

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

TH. DE DONDER

Introduction à la gravifique einsteinienne

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 8 (1925)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__8__1_0

© Gauthier-Villars, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE VIII.

Introduction à la gravifique einsteinienne.

Par TH. DE DONDER

Professeur à l'Université de Bruxelles. Membre de l'Académie Royale de Belgique.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1925

CIRM - BIBLIOTHEQUE

N° d'Inventaire L21351

Date 4/3/93

INTRODUCTION

A LA

GRAVIFIQUE EINSTEINIENNE

Par **Th. De DONDER,**

Professeur à l'Université de Bruxelles,
Membre de l'Académie royale de Belgique.

PRÉFACE.

Cette nouvelle synthèse de la Relativité comprendra trois Parties :

- I. Introduction à la Gravifique einsteinienne.
- II. Théorie des champs gravifiques.
- III. Quelques problèmes de la Gravifique.

L'exposé sera fait de telle manière que chacune de ces Parties pourra être étudiée indépendamment des autres.

L'Introduction à la Gravifique einsteinienne est consacrée à l'étude de l'espace et du temps. La méthode adoptée s'inspire directement des procédés créés par Einstein dans la Relativité *générale*. Nous utilisons d'une manière systématique divers spectateurs. Ceux qui sont chargés d'investiguer les champs au moyen de leurs étalons de longueur et de temps seront dits : des spectateurs-physiciens, et seront désignés par \bar{S} , \bar{S}' , ... A chacun de ces physiciens sera adjoint un spectateur-mathématicien : S , S' , ... servant d'intermédiaire.

Tout d'abord, nous étudions ainsi les champs les plus simples : les champs de Minkowski, et nous obtenons la corrélation entre les mesures de \bar{S} et de \bar{S}' . En particulier, on retrouve, par ce procédé

général, la transformation de Lorentz et l'explication des expériences classiques de Michelson, de Fizeau et de Sagnac.

Puis, nous passons aux champs d'Einstein qui apparaîtront comme une généralisation fort naturelle des champs de Minkowski. Nous avons évité de faire appel à toute intuition hypergéométrique dans l'espace-temps, afin de conserver à cet exposé un caractère purement physique. A titre d'exemple important, citons la corrélation établie directement entre S et \bar{S}' , qui se rattache aux variables géodésiques et au déplacement parallèle de Levi-Civita.

L'espace et le temps étudiés simultanément nous fournissent la cinématique : les définitions formelles des vitesses et des accélérations se justifient par la variance de celles-ci et par le fait que dans les champs de Minkowski, elles redonnent approximativement les vitesses et les accélérations classiques. Les formules et théorèmes qui terminent ce dernier Chapitre prendront toute leur importance dans la Théorie des champs gravifiques.

Bruxelles, le 6 janvier 1935.

CHAPITRE I.

CHAMPS DE MINKOWSKI.

1. Les vides physiques. — L'expérience nous apprend qu'une portion d'espace ne renfermant ni masses, ni électricité peut être le siège de champs de gravitation et de champs électromagnétiques très différents. Il existe donc des vides physiques très différents. Pour rendre la notion de ces vides physiques plus intuitive, on peut avoir recours à un fluide hypothétique « l'éther » et à ses perturbations; mais, dans la Relativité, la structure et le mode d'action de l'éther ne jouant aucun rôle, nous éviterons d'en parler.

2. Champ de Minkowski. — Nous dirons qu'un espace vide est le siège d'un champ de Minkowski, s'il est euclidien et si les rayons lumineux s'y propagent suivant des droites euclidiennes, avec une vitesse constante, la même dans toutes les directions ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ A titre d'exemple *approximatif* d'un champ de Minkowski, on peut citer *le vide interstellaire*, dans les régions suffisamment éloignées des astres.

Noas allons expliquer comment un spectateur ou physicien \bar{S} vérifiera ces propriétés, en utilisant des étalons de longueur et de temps, *au repos* dans cet espace.

3. Distance entre deux points. — La distance entre deux points sera définie par sa mesure effectuée au moyen de l'étalon de longueur utilisé par le spectateur \bar{S} attaché au champ de Minkowski. Cette mesure se fera comme suit. Le spectateur \bar{S} tracera, à l'aide d'un rayon lumineux, la droite reliant les deux points; il verra ensuite combien de fois ce segment de droite contient l'étalon de longueur. D'une manière semblable, il construira un trièdre trirectangle T attaché à ce champ, puis il mesurera les coordonnées rectangulaires rapportées à ce trièdre T . Soient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les valeurs obtenues pour les coordonnées du premier point P_1 , et $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2$ les valeurs trouvées pour les coordonnées du second point P_2 . Conformément à la définition de l'espace euclidien, le spectateur \bar{S} trouvera :

$$(1) \quad |P_1 P_2| = \left| \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 + (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2} \right|.$$

4. Le temps. — Pour définir la mesure du temps aux différents points du champ de Minkowski, le spectateur \bar{S} aura recours aux propriétés de la lumière. Il définira le mode de propagation de la lumière par un nombre positif déterminé \bar{c} , choisi arbitrairement une fois pour toutes. A l'instant \bar{t}_0 pris arbitrairement, \bar{S} lance un signal lumineux de P_0 vers P ; il fait correspondre au point P le nombre

$$(2) \quad \bar{t} \equiv \bar{t}_0 + \frac{1}{\bar{c}} |P_0 P|.$$

Il appellera $(\bar{t} - \bar{t}_0)$ *l'intervalle de temps mis par la lumière pour se mouvoir de P_0 à P* . Pour conserver ces instants, il utilisera des horloges fixées aux différents points de l'espace considéré. Les horloges P_0 et P seront *réglées* si l'horloge en P marque précisément l'heure \bar{t} au moment où le signal lumineux lui parvient. Le nombre \bar{t}_0 sera appelé l'instant initial, lu par \bar{S} , sur l'horloge fixée en P_0 .

