites de L. Bianchi [27], mais remontant en réalité à G. Ricci et même à A. Voss [15], p. 143, à savoir

$$(44)\quad D_\alpha R_{ij,\beta\gamma} + D_\beta R_{ij,\gamma\alpha} + D_\gamma R_{ij,\alpha\beta} = 0 \qquad (i, j, \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n);$$

elles peuvent encore s'écrire

$$(45)\qquad D_\alpha R_{i\beta\gamma}^{j} + D_\beta R_{i\gamma\alpha}^{j} + D_\gamma R_{i\gamma\alpha}^{j} = 0,$$

$$(46)\qquad D_\alpha R_{\beta\gamma}^{ij} + D_\beta R_{\gamma\alpha}^{ij} + D_\gamma R_{\alpha\beta}^{ij} = 0.$$

Ces identités se rattachent au fond à un théorème général dû à H. Poincaré et dont le cas le plus simple est classique : la divergence du tourbillon d'un champ de vecteurs est toujours nulle. En utilisant en chaque point de l'espace un repère arbitraire, elles peuvent s'écrire sous la forme (E. Cartan [51]),

$$\Omega'_{ij} + \sum_k \left([\Omega_{jk}\,\omega_i^k] - [\omega_j^k\,\Omega_{ik}] \right) = 0,$$

obtenue en dérivant extérieurement les équations (36).

On peut donner des identités de Bianchi une interprétation géométrique simple (E. Cartan [51], [61]). Considérons dans l'espace de Riemann un petit domaine à trois dimensions entourant un point A; à chaque élément de la surface (orientée) qui limite ce domaine est associée une rotation infiniment petite qu'on peut représenter par un système de bivecteurs : *la somme géométrique* (*covariante*) *de tous ces systèmes de bivecteurs est nulle*. En appelant somme géométrique de plusieurs rotations infiniment petites la rotation qui donne comme déplacement d'un point quelconque la somme géométrique des déplacements dus aux rotations composantes, on peut dire que *la somme géométrique covariante des rotations associées aux éléments de surface de la frontière d'un domaine à trois dimensions infiniment petit quelconque est nulle.*

II. — **Courbure p-vectorielle.**

33. Le système de bivecteurs qui représente la rotation associée à une *facette* infiniment petite de l'espace peut être regardé comme définisant la *courbure riemannienne bivectorielle* de cette facette.

La courbure riemannienne (scalaire) dans la direction de la facette, qui a été définie au chapitre précédent (n° **25**), est au fond le produit scalaire de la courbure bivectorielle par le bivecteur porté par la facette et de grandeur égale à l'aire de la facette, ce produit étant divisé par le carré de l'aire.

Dans la représentation précédente les bivecteurs considérés sont *libres*. On pourrait utiliser des bivecteurs *glissants*, deux bivecteurs glissants n'étant regardés comme égaux que s'ils sont dans le même plan; un bivecteur glissant a, en plus des $\frac{n(n-1)}{2}$ coordonnées d'un bivecteur libre, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ autres coordonnées, qui sont les déterminants d'ordre 3 formés avec les coordonnées d'un point quelconque du plan du bivecteur et les composantes des deux vecteurs qui définissent le bivecteur. Il peut se faire que la somme géométrique des bivecteurs *libres* qui composent un système de bivecteurs *glissants* soit nulle sans que toutes les cordonnées soient nulles; le système est alors équivalent à un système de *trivecteurs libres*.

On peut naturellement généraliser ces considérations aux systèmes de p-vecteurs (E. Cartan [51]).

Cela posé si, dans l'interprétation géométrique des identités de

Bianchi, on remplace les bivecteurs libres qui représentent la rotation associée à un élément de surface entourant un point P de la frontière d'un domaine très petit à trois dimensions par des bivecteurs glissants ayant pour origine le point P, la somme géométrique de tous ces bivecteurs glissants n'est plus nulle, mais égale à un système de trivecteurs *libres* qui peut, par convention, représenter la *courbure trivectorielle libre* du domaine très petit à trois dimensions considéré. La composante a^{ijk} de cette courbure est donnée par l'élément d'intégrale triple

$$\sum_{(rs)}(R_{rs}^{ij}\,du^k\,du^r\,du^s + R_{rs}^{jk}\,du^i\,du^r\,du^s + R_{rs}^{ki}\,du^j\,du^r\,du^s).$$

Les identités de Bianchi montrent que si l'on considère un domaine très petit à quatre dimensions et les courbures trivectorielles libres des éléments à trois dimensions de sa frontière, la somme géométrique de ces courbures est nulle. Au contraire la somme géométrique des courbures trivectorielles glissantes (ou appliquées) est égale à un système de quadrivecteurs, la courbure quadrivectorielle du domaine considéré; la composante a^{ijkh} de cette courbure est l'élément d'intégrale quadruple

$$\sum_{(rs)}(R_{rs}^{ij}\,du^k\,du^h\,du^r\,du^s + R_{rs}^{ik}\,du^h\,du^j\,du^r\,du^s + R_{rs}^{ih}\,du^j\,du^k\,du^r\,du^s$$
$$+ R_{rs}^{kh}\,du^i\,du^j\,du^r\,du^s + R_{rs}^{hj}\,du^i\,du^k\,du^r\,du^s + R_{rs}^{jk}\,du^i\,du^h\,du^r\,du^s).$$

On peut contiuuer ainsi de proche en proche. On arrivera en dernier lieu à la courbure n-vectorielle d'un élément de volume à n dimensions de l'espace de Riemann; sa composante contrevariante sera

$$R\,du^1\,du^2\ldots du^n:$$

ce sera donc le n-vecteur

$$R\,du^1\,du^2\ldots du^n[\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\ldots\mathbf{e}_n],$$

dont la mesure est le produit de R par le nombre qui mesure l'élément de volume considéré : nous retrouvons la *densité de courbure* R qu'on appelle la courbure riemannienne totale.

D'une manière générale *la courbure p-vectorielle d'un domaine très petit à p dimensions donne, projetée sur le p-plan de ce domaine et divisée par le nombre qui mesure ce domaine, la cour-*

bure riemannienne dans la direction du p-plan qui contient le domaine.

34. Si l'on remplace le système de p-vecteurs qui représente la courbure p-vectorielle d'un domaine élémentaire à p dimensions par le système de $(n-p)$-vecteurs supplémentaire, on a des théorèmes analogues aux précédents. Il y a cependant une différence essentielle. *La somme géométrique des courbures $(n-p)$-vectorielles, libres ou appliquées, des éléments à p dimensions de la frontière d'un domaine infiniment petit à $p+1$ dimensions est toujours nulle* (E. Cartan [51], [61]).

Dans le cas $n=3$, $p=2$, ce théorème prend une forme curieuse. Si l'on considère un petit volume d'un espace de Riemann à trois dimensions, la courbure vectorielle appliquée d'un élément de la surface limitant le volume est représentée par un vecteur ayant pour origine un point intérieur à cet élément et de l'ordre de cet élément.

Le système formé de tous ces vecteurs, regardés comme des vecteurs glissants, est géométriquement nul. Tout se passe comme si l'on avait affaire à un fluide en équilibre sous l'action de ses seules forces élastiques intérieures, la force élastisque qui s'exerce sur un élément de surface du fluide étant le vecteur (appliqué) qui représente la courbure vectorielle de cet élément.

Dans le cas $n=4$, $p=3$, le théorème général devient, dans la théorie de la relativité généralisée, le théorème de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie.

D'une manière générale la courbure simplement vectorielle d'un élément à $n-1$ dimensions a pour composantes

$$K_i = -\sum_k (R_{ik} - g_{ik}R)\alpha^k,$$

en appelant α^i les composantes du vecteur supplémentaire de l'élément donné, considéré comme un $(n-1)$-vecteur. Le vecteur courbure est donc perpendiculaire à l'hyperplan conjugué de la direction normale à l'élément par rapport à l'hypercône obtenu en annulant la forme d'Einstein [form. (43)]

$$\sum_{i,k} (R_{ik} - g_{ik}R)\alpha^i\alpha^k = 0.$$

La direction du vecteur courbure est *principale*, si ce vecteur est normal à l'élément à $n-1$ dimensions donné.

III. — Les espaces à courbure localement constante.

35. Riemann [1] a le premier attiré l'attention sur les espaces jouissant de la propriété qu'en chacun de leurs points la courbure riemannienne est la même dans toutes les directions planes. Cette propriété est équivalente à la suivante : la courbure bivectorielle d'une facette est toujours représentée par un bivecteur situé dans le plan de la facette ; analytiquement on doit avoir

$$R_{ij}^{ij} = K, \qquad R_{ik}^{ij} = R_{kh}^{ij} = 0 \qquad (i, j, k, h \text{ distincts}).$$

Les identités de Bianchi donnent immédiatement le théorème remarquable suivant énoncé et démontré pour la première fois, mais d'une autre manière, par F. Schur [18], p. 563 :

Si la courbure d'un espace de Riemann à $n > 2$ dimensions est en chaque point localement constante, elle est la même en tous les points de l'espace.

On a en effet, d'après (46),

$$D_k K = D_k R_{ij}^{ij} + D_i R_{jk}^{ij} + D_j R_{ki}^{ij} = 0.$$

36. Si la courbure riemannienne dans la direction d'un p-plan ($p \leq n-1$) est, en chaque point de l'espace, indépendante de cette direction, la courbure p-vectorielle d'un élément à p dimensions est représentée par un p-vecteur situé dans le p-plan de l'élément, et réciproquement. Si p est inférieur à $n-1$, les conditions pour qu'il en soit ainsi sont les mêmes que pour $p=2$; si $n>2$, l'espace est donc à courbure absolument constante.

Si au contraire $p = n-1$, la condition est que les directions principales de l'espace soient en chaque point indéterminées, la forme différentielle quadratique de Ricci étant en chaque point proportionnelle au ds^2 de l'espace. L'espace est alors analogue à un fluide *parfait* en équilibre sous l'action de ses seules forces élastiques, la pression sur chaque élément à $n-1$ dimensions étant *normale* à cet élément. On démontre facilement que cela n'est possible que si cette pression est absolument constante. On a donc le théorème de Schur généralisé (G. Herglotz [32], pour $n=4$) :

Si en chaque point de l'espace la courbure est la même dans toutes les directions à $n-1$ dimensions, cette courbure est la même en tous les points. Mais cela n'exige pas que la courbure soit constante dans toutes les directions à $p < n-1$ dimensions.

En définitive, pour $n \geqq 4$, il y a deux sortes d'espaces à courbure constante : les espaces à courbure constante de Riemann pour lesquels la courbure est la même en tous les points dans toutes les directions de p-plans ($p = 2, 3, \ldots, n-1$); puis les espaces pour lesquels la courbure est la même en tous les points, mais seulement dans toutes les directions de $(n-1)$-plans. Dans les deux cas la courbure riemannienne totale est constante.

37. Les espaces à courbure constante de Riemann sont liés étroitement à la géométrie non euclidienne. Pour une valeur donnée K de la courbure, leur ds^2 peut toujours être ramené à la même forme, à savoir

$$(47) \qquad ds^2 = \frac{du_1^2 + \ldots + du_n^2 + \mathrm{K}[(u_1 du_2 - u_2 du_1)^2 + \ldots]}{[1 + \mathrm{K}(u_1^2 + \ldots + u_n^2)]^2};$$

c'est la forme à laquelle on arrive avec l'interprétation cayleyenne de la géométrie non euclidienne, la quadrique absolue ayant pour équation (en coordonnées projectives non homogènes)

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 + \frac{1}{\mathrm{K}} = 0.$$

Les géodésiques de l'espace sont représentées par des équations linéaires en $u_1, \ldots, u_n$.

En posant

$$u_i = \frac{v_i}{1 - \frac{\mathrm{K}}{4}(v_1^2 + \ldots + v_n^2)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

on trouve la forme indiquée par Riemann lui-même

$$(48) \qquad ds^2 = \frac{dv_1^2 + \ldots + dv_n^2}{\left[1 + \frac{\mathrm{K}}{4}(v_1^2 + \ldots + v_n^2)\right]^2}.$$

Si l'on représente l'espace de Riemann sur l'espace euclidien de coordonnées rectangulaires $v_1, \ldots, v_n$, les géodésiques ont pour images les circonférences orthogonales à l'hypersphère ayant pour centre l'origine et pour rayon $\frac{2}{\sqrt{-K}}$.

E. Beltrami [4] a indiqué plusieurs autres formes remarquables; signalons en particulier la suivante, où interviennent les coordonnées normales de Riemann,

$$(49) \qquad ds^2 = \sum_i du_i^2 - \frac{1}{\rho^2}\left[1 - \frac{\sin^2(\rho\sqrt{K})}{K\rho^2}\right]\sum_{(ij)}(u_i\,du_j - u_j\,du_i)^2,$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = u_1^2 + \ldots + u_n^2.$$

On passe de la forme (48) de Riemann à la forme (49) de Beltrami en posant

$$v_i = u_i \frac{\operatorname{tang} \rho \frac{\sqrt{K}}{2}}{\frac{\rho\sqrt{K}}{2}}.$$

37 *bis*. Les espaces riemanniens symétriques (n° 18 *bis*) constituent la généralisation des espaces à courbure constante. Ils peuvent en effet être caractérisés par la propriété que le tenseur à cinq indices dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel est nul, ou encore que la courbure riemannienne d'une facette se conserve par le transport parallèle.

CHAPITRE V.

LES VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES.

38. Une variété V_p à p dimensions plongée dans un espace de Riemann donné est dite (n° 29) géodésique en un de ses points A si elle est engendrée par les géodésiques issues de A tangentiellement à un même élément plan à p dimensions. Elle est dite *totalement géodésique* si elle est géodésique en chacun de ses points, ou encore si toute géodésique qui lui est tangente y est contenue tout entière, ou enfin si toute géodésique qui y a deux de ses points (supposés suffi-

samment voisins) y est contenue tout entière. Cette notion est due à J. Hadamard [25].

Dans l'espace euclidien les variétés totalement géodésiques sont les variétés planes. Elles peuvent être caractérisées par la propriété que *tout vecteur ayant son origine dans la variété et tangent à la variété lui reste tangent quand on le déplace par parallélisme, son origine décrivant un chemin quelconque dans la variété* (*cf.* E. Bompiani [50], § 3).