Grâce à l'introduction de la constante \bar{c} , le temps \bar{t} est donc fixé, par \bar{S} , en tous les points P du champ. En d'autres termes, les hor-

loges attachées à différents points P sont réglées, par \bar{S} , à l'aide de signaux optiques.

5. **Événement.** — Un événement sera défini pour le spectateur \bar{S} par quatre nombres $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ ou $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$. Les trois premiers fixent les coordonnées du point où l'événement s'est produit et le quatrième son époque. Ces nombres ont été obtenus par le spectateur \bar{S} de la manière indiquée ci-dessus.

6. **Simultanéité.** — Deux événements définis respectivement par les systèmes de nombres $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1, \bar{t}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2, \bar{t}_2)$ seront dits simultanés pour \bar{S} si l'on a $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$.

7. **Coïncidence.** — Deux événements coïncident pour \bar{S} , ou forment une coïncidence pour \bar{S} , si l'on a

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad \bar{y}_1 = \bar{y}_2, \quad \bar{z}_1 = \bar{z}_2, \quad \bar{t}_1 = \bar{t}_2.$$

8. **Vitesse de la lumière.** — Considérons deux points infiniment voisins P_1, P_2 dont les coordonnées, par rapport au trièdre T, sont respectivement $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ et $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$. Posons

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \delta\bar{x}, \quad \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \delta\bar{y}, \quad \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = \delta\bar{z}.$$

La distance des deux points aura pour mesure

$$|P_1 P_2| = \left| \sqrt{(\delta\bar{x})^2 + (\delta\bar{y})^2 + (\delta\bar{z})^2} \right|.$$

Posons encore $\delta\bar{\sigma} = |P_1 P_2|$; nous aurons

$$(3) \quad (\delta\bar{\sigma})^2 = (\delta\bar{x})^2 + (\delta\bar{y})^2 + (\delta\bar{z})^2.$$

De la définition donnée plus haut de la mesure du temps, il résulte qu'un signal optique lancé à l'instant \bar{t} du point P_1 vers le point P_2 atteindra ce dernier à l'instant $\bar{t} + \delta\bar{t}$ défini par l'égalité

$$\bar{t} + \delta\bar{t} = \bar{t} + \frac{1}{c} |P_1 P_2| = \bar{t} + \frac{1}{c} \delta\bar{\sigma},$$

et par conséquent on aura

$$(3') \quad d\bar{\sigma} = \bar{c} d\bar{t},$$

les différentielles d (au lieu de δ) servant à rappeler qu'il s'agit de la propagation de la lumière.

Ainsi le nombre \bar{c} est la mesure de la *vitesse* de la lumière dans le vide de Minkowski, mesure obtenue par le spectateur \bar{S} .

En introduisant les coordonnées, la relation précédente (3') peut aussi s'écrire

$$(4) \quad -(\bar{d}x)^2 - (\bar{d}y)^2 - (\bar{d}z)^2 + (\bar{c})^2 (\bar{d}t)^2 = 0.$$

9. Intervalle entre deux événements. — Considérons deux événements infiniment voisins définis par \bar{S} , respectivement au moyen des nombres $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, $(x + \delta\bar{x}, y + \delta\bar{y}, z + \delta\bar{z}, t + \delta\bar{t})$. Posons

$$(5) \quad \boxed{(\delta\bar{s})^2 = -(\delta\bar{x})^2 - (\delta\bar{y})^2 - (\delta\bar{z})^2 + (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2}$$

Nous dirons que ce $(\delta\bar{s})^2$ a la *forme de Minkowski* ⁽¹⁾.

Nous avons posé (§ 8)

$$\delta\bar{\sigma} = \sqrt{(\delta\bar{x})^2 + (\delta\bar{y})^2 + (\delta\bar{z})^2} :$$

donc

$$(6) \quad (\delta\bar{s})^2 = -(\delta\bar{x})^2 + (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2.$$

Si, dans (6), on a

$$(7) \quad \bar{c} |\delta\bar{t}| \geq \delta\bar{\sigma},$$

nous écrirons, par définition,

$$(8) \quad \delta\bar{\sigma} = \sqrt{-(\delta\bar{s})^2 + (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2} :$$

si, au contraire, on a, dans (6),

$$(9) \quad \bar{c} |\delta\bar{t}| < \delta\bar{\sigma},$$

⁽¹⁾ H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit*. (Verh. Naturf. Ges. Cöln 1908, éd. 1909). Conférence faite le 21 septembre 1908.

nous écrirons, par définition,

$$(10) \quad \delta\bar{s} \equiv \sqrt{(\delta\bar{x})^2 - (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2} \sqrt{-1}.$$

L'élément $\delta\bar{s}$, ainsi défini, s'appellera *l'intervalle des deux événements infiniment voisins*

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \quad (\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z}, \bar{t} + \delta\bar{t})$$

mesurés par \bar{S} attaché au champ de Minkowski considéré.