Cette propriété caractéristique des variétés totalement géodésiques s'étend à un espace de Riemann quelconque. La vraie raison est au fond que les équations différentielles des géodésiques [form. (16)] ne dépendent que des dérivées premières des g_{ij}. Mais on peut vérifier la propriété directement. Dire en effet qu'une variété V_p, qu'on peut supposer définie par les équations

$$u^{p+1} = \ldots = u^n = 0,$$

est totalement géodésique, c'est dire que les équations (26), où l'on annule u^{p+1}, ..., u^n, admettent une solution compatible avec des valeurs initiales arbitraires des p autres coordonnées et de leurs dérivées premières; cela donne

$$\Gamma_{kh}^{p+i} = 0 \qquad (k, h = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n-p),$$

ce qui exprime bien que tout vecteur tangent à V_p reste tangent à V_p quand on le déplace par parallélisme, son origine restant sur V_p.

On peut remplacer la condition précédente par la suivante, qui lui est manifestement équivalente :

Pour qu'une variété V_p soit totalement géodésique, il faut et il suffit que tout vecteur normal à la variété lui reste normal quand on le déplace par parallélisme, son origine décrivant un chemin quelconque tracé dans la variété.

Si l'on considére une ligne quelconque tracée dans une variété V_p totalement géodésique, et qu'on en fasse la représentation dans l'espace euclidien de raccordement le long de la ligne, la ligne obtenue est située dans une variété *plane* à p dimensions : cela tient à ce que les dérivées covariantes successives du vecteur unitaire tangent à la courbe en un de ses points A sont toutes contenues dans le

p-plan tangent à V_p en A; la courbe ne peut donc avoir plus de p courbures. La réciproque de ce théorème est vraie.

Les propriétés précédentes montrent bien l'analogie qui existe entre les variétés totalement géodésiques et les variétés planes d'un espace euclidien.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que tout vecteur tangent à une variété V_p totalement géodésique lui reste tangent dans la rotation infiniment petite associée à un petit cycle quelconque tracé dans V_p; autrement dit, *la courbure bivectorielle de tout élément de surface de V_p est représentable par un système de bivecteurs tous tangents ou totalement normaux* à V_p. Il en sera de même par suite de la courbure q-vectorielle de tout élément à $q \leqq p$ dimensions de V_p, qui sera représentable par un système de q-vecteurs tous tangents ou totalement normaux à V_p. En particulier, la courbure p-vectorielle d'un élément de V_p sera représentable par un p-vecteur situé dans cet élément et des p-vecteurs totalement normaux à V_p; ces derniers n'existeront du reste que si $n - p \geqq p$.

Le cas $p = n - 1$ conduit à un résultat remarquable. La courbure $(n-1)$-vectorielle d'un élément de V_{n-1} doit être tangente à V_{n-1}; par suite sa courbure simplement vectorielle lui est normale; donc (n° 34) *la direction normale à V_n est une des directions principales de Ricci* (*cf.* G. Ricci [30]). Si donc un espace de Riemann admet en chaque point n directions principales *distinctes*, il ne peut exister dans cet espace qu'un certain nombre de familles à *un* paramètre de V_n totalement géodésiques.

39. On peut se proposer de chercher si toutes les variétés V_p géodésiques en un point donné A sont totalement géodésiques; il est nécessaire pour cela que tout vecteur tangent à une facette quelconque de l'espace lui reste tangent dans la rotation associée à cette facette, et par suite en particulier que la courbure mixte de deux facettes rectangulaires ayant une direction commune soit nulle. Cela se traduit par l'identité

$$\sum_{(ij)(rs)} R_{ij,rs}(\alpha^i\beta^j - \alpha^j\beta^i)(\alpha^r\gamma^s - \alpha^s\gamma^r)$$
$$= \lambda \sum_{(ij)(rs)} (g_{ir}g_{js} - g_{is}g_{jr})(\alpha^i\beta^j - \alpha^j\beta^i)(\alpha^r\gamma^s - \alpha^s\gamma^r),$$

λ désignant un coefficient indépendant des α^i, β^i, γ^i. Il en résulte, en remplaçant γ^i par β^i, que la courbure riemannienne dans la direction d'un élément plan est localement constante. Par suite, *l'espace est à courbure totale constante* (au sens de Riemann). La réciproque est évidente. Nous avons donc là une nouvelle propriété caractéristique des espaces à courbure constante.

F. Schur a démontré [18] que s'il existe dans l'espace deux points particuliers A et B (suffisamment rapprochés) jouissant de la propriété que toute surface V_2 géodésique, soit en A, soit en B, est totalement géodésique, tous les points de l'espace jouissent de la même propriété. La démonstration de F. Schur peut être simplifiée et présentée sous une forme purement géométrique (E. Cartan [61], Chap. V). Elle a ceci de remarquable qu'*elle s'appuie uniquement sur la propriété des lignes géodésiques d'être définies par un système d'équations différentielles du second ordre.*

40. G. Ricci a démontré [29] que les trajectoires orthogonales d'une famille de V_{n-1} totalement géodésiques établissent entre deux V_{n-1} de la famille une correspondance ponctuelle *isométrique* (c'est-à-dire conservant les longueurs des arcs). Ce théorème résulte immédiatement de la remarque que, dans l'espace euclidien de raccordement le long d'une ligne tracée dans une V_p totalement géodésique, cette ligne a pour image une courbe située dans une variété plane à p dimensions. Soit en effet AB un arc quelconque de courbe situé dans une V_{n-1} totalement géodésique, et soit A'B' l'arc découpé dans la V_{n-1} infiniment voisine par les trajectoires orthogonales des V_{n-1}. La représentation sur l'espace euclidien de raccordement le long de AB n'altère qu'aux infiniment petits près du second ordre les longueurs des arcs; or en passant dans cet espace euclidien de l'arc AB à l'arc A'B', la première variation de la longueur de l'arc est manifestement nulle.

De là résulte la forme réduite

$$ds^2 = d\sigma^2 + g_{nn}(u^1, \ldots, u^n)(du^n)^2$$

qu'on peut donner à l'élément linéaire de l'espace; $u^n = \text{const.}$ est l'équation des V_{n-1} de la famille; $d\sigma^2$ désigne un élément linéaire aux $n-1$ variables $u^1, \ldots, u^{n-1}$.

Si les directions principales de l'espace sont toutes distinctes et si l'espace admet p familles à un paramètre de V_{n-1} totalement géodésiques, nécessairement orthogonales entre elles, le ds^2 est réductible à la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + \sum_{i=1}^{i=n-p} g_{p+i,p+i}(u_1, \ldots, u^p, u^{p+i})(du^{p+i})^2,$$

$d\sigma^2$ étant un élément linéaire aux p variables $u^1, \ldots, u^p$. L'entier p ne peut pas dépasser $n - 1$, sans quoi l'espace serait euclidien.

41. S'il existe une famille à $n - 1$ paramètres de V_{n-1} totalement géodésiques, il y a une direction principale multiple d'ordre $n - 1$. On peut démontrer que toutes les V_{n-1} qui passent par un point de l'espace sont tangentes à cette direction principale; elles admettent une famille à un paramètre de V_{n-1} (non géodésiques) orthogonales et les V_{n-1} de cette famille sont parallèles entre elles. Le ds^2 de l'espace est réductible à la forme (J. Hadamard [25], pour $n = 3$)

$$ds^2 = F(u^n)\, d\sigma^2 + (du^n)^2,$$

où $d\sigma^2$ désigne un élément linéaire aux $n - 1$ variables $u^1, \ldots, u^{n-1}$, à *courbure constante* si $n > 3$. Les équations des V_{n-1} totalement géodésiques s'obtiennent en écrivant l'équation des variétés V_{n-2} totalement géodésiques de l'espace de Riemann d'élément $d\sigma^2$.

CHAPITRE VI.

VARIÉTÉS PLONGÉES DANS UN ESPACE DE RIEMANN (1).

I. — Courbure eulérienne.

42. Étant donnée une variété V_p à p dimensions située dans un espace de Riemann, les propriétés concernant les différentes courbes tracées dans V_p et passant par un point donné A sont, en un certain sens, les mêmes que dans l'espace euclidien (n° 20). D'une manière

(1) Consulter spécialement R. Lipschitz [7]; R. Beez [13]; A. Voss [14]; E. Bompiani [41]; J.-A. Schouten et D.-J. Struik [46] et [47]; H. Weyl [44]; R. Lagrange [49].

plus précise si l'on *développe* ces différentes courbes sur l'espace euclidien tangent en A, elles engendrent une variété $\overline{V_p}$ dont les lignes ont, dans l'espace euclidien qui la contient, les mêmes courbures que celles de V_p. Si la variété V_p est totalement géodésique, la variété $\overline{V_p}$ est plane.

L'étude analytique d'une variété V_p plongée dans un espace de Riemann se fait de la manière la plus simple en utilisant en chaque point de l'espace un repère (R) formé de n vecteurs unitaires rectangulaires. Les composantes covariantes et contrevariantes étant identiques, on peut se servir partout des indices inférieurs. Les quantités Γ_{ijk} que nous écrirons plutôt, avec C. Ricci, γ_{ijk}, sont les coefficients des expressions $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. Elles sont fournies par des relations (n^os **10** et **11**)

$$\gamma_{ijk} + \gamma_{jik} = 0, \tag{50}$$

$$\omega'_i = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}] = \sum_{(rs)} (\gamma_{ris} - \gamma_{sir})[\omega_r \omega_s]. \tag{51}$$

La courbure riemannienne est définie par les coefficients $R_{ij,rs}$ des quantités

$$\Omega_{ij} = \sum_{(rs)} R_{ij,rs}[\omega_s \omega_r] = \omega'_{ij} - \sum_k [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \tag{52}$$

Cela posé, en chaque point d'une variété V_p, nous prendrons p vecteurs unitaires tangents et $n-p$ vecteurs unitaires normaux; nous désignerons respectivement par des lettres latines $i, j, \ldots$, et par des lettres grecques $\alpha, \beta, \ldots$, les indices des vecteurs tangents et des vecteurs normaux. En se déplaçant sur la variété, les composantes ω_α sont nulles, et l'on a par suite, d'après (51), les relations fondamentales

$$\gamma_{\alpha ij} = \gamma_{\alpha ji} \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n;\ i, j = 1, \ldots, p). \tag{53}$$

43. La *courbure eulérienne* d'une variété V_p est constituée par l'ensemble des propriétés qui font intervenir les *premières courbures* en un point donné A de V_p des courbes tracées sur la variété.

Dans le cas simple d'une V_{n-1}, si l'on désigne par **t** et **n** les vecteurs unitaires portés sur la tangente et sur la normale principale d'une ligne tracée dans la variété, par $\frac{1}{\rho}$ la première courbure, par ϖ l'angle de la normale principale avec la normale à la variété, on a

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \omega_i \mathbf{e}_i = ds\,\mathbf{t}, \qquad d\mathbf{t} = \frac{ds}{\rho}\mathbf{n};$$

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = \frac{\sum_i \omega_i \omega_{in}}{ds^2} = \frac{\sum_{i,j} \gamma_{inj}\,\omega_i \omega_j}{\sum_i \omega_i^2};$$

la dernière formule donne l'expression de la *courbure normale;* elle généralise les théorèmes de Meusnier et d'Euler. Le numérateur du second membre est la seconde forme fondamentale de Gauss.

Quand on fait varier la direction de la tangente, la courbure normale prend $n-1$ valeurs stationnaires correspondant à $n-1$ directions tangentes rectangulaires (tangentes *principales*). Les lignes qui en chaque point admettent une tangente principale sont les *lignes de courbure.*

Rapportée aux tangentes principales, la seconde forme fondamentale s'écrit

$$\frac{1}{R_1}\omega_1^2 + \frac{1}{R_2}\omega_2^2 + \ldots + \frac{1}{R_{n-1}}\omega_{n-1}^2;$$

les quantités $\frac{1}{R_i}$ sont les *courbures principales* (eulériennes) de la variété.

Si l'on se déplace dans le sens d'une tangente principale, la différentielle covariante du vecteur unitaire normal $\mathbf{e}_n$ est parallèle à cette tangente, et cette propriété est caractéristique. Dans l'espace euclidien osculateur, les deux normales infiniment voisines à la variété se rencontrent.

Les *lignes asymptotiques*, qui annulent la seconde forme fondamentale, peuvent être caractérisées, soit par la propriété que leur élément plan osculateur est tangent à la variété, soit par la propriété que la géodésique tangente a un contact du second ordre avec la variété.

44. Dans le cas d'une $V_p (p < n-1)$, on a, si ϖ_α désigne l'angle que fait la normale principale à une courbe de V_p avec le vecteur normal $\mathbf{e}_\alpha$,

$$\frac{\cos\varpi_\alpha}{\rho} = \frac{\sum\limits_{i,j}^{1,\ldots,p} \gamma_{i\alpha j}\,\omega_i\,\omega_j}{\sum\limits_i \omega_i^2}.$$

Il s'introduit ici $n-p$ formes différentielles quadratiques

$$\Phi_\alpha = \sum_{i,j} \gamma_{i\alpha j}\,\omega_i\,\omega_j.$$

On appelle *courbure normale* le vecteur normal à V_p dont les composantes sont $\frac{\cos\varpi_\alpha}{\rho}$; il ne dépend que de la tangente à la courbe.

Les lignes asymptotiques définies par la propriété que leur élément plan osculateur est tangent à la variété s'obtiennent, si elles existent, en annulant les $n-p$ formes Φ_α. Elles sont encore caractérisées par la propriété que toute géodésique qui leur est tangente a un contact du second ordre avec la variété.

Si les géodésiques tangentes ont un contact du troisième ordre avec la variété, le triplan osculateur est tangent à la variété et réciproquement; une condition équivalente est que le plan osculateur soit tangent à chacun des hypercônes $\Phi_\alpha = 0$. Si $p = 2$, les géodésiques tangentes à une famille d'asymptotiques ne peuvent avoir toutes un contact du troisième ordre avec la variété sans que ces asymptotiques soient elles-mêmes des géodésiques (généralisation des surfaces réglées), à moins que toutes les formes Φ_α ne soient égales, à des facteurs finis près, à un même carré parfait. Dans l'espace euclidien ce dernier cas correspond aux surfaces développables enveloppes à un paramètre de plans, les asymptotiques étant des droites, c'est-à-dire des géodésiques. Il n'en est plus de même dans un espace de Riemann quelconque, les lignes asymptotiques doubles pouvant admettre une courbure (E. Cartan [59]); en tout cas leur torsion (seconde courbure) est nulle.

Du vecteur courbure normale on déduit par contraction le vecteur $\sum\limits_{i,\alpha} \gamma_{i\alpha i}\mathbf{e}_\alpha$, qui est appelé par E. Bompiani ([41], p. 113 et 99) *vecteur de courbure moyenne*. Les *variétés minima* sont celles pour lesquelles ce vecteur est nul.