Exemples. — 1° Considérons, avec \bar{S} , un point P qui se déplace de $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ en $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z})$, et soit $\delta\bar{t}$ le laps de temps qui s'écoule entre l'instant \bar{t} où le point P est en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et l'instant $\bar{t} + \delta\bar{t}$ où il est en

$$(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z}).$$

La *vitesse* \bar{v} du transport de P, mesuré par \bar{S} , sera donnée par

$$(11) \quad (\bar{v})^2 = \left(\frac{\delta\bar{x}}{\delta\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{y}}{\delta\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{z}}{\delta\bar{t}}\right)^2 = \left(\frac{\delta\bar{\sigma}}{\delta\bar{t}}\right)^2.$$

On aura donc, pour le carré de l'intervalle entre les deux événements qui sont les passages de P en chacune des deux positions considérées,

$$(12) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv -(\bar{v})^2 + (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2.$$

Cet intervalle sera nul si $|\bar{v}| = \bar{c}$.

2° En un même point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, le spectateur \bar{S} lit, sur une horloge qui y est fixée, deux instants infiniment voisins $\bar{t}, \bar{t} + \delta\bar{t}$. Nous supposons $\delta\bar{t} > 0$. L'intervalle de ces deux événements, mesuré par \bar{S} , sera

$$\delta\bar{s} = \bar{c} \delta\bar{t},$$

d'où

$$(13) \quad \delta\bar{t} = \frac{\delta\bar{s}}{\bar{c}}.$$

Ainsi $\frac{\delta\bar{s}}{\bar{c}}$ vaut précisément l'intervalle de temps lu par \bar{S} sur l'horloge fixée en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, immobile par rapport à lui. Pour cette raison, $\frac{\delta\bar{s}}{\bar{c}}$ s'appelle, dans le cas considéré, le *temps propre* mesuré par S.

Cherchons, d'une manière générale, dans quels cas l'intervalle entre deux événements infiniment voisins est nul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il

suffit que l'on ait

$$(14) \quad |\delta\bar{\sigma}| = \bar{c} |\delta\bar{t}|.$$

Si $\delta\bar{t} \neq 0$, il faut et il suffit que $(\delta\bar{\sigma})^2 = (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2$. Dans le cas où il s'agit d'un *transport* du point P en un point infiniment voisin, la condition précédente équivaut, grâce à (11), à $|\bar{c}| = \bar{c}$. C'est le cas du premier exemple du paragraphe 5.

Si $\delta\bar{t} = 0$, la condition (14) donne $\delta\bar{\sigma} = 0$, c'est-à-dire

$$\delta\bar{x} = \delta\bar{y} = \delta\bar{z} = 0;$$

ainsi, pour le spectateur \bar{S} , les deux événements *coïncident*.

Cas où l'intervalle entre deux événements infiniment voisins est imaginaire. — Si S considère, au même instant t , deux points *différents* infiniment voisins $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z})$, il aura $\delta\bar{t} = 0$ et $\delta\bar{\sigma} > 0$; donc l'intervalle entre les deux événements infiniment voisins, et *simultanés* pour \bar{S} , définis par les nombres $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z}, \bar{t} + \delta\bar{t})$ sera, en vertu de (10),

$$\delta\bar{s} = \delta\bar{\sigma} \sqrt{-1}.$$

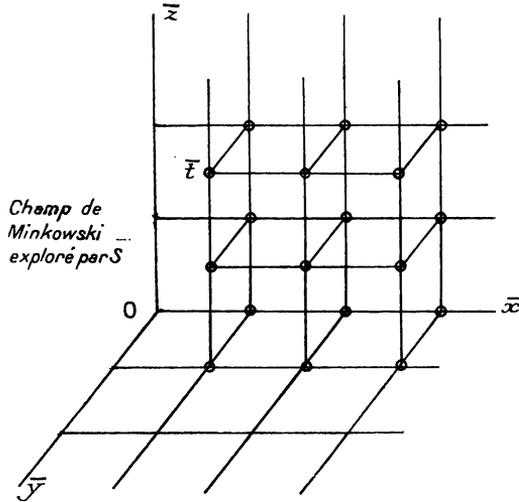
On voit que $\frac{\delta\bar{s}}{\sqrt{-1}}$ est égal à la *distance* $\delta\bar{\sigma}$ entre les points $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z})$ mesurée par \bar{S} à l'instant \bar{t} .

10. Changement de variables fait par \bar{S} . — Le spectateur \bar{S} a jusqu'ici déterminé un événement par les nombres $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ définis au moyen des *mesures directes* qu'il a effectuées à l'aide de ses étalons de longueur et de ses horloges. Il s'est ainsi donné un système de référence spatio-temporel dans lequel l'espace est divisé en cubes, tandis qu'en chaque nœud de ce réseau cubique est fixée une horloge réglée par \bar{S} . Ces horloges synchrones indiquent des intervalles de temps aussi petits qu'on veut et les dimensions des mailles cubiques peuvent également être prises aussi petites que l'on veut.

L'observateur \bar{S} peut parfois trouver utile d'employer, pour définir l'événement $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$, d'autres nombres x', y', z', t' , liés à $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ par des relations déterminées; en d'autres termes, il peut se proposer d'effectuer sur $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ un changement de variables. Il importe de remarquer que \bar{S} effectue ce changement de variables *en conservant*

ses étalons de longueur et ses horloges. Ces changements sont donc, pour \bar{S} , des transformations purement analytiques; le spectateur \bar{S} pense constamment en géométrie euclidienne et en temps \bar{t} .

Fig. 1.



Examinons sous quelle forme se présente le $(\bar{ds})^2$ quand on passe des variables $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$, mesurées par \bar{S} , aux variables x', y', z', t' , calculées au moyen des relations

$$(15) \quad \begin{cases} x' \equiv x'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \\ y' \equiv y'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \\ z' \equiv z'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}), \\ t' \equiv t'(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}). \end{cases}$$

Nous admettons que ces équations définissent x', y', z', t' en fonctions uniformes de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$, et qu'elles sont résolubles par rapport à ces dernières variables de telle manière qu'elles déterminent $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ comme fonctions uniformes de x', y', z', t' . Nous aurons

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{x} \equiv \bar{x}(x', y', z', t'), & \bar{y} \equiv \bar{y}(x', y', z', t'), \\ \bar{z} \equiv \bar{z}(x', y', z', t'), & \bar{t} \equiv \bar{t}(x', y', z', t'). \end{cases}$$

Nous poserons, dans un but d'uniformité,

$$(17) \quad \bar{x} = \bar{x}_1, \quad \bar{y} = \bar{x}_2, \quad \bar{z} = \bar{x}_3, \quad \bar{t} = \bar{x}_4,$$

$$(18) \quad x' = x'_1, \quad y' = x'_2, \quad z' = x'_3, \quad t' = x'_4.$$

Avec ces notations et les anciennes variables, la forme (5) peut s'écrire

$$(19) \quad (\delta \bar{s})^2 = -(\delta \bar{x}_1)^2 - (\delta \bar{x}_2)^2 - (\delta \bar{x}_3)^2 + (\bar{c})^2 (\delta \bar{x}_4)^2.$$

En comparant celle-ci à la forme générale

$$(\delta \bar{s})^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \delta \bar{x}_{\alpha} \delta \bar{x}_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

on voit que (19) correspond aux valeurs suivantes des coefficients $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = (\bar{c})^2,$$

tandis que *les autres $g_{\alpha\beta}$ sont nuls.*

Les coefficients de la forme (19) sont rassemblés dans le tableau carré

$$(20) \quad \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +(\bar{c})^2 \end{array}$$

lequel, comme nous le verrons plus loin, définit un *tenseur*

$$g_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, 4).$$

Passons maintenant aux variables accentuées. Nous aurons

$$\bar{x}_{\alpha} = \bar{x}_{\alpha}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

et inversement. On en déduit

$$\delta \bar{x}_{\alpha} = \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x'_1} \delta x'_1 + \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x'_2} \delta x'_2 + \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x'_3} \delta x'_3 + \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial x'_4} \delta x'_4 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

les signes $\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \dots$ étant des symboles de dérivation *partielle*.

Les $\delta \bar{x}_{\alpha}$ sont donc des fonctions linéaires des $\delta x'_{\alpha}$, dont les coefficients sont des fonctions déterminées des x'_{α} . En substituant les valeurs

de $\delta\bar{x}_1, \delta\bar{x}_2, \delta\bar{x}_3, \delta\bar{x}_4$ dans le second membre de (19), ce second membre deviendra une forme quadratique des $\delta x'_\alpha$. Les coefficients de cette forme quadratique sont des fonctions des x'_α , que nous désignerons par $g'_{\alpha\beta}$, de sorte que la forme quadratique dont il s'agit sera

$$(21) \quad (\delta\bar{s})^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g'_{\alpha\beta} \delta x'_\alpha \delta x'_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Remarquons maintenant que l'intervalle $\delta\bar{s}$ est *invariant* par rapport aux changements de variables $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$; la grandeur de cet intervalle est évidemment indépendante du choix des nombres $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ ou x', y', z', t' au moyen desquels il plaît à \bar{S} de définir numériquement les événements. Le premier membre de l'équation (19) n'est donc pas affecté par ce changement de variables. Les coefficients de la forme quadratique qui figurent maintenant dans le second membre de (21) seront, en général, différents des coefficients $g_{\alpha\beta}$ réunis dans le tableau (20). Les nouveaux coefficients $g'_{\alpha\beta}$ sont rassemblés dans le tableau suivant :

$$(22) \quad \begin{array}{cccc} g'_{11} & g'_{12} & g'_{13} & g'_{14} \\ g'_{21} & g'_{22} & g'_{23} & g'_{24} \\ g'_{31} & g'_{32} & g'_{33} & g'_{34} \\ g'_{41} & g'_{42} & g'_{43} & g'_{44} \end{array}$$

Il résulte de la transformation que nous venons de faire que

$$(23) \quad g'_{\beta\alpha} = g'_{\alpha\beta}.$$

Exemple. — Supposons que \bar{S} veuille employer les *coordonnées sphériques* euclidiennes $x'_1 = \bar{r}, x'_2 = \bar{\theta}, x'_3 = \bar{\varphi}$.

Alors, la formule (21) devient

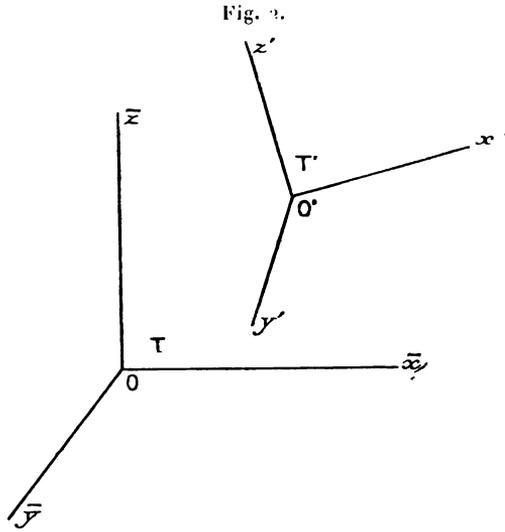
$$(24) \quad (\delta\bar{s})^2 = -(\delta\bar{r})^2 - (\bar{r})^2 [(\delta\bar{\theta})^2 + \sin^2 \bar{\theta} (\delta\bar{\varphi})^2] + (\bar{c})^2 (\delta\bar{t})^2.$$

C'est la forme de Minkowski en coordonnées sphériques.