E. Bompiani [41] a introduit, sous le nom de *seconde forme fondamentale*, la forme biquadratique invariante $\sum_\alpha \Phi_\alpha^2$; ses coefficients ne suffisent pas pour obtenir tous les invariants de courbure eulérienne de la variété.

II. — Les dérivations covariantes intrinsèques d'une variété.

45. On peut encore arriver à la courbure eulérienne d'une variété en se plaçant, avec E. Bompiani ([41], p. 114), R. Lagrange [49], H. Weyl [42], au point de vue suivant.

Considérons un champ de vecteurs tangents à la variété. Quand l'origine se déplace dans la variété, la différentielle covariante du vecteur du champ peut être décomposée en une composante tangentielle et une composante normale, la $i^{\text{ième}}$ composante tangentielle et la $\alpha^{\text{ième}}$ composante normale étant respectivement

$$dX_i + \sum_k^{1,\ldots,p} X_k \omega_{ki}, \qquad \sum_k^{1,\ldots,p} X_k \omega_{k\alpha}.$$

De même la différentielle covariante d'un vecteur normal peut se décomposer suivant les expressions

$$\sum_\lambda^{p+1,\ldots,n} X_\lambda \omega_{\lambda i}, \qquad dX_\alpha + \sum_\lambda^{p+1,\ldots,n} X_\lambda \omega_{\lambda\alpha}$$

La composante normale de la différentielle covariante d'un vecteur tangent, ainsi que la composante tangentielle de la différentielle covariante d'un vecteur normal, ne font intervenir que le vecteur attaché au point considéré et pas du tout le vecteur attaché au point infiniment voisin. De plus, dans l'un et l'autre cas, ce sont les coefficients des seules formes $\omega_{i\alpha} = -\omega_{\alpha i}$, c'est-à-dire des formes Φ_α, qui interviennent. *La courbure eulérienne d'une variété se manifeste donc, soit par la loi qui fait connaître la composante normale de la différentielle covariante d'un vecteur tangent, soit par la loi qui fait connaître la composante tangentielle de la différentielle covariante d'un vecteur normal.* On retrouve la propriété caractéristique des variétés totalement géodésiques d'avoir leur courbure eulérienne identiquement nulle.

46. Les autres composantes

$$dX_i + \sum_k X_k \omega_{ki}, \qquad dX_\alpha + \sum_\lambda X_\lambda \omega_{\lambda\alpha}$$

définissent sur la variété deux espèces de différentiations covariantes distinctes de la différentiation covariante dans l'espace ambiant. Elles s'appliquent respectivement aux vecteurs tangents et aux vecteurs normaux : on les appelle les *différentiations covariantes, tangentielle et normale, intrinsèques à la variété.*

Il est à remarquer que la différentiation covariante tangentielle intrinsèque est identique à la différentiation covariante qu'on obtiendrait en regardant la variété V_p comme un espace de Riemann à p dimensions dont le ds^2 serait $\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2$. Si un espace de Riemann est réalisé par une variété à n dimensions plongée dans un espace euclidien à N dimensions, la différentielle covariante d'un vecteur de cet espace de Riemann est donc la composante tangentielle du déplacement élémentaire absolu de ce vecteur dans l'espace euclidien ambiant : *c'est le point de vue de T. Levi-Civita* [34] *dans sa théorie du parallélisme.*

En résumé, la courbure eulérienne d'une variété manifeste la différence des résultats obtenus en appliquant à un vecteur tangent la différentiation covariante, telle qu'elle est définie dans l'espace de Riemann ambiant, et la différentiation covariante, telle qu'elle est définie dans l'espace de Riemann constitué par la variété elle-même.

La dérivation covariante normale intrinsèque n'existe que pour $p < n - 1$, et elle a été peu considérée.

III. — Courbure riemannienne intrinsèque tangentielle et normale.

47. La courbure riemannienne bivectorielle d'une facette de la variété V_p, supposée définie par les deux vecteurs infiniment petits α_i, β_i, peut se décomposer en trois parties : une partie *tangentielle* de composantes

$$(54) \qquad -\Omega_{ij} = \sum_{(rs)}^{1,\ldots,p} R_{ij,rs}(\alpha_r \beta_s - \alpha_s \beta_r);$$

une partie *normale* de composantes

$$(55) \qquad -\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{(rs)}^{1,\ldots,p} R_{\alpha\beta,rs}(\alpha_r\beta_s - \alpha_s\beta_r);$$

une partie *transversale* de composantes

$$(56) \qquad -\Omega_{i\alpha} = \sum_{(rs)}^{1,\ldots,p} R_{i\alpha,rs}(\alpha_r\beta_s - \alpha_s\beta_r).$$

On a d'autre part les formules

$$(57) \qquad \Omega_{ij} = \omega'_{ij} - \sum_{k}^{1,\ldots,p} [\omega_{ik}\omega_{kj}] - \sum_{\lambda}^{p+1,\ldots,n} [\omega_{i\lambda}\omega_{\lambda j}],$$

$$(58) \qquad \Omega_{\alpha\beta} = \omega'_{\alpha\beta} - \sum_{\lambda}^{p+1,\ldots,n} [\omega_{\alpha\lambda}\omega_{\lambda\beta}] - \sum_{k}^{1,\ldots,p} [\omega_{\alpha k}\omega_{k\beta}],$$

$$(59) \qquad \Omega_{i\alpha} = \omega'_{i\alpha} - \sum_{k}^{1,\ldots,p} [\omega_{ik}\omega_{k\alpha}] - \sum_{\lambda}^{p+1,\ldots,n} [\omega_{i\lambda}\omega_{\lambda\alpha}].$$

A la dérivation covariante tangentielle intrinsèque correspond d'autre part, quand on décrit le cycle entourant la facette, une rotation dans le p-plan tangent de composantes

$$(60) \qquad -\Pi_{ij} = -\omega'_{ij} + \sum_{k}^{1,\ldots,p} [\omega_{ik}\omega_{kj}];$$

à la dérivation covariante normale intrinsèque correspond de même une rotation dans le $(n-p)$-plan normal de composantes

$$(61) \qquad -\Pi_{\alpha\beta} = -\omega'_{\alpha\beta} + \sum_{k}^{p+1,\ldots,n} [\omega_{\alpha\lambda}\omega_{\lambda\beta}].$$

Les formes $-\Pi_{ij}$ définissent la courbure riemannienne tangentielle intrinsèque, les formes $-\Pi_{\alpha\beta}$ la courbure riemannienne normale intrinsèque. Ces courbures peuvent se définir pour un élément quelconque à $q \leqq p$ dimensions de la variété.