11. Trièdre euclidien dans le champ de Minkowski. — Au trièdre euclidien T, nous avons attaché le spectateur \bar{S} qui repère les événements, dans le champ de Minkowski, au moyen des nombres $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$.

Pour étudier, avec \bar{S} , les effets physiques produits sur les étalons

de longueur et de temps et dus à leur mouvement dans le champ considéré, nous ferons mouvoir un système de référence T' dans ce



champ (voir *fig. 2*). Le spectateur \bar{S} définira ce mouvement au moyen des équations

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(x', y', z', t'), & \bar{y} = \bar{y}(x', y', z', t'), \\ \bar{z} = \bar{z}(x', y', z', t'), & \bar{t} = t'. \end{cases}$$

Nous supposons que cette transformation ⁽¹⁾ établit une correspondance biunivoque et réciproque entre $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ et x', y', z', t' . Nous allons construire, avec \bar{S} , un trièdre curviligne (O' ; x', y', z') de la manière suivante. A l'instant déterminé \bar{t} ou t' , prenons, pour fixer les idées, le point $x' = y' = z' = 0$; nous obtiendrons ainsi l'origine O' , à l'instant considéré t' . Pour construire l'axe x' , nous ferons varier x' seulement, en conservant cette même valeur de t' et en prenant $y' = z' = 0$. Nous procéderons de la même manière pour construire l'axe y' , puis l'axe z' .

⁽¹⁾ Remarquons que \bar{S} pourrait trouver *directement* x', y', z' (et t') par des mesures *physiques* effectuées au moyen de ses étalons de longueur et de temps, immobiles dans le champ de Minkowski considéré (*fig. 2*).

Dans un domaine spatial infiniment petit, nous pourrons remplacer ces axes curvilignes par les tangentes. Nous supposons, pour simplifier l'exposé, que le trièdre T' ainsi obtenu est trirectangle pour \bar{S} .

Au trièdre T' , nous *attacherons* le spectateur S' ; celui-ci ⁽¹⁾ utilisera les variables x', y', z', t' . Attacher S' au trièdre T' cela signifie que si un point est *immobile* par rapport à T' pendant $\delta t' \neq 0$, ce point sera dit *immobile* par rapport à S' ; au contraire, si pendant $\delta t' \neq 0$, un point est mobile par rapport à T' , ce point sera dit mobile par rapport à S' , pendant ce même laps de temps.

Le spectateur à \bar{S} utilise dans le champ de Minkowski qu'il étudie, la forme quadratique différentielle :

$$(26) \quad (\delta \bar{s})^2 = -(\delta \bar{x})^2 - (\delta \bar{y})^2 - (\delta \bar{z})^2 + (\bar{c})^2 (\delta \bar{t})^2,$$

tandis que S' exprimera ce même $(\delta \bar{s})^2$ de la manière suivante :

$$(27) \quad (\delta \bar{s})^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g'_{\alpha\beta} \delta x'_{\alpha} \delta x'_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Attachons aussi à T' et à S' un spectateur *physicien* \bar{S}' utilisant des étalons de longueur et de temps *fixes* par rapport à lui. Ce sont, par convention, *les étalons de \bar{S} emportés par \bar{S}'* . Admettons, avec Einstein, que, dans un certain domaine spatial et temporel infinitésimal, les mesures *physiques* effectuées par \bar{S}' fournissent des nombres $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ et \bar{t}' qui soient tels que la forme quadratique (27) puisse s'écrire

$$(28) \quad (\delta \bar{s})^2 = -(\delta \bar{x}')^2 - (\delta \bar{y}')^2 - (\delta \bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2 (\delta \bar{t}')^2.$$

Supposons en outre, avec Einstein, que

$$(28') \quad \bar{c}' = \bar{c};$$

autrement dit, les spectateurs \bar{S} et \bar{S}' trouvent la *même* vitesse de la lumière, dans leurs champs respectifs.

Dans le domaine spatial et temporel infiniment petit considéré,

(1) Le spectateur S' n'effectue pas de mesures physiques; c'est un spectateur ou mathématicien, inventé par \bar{S} , qui sert de liaison entre \bar{S} et \bar{S}' (voir ci-dessus éq. 28).

développons $g'_{\alpha\beta}$ en série de Taylor à partir de l'événement $(x'_1)_0, (x'_2)_0, (x'_3)_0, (x'_4)_0$. Nous aurons

$$g'_{\alpha\beta} = (g'_{\alpha\beta})_0 + \sum_{\gamma=1}^4 \left(\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'_\gamma} \right)_0 \delta' x'_\gamma + \dots,$$

où $(g'_{\alpha\beta})_0$ est la valeur de la fonction $g'_{\alpha\beta}$ pour cet événement $(x'_1)_0, (x'_2)_0, (x'_3)_0, (x'_4)_0$ et où les $\delta' x'_\gamma$ sont des infiniment petits dans le domaine considéré.

En négligeant dans le $(\delta\bar{s})^2$, écrit en (27), les infiniment petits d'ordre supérieur au second, on pourra considérer les $g'_{\alpha\beta}$ figurant dans cette forme quadratique, comme des *constantes*, à savoir $(g'_{\alpha\beta})_0$.

Pour passer de (27) à la forme quadratique (28), il suffira d'établir une correspondance *linéaire* entre les $\delta x'_1, \delta x'_2, \delta x'_3, \delta x'_4$, d'une part, et les $\delta\bar{x}', \delta\bar{y}', \delta\bar{z}', \delta\bar{t}'$, d'autre part; on sait, par la théorie des formes algébriques, que cette correspondance peut s'établir d'une infinité de manières différentes. Mais il est essentiel de remarquer ici que S' et \bar{S}' sont *fixes* l'un par rapport à l'autre; autrement dit, quand on aura $\delta x' = \delta y' = \delta z' \equiv 0$ et $\delta t' \neq 0$, il devra en résulter

$$\delta\bar{x}' = \delta\bar{y}' = \delta\bar{z}' \equiv 0 \text{ et } \delta\bar{t}' \neq 0.$$

et *réciroquement*.

Il en résulte que les $\delta x', \delta y'$ et $\delta z'$ *devront* s'exprimer linéairement en fonction des $\delta\bar{x}', \delta\bar{y}', \delta\bar{z}'$ *seulement* (le $\delta\bar{t}'$ *exclu*). On *devra* donc, à partir de la forme quadratique (27), procéder comme suit (1) :

$$(30) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv \sum_i \sum_j g'_{ij} \delta x'_i \delta x'_j - \left(\frac{\sum_i g'_{i4} \delta x'_i}{\sqrt{g'_{44}}} \right)^2 + \left(\frac{\sum_\alpha g'_{\alpha 4} \delta x'_\alpha}{\sqrt{g'_{44}}} \right)^2$$

($\alpha = 1, 2, 3, 4; i, j = 1, 2, 3$).

Remarquons que, dans (30), nous avons formé le carré parfait :

$$(31) \quad \left(\frac{\sum g'_{\alpha 4} \delta x'_\alpha}{\sqrt{g'_{44}}} \right)^2,$$

(1) TH. DE DONDER, *Interprétation physique de la relativité générale* (Ac. R. Belg., Cl. Sc., Bulletin décembre 1922, février et mars 1923).

et que cette formation n'est possible que d'une seule manière.

En identifiant (28) et (30), on aura univoquement

$$(32) \quad \boxed{\frac{\sum_{\alpha=1}^3 g'_{\alpha i} \delta x'_\alpha}{c' \delta \bar{t}'} = \frac{1}{\sqrt{g'_{44}}}}$$

et, dans un domaine spatial infinitésimal,

$$(33) \quad \boxed{-(\delta \bar{x}')^2 - (\delta \bar{y}')^2 - (\delta \bar{z}')^2 \equiv \sum_i \sum_j \left(g'_{ij} - \frac{g'_{i4} g'_{j4}}{g'_{44}} \right) \delta x'_i \delta x'_j}$$

($i, j = 1, 2, 3$).

La correspondance linéaire entre les $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, d'une part, et les $\delta \bar{x}'$, $\delta \bar{y}'$, $\delta \bar{z}'$, d'autre part, s'établira aisément grâce à la théorie des formes quadratiques ou de la géométrie analytique (cas de l'ellipsoïde). Avant d'étudier cette correspondance, arrêtons-nous à la relation (31).

Posons $\delta x'_1 = \delta x'_2 = \delta x'_3 = 0$; alors (33) donne $\delta \bar{x}'_1 = \delta \bar{x}'_2 = \delta \bar{x}'_3 = 0$, et la relation (32) devient

$$(34) \quad \boxed{\delta \bar{t}' = \frac{\sqrt{g'_{44}}}{c'} \delta t'}$$

La correspondance entre le temps \bar{t}' de \bar{S}' et le temps t' de S' sera donc donnée par

$$(35) \quad \bar{t}' - \bar{t}'_0 = \frac{1}{c'} \int_{t'_0}^{t'} \sqrt{g'_{44}} \delta t'$$

t'_0 et t' étant deux instants choisis par S' , et \bar{t}'_0 , t' les instants correspondants lus par \bar{S}' sur une horloge immobile par rapport à lui.

L'intégrale (35) a une valeur déterminée parce que x' , y' , z' sont fixes; la correspondance entre t' et \bar{t}' est donc univoque.

Remarquons aussi qu'en un même point pour S' et S' , deux événements simultanés pour S' sont aussi simultanés pour \bar{S}' . En effet, la formule (34) montre que $\delta t' = 0$ entraîne $\delta \bar{t}' = 0$. On savait déjà

que toute *coïncidence* pour S' doit être une coïncidence pour \bar{S}' , et réciproquement.

Par contre, *en deux points différents pour S'* , la simultanéité pour S' n'entraînera pas la simultanéité pour \bar{S}' . En effet, si nous considérons deux points infiniment voisins, où deux événements sont simultanés pour S' ($\delta t' = 0$), ces événements sont, pour \bar{S}' , séparés dans le temps par une durée

$$(36) \quad \delta \bar{t}' = \frac{\sum_{i=1}^3 g'_{i4} \delta x'_i}{c' \sqrt{g'_{44}}},$$

encore en vertu de (32).