IV. — Courbure et torsion gaussiennes.

48. Les formules (57) et (60) montrent que la différence géométrique entre les deux courbures riemanniennes tangentielles, l'une évaluée intrinsèquement, l'autre évaluée par rapport à l'espace de Riemann ambiant, ne dépend que de la courbure eulérienne de la variété :

$$(62)\quad \Omega_{ij}-\Pi_{ij}=\sum_{\lambda}[\omega_{\lambda i}\omega_{\lambda j}]=\sum_{\lambda,(rs)}(\gamma_{\lambda ir}\gamma_{\lambda js}-\gamma_{\lambda is}\gamma_{\lambda jr})(\alpha_r\beta_s-\alpha_s\beta_r).$$

De même la différence géométrique entre les deux courbures riemanniennes normales analogues ne dépend que de la courbure eulérienne de la variété :

$$(63)\quad \Omega_{\alpha\beta}-\Pi_{\alpha\beta}=\sum_{k}[\omega_{k\alpha}\omega_{k\beta}]=\sum_{k,(rs)}(\gamma_{k\alpha r}\gamma_{k\beta s}-\gamma_{k\alpha s}\gamma_{k\beta r})(\alpha_r\beta_s-\alpha_s\beta_r).$$

Nous dirons que le système de bivecteurs tangents de composantes

$$K_{ij}=\Omega_{ij}-\Pi_{ij}=\sum_{\lambda}[\omega_{\lambda i}\omega_{\lambda j}]$$

définit la *courbure gaussienne* de la variété, et que le système de bivecteurs normaux de composantes

$$K_{\alpha\beta}=\Omega_{\alpha\beta}-\Pi_{\alpha\beta}=\sum_{k}[\omega_{k\alpha}\omega_{k\beta}]$$

définit la *torsion gaussienne* de la variété ($p<n-1$).

49. Dans le cas d'une variété V_{n-1} la torsion gaussienne n'existe pas; la courbure gaussienne s'exprime facilement au moyen des courbures principales eulériennes; en prenant les axes du repère tangents aux lignes de courbure, on a

$$K_{ij}=\frac{1}{R_iR_j}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i);$$

la courbure gaussienne scalaire d'une facette est égale au rapport

$$\frac{\displaystyle\sum_{(ij)}\frac{1}{R_iR_j}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)}{\displaystyle\sum_{(ij)}(\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i)^2}.$$

Pour $n = 3$, la courbure gaussienne ne fait intervenir que le produit des deux courbures principales. Pour $n > 3$, les choses sont toutes différentes, comme l'a montré pour la première fois Souvoroff [10] pour $n = 4$. On a trois cas à distinguer :

1° Dans le cas général les courbures principales, ainsi que les directions principales, sont complètement déterminées par la courbure gaussienne. *Les ds^2 de la variété et de l'espace ambiant définissent donc complètement la seconde forme fondamentale de Gauss; la variété est indéformable* (théorème de R. Beez [14]).

2° Il se peut que la courbure gaussienne ne soit pas identiquement nulle, mais que les formes K_{ij} soient proportionnelles entre elles. Il existe $n - 3$ courbures principales nulles; quant aux deux autres, leur produit seul est défini par la courbure gaussienne.

3° Si la courbure gaussienne est identiquement nulle, il peut arriver ou bien que toutes les courbures principales eulériennes soient nulles, la variété étant totalement géodésique, ou bien qu'elles soient toutes nulles, à l'exception d'une seule. On peut appeler *développables* les variétés V_{n-1} non totalement géodésiques dont la courbure gaussienne est nulle. Pour $n \geqq 4$, l'existence des variétés développables est en général exceptionnelle.

50. Les variétés V_p à torsion gaussienne nulle sont caractérisées par la propriété d'avoir p familles de lignes de courbure orthogonales : on peut choisir les axes du repère de manière à annuler les termes rectangles des $n - p$ formes Φ_α. Dans tout espace de Riemann ($n \geqq 4$) il existe une infinité de V_2 à torsion gaussienne nulle, dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. On peut démontrer aussi que dans tout espace de Riemann à cinq dimensions il existe des variétés V_3 à torsion gaussienne nulle, dépendant de trois fonctions arbitraires de deux arguments; en dehors de ces variétés, il peut en exister d'autres pour lesquelles une combinaison linéaire de Φ_1 et Φ_3 est proportionnelle au ds^2 de la variété; si l'espace est à courbure constante, ces nouvelles variétés existent toujours, sinon elles n'existent qu'exceptionnellement. Les cas plus généraux n'ont pas été étudiés. Signalons cependant, dans les espaces à courbure constante, toutes les variétés V_p admettant un système p-uple orthogonal.

51. On peut définir géométriquement la courbure gaussienne bivectorielle d'une facette de V_p par un procédé qui généralise celui de Gauss. Dans l'espace euclidien osculateur en un point A de la facette, on considère l'hypersphère de centre A et de rayon 1; on choisit arbitrairement en chaque point de la facette $n-p$ normales rectangulaires entre elles et l'on mène par A les parallèles à ces normales. Chacune d'elles décrit sur l'hypersphère une petite aire (orientée si la facette est elle-même orientée) dont on prend la projection sur le p-plan tangent en A; ces $n-p$ petites aires projetées peuvent être regardées comme un système de bivecteurs qui constitue la courbure gaussienne cherchée.

On peut définir d'une manière analogue la torsion gaussienne.

CHAPITRE VII.

CLASSE; DEGRÉ DE LIBERTÉ; GROUPE D'HOLONOMIE.

I. — Classe d'un espace de Riemann.

52. Si l'on définit un espace de Riemann à n dimensions par son ds^2, on peut toujours trouver, dans l'espace euclidien à un nombre suffisant $n+r$ de dimensions, une variété V_n admettant précisément le ds^2 donné. Si l'on prend en particulier $r=\frac{n(n-1)}{2}$, on trouve un système différentiel qui contient autant d'équations que de fonctions inconnues; il en résulte le théorème, énoncé pour la première fois par Schlaefli [9] et démontré par E. Cartan [60], que tout espace de Riemann à n dimensions peut être réalisé par une V_n de l'espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

G. Ricci [17] appelle *classe* d'un espace de Riemann le plus petit entier r tel que cet espace puisse être réalisé par une V_n de l'espace euclidien à $n+r$ dimensions. La classe r n'est nulle que pour l'espace euclidien lui-même; elle ne peut dépasser $\frac{n(n-1)}{2}$; mais d'autre part cette limite est généralement atteinte, d'après la remarque faite par Riemann que le ds^2 le plus général dépend essentiellement de $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires de n arguments.

Quelle que soit la classe d'un espace de Riemann, sa courbure riemannienne n'est autre que la courbure gaussienne de la variété euclidienne qui la réalise.

53. G. Ricci (17) a déterminé les conditions auxquelles doit satisfaire un espace de Riemann pour qu'il soit de classe 1. Il faut, d'après les formules (62), qu'en choisissant en chaque point un repère rectangulaire, les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel soient de la forme

$$R_{ij,rs} = \gamma_{ir}\gamma_{js} - \gamma_{is}\gamma_{jr}, \tag{64}$$

les $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ désignant $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités convenablement choisies.

Ces conditions ne sont pas suffisantes; il faut et il suffit en outre que si l'on désigne par

$$\sum_k \gamma_{ij|k}\omega_k$$

la différentielle covariante du tenseur symétrique γ_{ij}, on ait

$$\gamma_{ij|k} = \gamma_{jk|i}. \tag{65}$$

Si les équations (64) définissent *d'une manière et d'une seule* les γ_{ij} et si les relations (65) sont vérifiées, il existe dans l'espace euclidien à n dimensions une variété V_n et *une seule* (abstraction faite d'un déplacement rigide dans l'espace) admettant le ds^2 donné.

La discussion est un peu plus compliquée si, les équations (64) et (65) étant compatibles, les équations (64) ne déterminent pas complètement les γ_{ij}. Elle pose toute la question de la déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien à n dimensions, question que nous laisserons de côté.