Réciproquement, à la simultanéité, en deux points différents pour \bar{S}' c'est-à-dire à $\delta \bar{t}' = 0$, correspond la non-simultanéité pour S' . On aura, en vertu de (32),

$$(37) \quad \sum_{\alpha=1}^4 g'_{\alpha 4} \delta x'_\alpha = 0$$

ou

$$(38) \quad \delta t' = \frac{-\sum_{i=1}^3 g'_{i4} \delta x'_i}{g'_{44}}.$$

Rappelons, (25), que \bar{S} et S' emploient la même variable $\bar{t} = t'$.

Retournons maintenant au problème de réduction formulé par (33), et posons

$$(39) \quad c'_{ij} \equiv -g'_{ij} + \frac{g'_{i4} g'_{j4}}{g'_{44}} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

On a

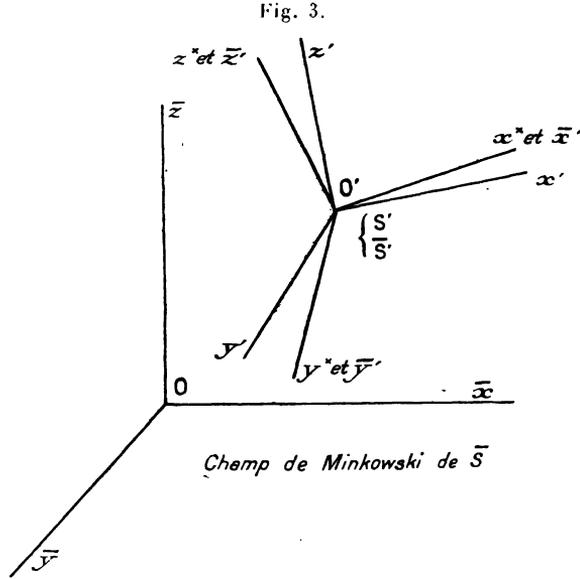
$$c'_{ij} = c'_{ji}.$$

Dans le domaine spatial infiniment petit de S' , et pendant un temps infiniment petit, les c'_{ij} peuvent, en première approximation, être traités comme des constantes.

La forme quadratique, qui figure dans le second membre de (33), s'écrira

$$(40) \quad \sum_i \sum_j c'_{ij} \delta x'_i \delta x'_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Dans le domaine spatial infiniment petit autour de O' considéré ci-dessus, traçons, toujours avec O' comme origine, un autre trièdre trirectangle euclidien x^*, y^*, z^* ; posons $x^* \equiv x_1^*, y^* \equiv x_2^*, z^* \equiv x_3^*$.



Effectuons alors sur la forme (40) la substitution orthogonale

$$(42) \quad x'_i = \sum_j x_j^* \cos(x'_i, x_j^*) \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

qui transformera (40) en une forme quadratique de $\delta x_1^*, \delta x_2^*$ et δx_3^* . Choisissons le trièdre O' (x^*, y^*, z^*) de manière que cette forme quadratique soit exempte de termes rectangles; on aura alors, dans le domaine infiniment petit autour de O' et à l'instant t' (ou \bar{t}) considéré,

$$(43) \quad (\delta \bar{x}')^2 + (\delta \bar{y}')^2 + (\delta \bar{z}')^2 \equiv s_1^* (\delta x^*)^2 + s_2^* (\delta y^*)^2 + s_3^* (\delta z^*)^2;$$

s_1^*, s_2^*, s_3^* sont les racines de l'équation

$$(44) \quad \begin{vmatrix} c'_{11} - s^* & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} - s^* & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} - s^* \end{vmatrix} = 0;$$

elles sont, comme on sait, toutes réelles et *positives*, parce que la forme (40) est symétrique et définie positive.

De (43), résulte

$$(45) \quad \delta \bar{x}' = \sqrt{s_1^*} \delta x^*, \quad \delta \bar{y}' = \sqrt{s_2^*} \delta y^*, \quad \delta \bar{z}' = \sqrt{s_3^*} \delta z^*.$$

En intégrant sous la condition que x^* et \bar{x}' s'annulent ensemble, et de même pour y^* et \bar{y}' , z^* et \bar{z}' , on aura toujours *dans le domaine spatial infinitésimal considéré, à l'instant t' ,*

$$(46) \quad \boxed{\bar{x}' \equiv x^* \sqrt{s_1^*}; \quad \bar{y}' = y^* \sqrt{s_2^*}; \quad \bar{z}' = z^* \sqrt{s_3^*}.}$$

En résumé, dans le domaine infiniment petit spatial et temporel considéré, nous avons établi une *correspondance* biunivoque et réciproque entre les nombres (x', y', z', t') utilisés par S' et les nombres $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}')$ utilisés par \bar{S}' . Rappelons-nous qu'entre les nombres $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ utilisés par \bar{S} et les nombres (x', y', z', t') utilisés par S' , il existe, en vertu de (25), une *correspondance* biunivoque et réciproque, dans ce même domaine infinitésimal autour de (x', y', z', t') . Donc, enfin, il existe une *correspondance* biunivoque et réciproque entre les nombres $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ utilisés par \bar{S} et les nombres $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}')$ utilisés par \bar{S}' .