Dans le cas général des espaces de classe r, on n'a guère fait que poser le problème (G. Ricci [20]).

II. — Degré de liberté d'un espace de Riemann.

54. Quand on transporte par parallélisme le long d'un cycle arbitraire le corps de vecteurs attaché à un point A d'un espace de Riemann, les vecteurs du corps prennent en général une position

finale différente de leur position initiale : le corps a subi une rotation. Le nombre des paramètres dont dépend la position finale du corps de vecteurs quand on fait varier le cycle est appelé par J.-A. Schouten [38] le *degré de liberté* de l'espace. Il est indépendant du point A considéré. Il ne peut pas dépasser $\frac{n(n-1)}{2}$; il est nul quand l'espace est euclidien.

Un vecteur $\mathbf{e}$ attaché au point A est dit *stable* si sa position finale coïncide toujours avec sa position initiale; à tout point M de l'espace on peut alors attacher le vecteur obtenu en transportant $\mathbf{e}$ par parallélisme de A en M, vecteur indépendant du chemin suivi. On obtient ainsi un champ de vecteurs, *tous parallèles entre eux d'une manière absolue*. Si l'on prend ce vecteur (qu'on peut supposer unitaire) pour $n^{\text{ième}}$ vecteur de coordonnées $\mathbf{e}_n$, on a

$$\gamma_{nij} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Les lignes du champ sont évidemment des géodésiques; de plus il existe une famille de V_{n-1} normales à ces lignes; elles sont totalement géodésiques et le ds^2 est de la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + du_n^2,$$

$d\sigma^2$ désignant un élément linéaire à $n-1$ variables. Non seulement le vecteur $\mathbf{e}_n$ est stable, mais il en est de même du $(n-1)$-plan qui lui est perpendiculaire. Le degré de liberté de l'espace est au plus égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; on peut remarquer que la classe est, elle aussi, au plus égale à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Plus généralement il peut arriver qu'on puisse trouver en un point A un système de vecteurs ou de multivecteurs tels que deux quelconques d'entre eux soient totalement normaux et que la somme de leurs dimensions soit égale à n. Si ces multivecteurs sont stables, le ds^2 est réductible à une somme d'éléments linéaires dont chacun est formé avec autant de variables que le multivecteur correspondant a de dimensions :

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2 + \ldots + d\sigma_p^2.$$

Le degré de liberté, aussi bien que la classe de l'espace, est au plus égal à la somme des quantités $\frac{n_i(n_i-1)}{2}$, en désignant par n_i les dimensions des multivecteurs stables considérés.

55. Les considérations précédentes gagnent en précision par l'introduction de la notion de *groupe*. Les rotations associées aux différents cycles issus d'un point A forment en effet, d'après E. Cartan [52], un groupe γ. Ce groupe est indépendant du point A considéré. Son ordre n'est autre que le degré de liberté de l'espace. Si ce groupe est formé des rotations les plus générales laissant invariants p multiplans, de dimensions $n_1, n_2, \ldots, n_p$ $(\Sigma n_i = n)$ normaux entre eux deux à deux, le degré de liberté de l'espace est égal à

$$\sum \frac{n_j(n_j-1)}{2},$$

et l'on a, dans ce cas particulier, un théorème dû à J.-A. Schouten [37] :

Le degré de liberté de l'espace de Riemann est au moins égal à sa classe.

Nous dirons dans ce cas que le groupe γ de l'espace est du type de J.-A. Schouten. Il en est sûrement ainsi pour un espace de Riemann à trois dimensions de ds^2 défini positif.

Dans le cas $n = 4$, il existe des groupes γ qui ne sont pas du type de Schouten : ce sont des sous-groupes invariants à trois paramètres du groupe total des rotations. Les espaces de Riemann correspondants sont caractérisés analytiquement par les relations (où l'on a supposé les repères rectangulaires)

$$\Omega_{23} = \varepsilon\Omega_{14}, \qquad \Omega_{31} = \varepsilon\Omega_{24}, \qquad \Omega_{12} = \varepsilon\Omega_{34} \qquad (\varepsilon = \pm 1); \tag{66}$$

s'il en est ainsi, on peut choisir les repères de manière à avoir

$$\omega_{23} = \varepsilon\omega_{14}, \qquad \omega_{31} = \varepsilon\omega_{24}, \qquad \omega_{12} = \varepsilon\omega_{34}.$$

Les équations (66) peuvent s'interpréter géométriquement. L'espace étant orienté d'une manière convenable, *la courbure mixte de deux facettes supplémentaires quelconques est égale à la courbure de chacune d'elles*. En particulier la courbure riemannienne de tous les éléments à trois dimensions est nulle.

Les espaces de Riemann précédents dépendent de deux fonctions arbitraires de trois arguments; leur classe est toujours au moins égale à 3, mais peut vraisemblablement atteindre 6 : la question demanderait à être élucidée.

III. — Groupe d'holonomie.

56. E. Cartan [52, 54, 56] a développé une théorie plus générale. Quand on développe l'espace de Riemann sur l'espace euclidien tangent en A le long d'un cycle partant de A et y revenant, cet espace euclidien subit un déplacement et tous les déplacements correspondant aux différents cycles possibles forment un groupe, appelé *groupe d'holonomie*. Il est le même pour tous les points de l'espace. Le groupe γ est simplement celui qui indique comment le groupe d'holonomie transforme entre elles les directions de l'espace. Le groupe d'holonomie est engendré par les rotations infinitésimales associées aux cycles infiniment petits.

Pour $n = 3$ et un espace à ds^2 défini positif, le groupe d'holonomie est (E. Cartan [54]) soit le groupe général des déplacements à six paramètres;

Soit le groupe à trois paramètres des rotations autour d'un point fixe, auquel cas le ds^2 est réductible à la forme

$$ds^2 = du^2 + u^2\, d\sigma^2 \qquad (d\sigma^2 \text{ élément linéaire à deux variables});$$

Soit le groupe à trois paramètres des déplacements qui laissent invariant un plan fixe, auquel cas on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + du^2 \qquad (d\sigma^2 \text{ élément à deux variables});$$

Soit la transformation identique (espace euclidien).

Le groupe d'holonomie est continu, sauf s'il existe dans l'espace de Riemann des cycles ne pouvant pas, par déformation continue, se réduire à un point. Un espace de Riemann localement euclidien, mais n'ayant pas, au point de vue de l'*Analysus situs*, la même connexion que l'espace euclidien, admet un groupe d'holonomie discontinu (proprement ou improprement).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. RIEMANN (B.). — Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationschrift soutenue le 10 juin 1854 devant la Faculté de philosophie de Göttingen (*Gesammelte Math. Werke*, Leipzig, 1872, p. 254-269).
2. RIEMANN (B.). — Commentatio mathematica, etc. (*Gesamm. Math. Werke*, p. 370-380).
3. LAMÉ (G.). — Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris, 1859).
4. BELTRAMI (E.). — Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante (*Annali di Matem.*, 2e série, t. 2, 1868, p. 232-245).
5. CHRISTOFFEL (E.-B.). — Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (*J. de Crelle*, t. 70, 1869, p. 46-70).
6. LIPSCHITZ (R.). — Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von *n* Differentialen (*J. de Crelle*, t. 70, 1869, p. 71-102).
7. LIPSCHITZ (R.). — Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von *n* Differentialen (*J. de Crelle*, t. 71, 1870, p. 274-287, 288-295).
8. LIPSCHITZ (R.). — Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von *n* Differentialen (*J. de Crelle*, t. 72, 1870, p. 1-56).
9. SCHLAEFLI (L.). — Nota alla memoria del Sig. Beltrami (*Annali di Matem.*, 2e série, t. 5, 1871-1873, p. 178 193).
10. SOUVOROF (T.). — Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions (*Bull. des Sc. math.*, t. 4, 1873, p. 180 192; abrégé d'un Mémoire en russe paru à Kazan en 1871).
11. JORDAN (C.). — Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces (*C. R. Acad. Sc.*, t. 79, 1874, p. 909-911).
12. LIPSCHITZ (R.). — Extrait de six Mémoires dans le *Journal de Mathématiques* de Borchardt (*Bull. des Sc. math.*, t. 4, 1873, p. 97-120, 142-157, 212-224, 297-307, 308-320).
13. BEEZ (R.). — Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung (*Zeitsch. f. Math. und Phys.*, t. 20, 1875, p. 423-444).
14. BEEZ (R.). — Zur Theorie, etc. (*suite*) (*Zeitschr. f. Math. und Phys.*, t. 21, 1876, p. 373-401).
15. VOSS (A.). — Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten (*Math. Ann.*, t. 16, 1880, p. 129-178).
16. VOSS (A.). — Zur Theorie des Riemannschen Krümmungsmasses (*Math. Ann.*, t. 16, 1880, p. 571-576).

17. Ricci (G.). — Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche (*Ann. di Matem.*, 2e série, t. 12, 1884, p. 135-168).

18. Schur (F.). — Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen (*Math. Ann.*, t. 27, 1886, p. 537-567).

19. Ricci (G.). — Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale (*Rend. Accad. Lincei*, 4e série, t. 3^1, 1887, p. 15-18).

20. Ricci (G.). — Sulla classificazione delle forme differenziali quadratiche (*Rend. Accad. Lincei*, 4e série, t. 4^{11}, 1888, p. 203-207).

21. Ricci (G.). — Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 16, 1892, p. 167-189).

22. Darboux (G.). — Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III (Paris, Gauthier-Villars, 1894).

23. Cesàro (E.). — Le formole di Codazzi negli iperspazii (*Rend. Accad. Napoli*, 2e série, t. 8, 1894, p. 87-91).

24. Ricci (G.). — Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque (*Memor. Accad. Lincei*, 6e série, t. 2, 1895, p. 276-332).

25. Hadamard (J.). — Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 25, 1901, p. 37-40).

26. Ricci (G.) et Levi-Civita (T.). — Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (*Math. Ann.*, t. 54, 1901, p. 125 201).

27. Bianchi (L.). — Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 11, 1902, p. 37).

28. Ricci (G.). — Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della lora curvatura (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 11^1, 1902, p. 355-362).

29. Ricci (G.). — Sulle superficie geodetiche in una varietà qualcunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 12^1, 1903, p. 409-420).

30. Ricci (G.). — Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque (*Atti R. Istit. Veneto*, t. 63, 1904, p. 1233-1239).

31. Ricci (G.). — Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date *a priori* (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 19^1, 1910, p. 181-187; t. 19^{11}, 1910, p. 85-90).

32. Herglotz (G.). — Zur Einsteinschen Gravitationstheorie (*Leipz. Ber.*, t. 68, 1916, p. 199-203).

33. Hessenberg (G.). — Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie (*Math. Ann.*, t. 78, 1917, p. 187-217).

34. Levi-Civita (T.). — Nozione di parallelismo in una varietà qualunque (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 42, 1917, p. 173-205).

35. Severi (F.). — Sulla curvatura delle superficie e varietà (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 42, 1917, p. 222-259).

36. Vermeil (H.). — Notiz über das mittlere Krümmungsmass einer *n*-fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfaltigkeit (*Gött. Nachr.*, 1917, p. 334-344).

37. Schouten (J.-A.). — Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie (*Verhand. Kon. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 12, 1918, n° 6).

38. Schouten (J.-A.). — On the number of degrees of freedom of the geodetically moving systems (*Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 21, 1918, p. 607-613).

39. Carpanese (A.). — Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque (*Annali di Matem.*, 3e série, t. 28, 1919, p. 147-168).

40. Pérès (J.). — Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne (*Rend. Accad. Lincei*, 5e série, t. 28¹, 1919, p. 425-428).

41. Bompiani (E.). — Sugli spazî curvi (*Atti R. Ist. Veneto*, t. 80, 1921, p. 355-386, 839-859, 1113-1145).

42. Weyl (H.). — Temps, espace, matière (traduction française sur la quatrième édition allemande par P. Juvet et R. Leroy; Paris, Blanchard, 1922).

43. Struik (D.-J.). — Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung (Berlin, J. Springer, 1922).

44. Weyl (H.). — Zur Infinitesimalgeometrie : p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen Raum (*Math. Zeitschr.*, t. 12, 1922, p. 154-160).

45. Cartan (E.). — Sur les équations de la gravitation d'Einstein (*J. de Math. pures et appliquées*, 9e série, t. 1, 1922, p. 141-203).

46. Schouten (J.-A.) and Struik (D. -J.).— On curvature and invariants of deformation of a V_m in V_n (*Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 24, 1922, p. 146-161).

47. Schouten (J.-A.) und Struik (D.-J.). — Ueber Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannifaltigkeit, etc. (*Rendic. Circ. matem. Palermo*, t. 46, 1922, p. 165-184).

48. Fermi. — Sopra i fenomeni che avvengono in prossimità di una linea oraria (*Rend. Accad. Lincei*, t. 31ᴵᴵ, 1922, p. 21-23, 51-52).

49. Lagrange (R.). — Sur le calcul différentiel absolu (*Thèse*, 1923).

50. Bompiani (E.). — Spazî riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche (*Rend. Circ. matem. Palermo*, t. 48, 1924, p. 121-134).

51. Cartan (E.). — Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. 40, 1923, p. 325-412; t. 41, 1924, p. 1-25).

52. Cartan (E.). — Sur les variétés, etc. (*suite*) (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. 42, 1925, p. 17-88).

53. Schouten (J.-A.). — Der Ricci-Kalkül (Berlin, J. Springer, 1924).

54. Cartan (E.). — La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle (*L'Enseignement math.*, 1924-1925, p. 1-18).

55. Levi-Civita (T.). — Lezioni di calcolo differenziale assoluto (Rome, A. Stock, 1925).

56. Cartan (E.). — Les groupes d'holonomie des espaces généralisés (*Acta math.*, t. 48, 1926, p. 1-42).

57. Eisenhart (L.-P.). — Riemannian Geometry (*Princeton Univ. Press*, 1926).

58. Cartan (E.). — Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann (*Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 214-264; t. 55, 1927, p. 114-134).

59. CARTAN (E.). — Sur les courbes de torsion nulle et les surfaces développables dans les espaces de Riemann (*C. R. Acad. Sc.*, t. **184**, 1927, p. 138).

60. CARTAN (E.). — Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien (*Annales Soc. pol. Math.*, t. **6**, 1927, p. 1-7).

61. CARTAN (E.). — Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

62. CARTAN (E.). — Les espaces riemanniens symétriques (*Verh. Intern. Math.-Kongresses Zürich*, 1932, I, p. 152-161).

TABLE DES MATIÈRES.