12. Contraction de Lorentz généralisée. — Pour fixer les idées, considérons avec \bar{S} ou S' , à l'instant \bar{t} ou t' , un vecteur infiniment petit localisé sur l'axe des x^* ou des \bar{x}' . La première formule (46) montre que le spectateur \bar{S}' obtiendra, pour le module de ce vecteur, un nombre $\sqrt{s_1^*}$ fois plus grand que celui trouvé par le spectateur S' et, par conséquent, par le spectateur \bar{S} aussi. Il en résulte, que \bar{S} dira que l'étalon de longueur de \bar{S}' est $\sqrt{s_1^*}$ fois plus petit que le sien. C'est, par définition, la *contraction de Lorentz généralisée*; elle est, en général, de grandeur différente suivant l'orientation donnée à l'étalon par rapport au système de référence.

Si le spectateur S' , dans son domaine infiniment petit, considère une sphère de rayon \bar{r}' et de centre A, il écrira, pour l'équation de cette sphère,

$$(47) \quad (\bar{x}')^2 + (\bar{y}')^2 + (\bar{z}')^2 = (\bar{r}')^2.$$

Traduisons cette équation dans le langage de \bar{S} , à l'aide des relations (46);

elle devient

$$(48) \quad s_1^2 x^{*2} + s_2^2 y^{*2} + s_3^2 z^{*2} = (\bar{r}')^2,$$

et \bar{S} dira qu'il observe un ellipsoïde infiniment petit.

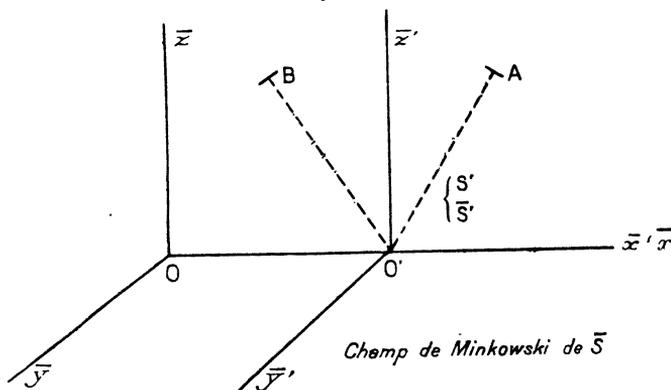
13. Dilatation d'Einstein généralisée. — Retournons à l'équation (33): celle-ci a été établie dans l'hypothèse $\partial x' = \partial y' = \partial z' = 0$, à laquelle correspond, comme nous l'avons vu, $\partial \bar{x}' = \partial \bar{y}' = \partial \bar{z}' = 0$. Ainsi, $\delta t'$ est un intervalle de temps infiniment petit déterminé par S' en un point immobile par rapport à son système de référence, et $\delta \bar{t}'$ l'intervalle de temps correspondant lu par \bar{S}' sur une horloge également immobile par rapport à ce système. Supposons $\sqrt{g'_{44}} < c$; alors, de

$$(49) \quad \delta \bar{t}' = \frac{c}{\sqrt{g'_{44}}} \delta t'.$$

il suit que $\delta \bar{t}' < \delta t'$. Ainsi, le spectateur \bar{S} dira que l'étalon de temps utilisé par \bar{S}' est $\frac{c}{\sqrt{g'_{44}}}$ fois plus grand que le sien. C'est la *dilatation d'Einstein généralisée*. Elle peut aussi s'exprimer en disant que \bar{S} voit les horloges de \bar{S}' retarder sur les siennes; \bar{S} attribuera cet effet au mouvement des horloges de \bar{S}' dans le champ de Minkowski qu'il explore.

14. Translation rectiligne et uniforme du trièdre T' dans le champ de Minkowski de \bar{S} ou la relativité restreinte. — Supposons

Fig. 4.



que le système de référence $O'(x', y', z')$ soit un trièdre euclidien T' animé par rapport à T d'un mouvement rectiligne et uniforme,

parallèle à l'axe Ox . Soit \bar{v} la vitesse de ce mouvement, mesurée par \bar{S} , et compté positivement dans le sens des \bar{x} croissants. En supposant les axes $O'x', O'y'$ de T' respectivement parallèles à $O\bar{x}, O\bar{y}$ de T , et l'origine O' sur l'axe $O\bar{x}$, les équations (25) seront ici

$$(50) \quad \begin{cases} \bar{x} = x' + \bar{v}t', \\ \bar{y} = y', \\ \bar{z} = z', \\ \bar{t} = t'. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans (26) donne

$$(51) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv -(\delta\bar{x}')^2 - (\delta y')^2 - (\delta z')^2 + ((\bar{c})^2 - (\bar{v})^2)(\delta t')^2 - 2\bar{v}\delta\bar{x}'\delta t',$$

forme qui correspond à (27) pour les valeurs suivantes des $g'_{\alpha\beta}$:

$$(52) \quad g'_{11} = g'_{22} = g'_{33} = -1, \quad g'_{44} = (\bar{c})^2 - (\bar{v})^2, \quad g'_{14} = -\bar{v},$$

tandis que les autres $g'_{\alpha\beta}$ sont *nuls* ⁽¹⁾. Par suite, en posant

$$(53) \quad \beta \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v})^2}{(\bar{c})^2}}},$$

les formules (31) et (32) donnent

$$(54) \quad \delta\bar{x}' = \beta\delta x', \quad \delta y' = \delta y', \quad \delta z' = \delta z', \quad \delta t' = \frac{\delta t}{\beta} - \frac{\beta\bar{v}}{(\bar{c})^2}\delta x',$$

⁽¹⁾ Remarquons, en passant, que la vitesse de la lumière v' , calculée par S' , est donnée par $d\bar{s}^2 = 0$, ou, (51).

$$\left(\frac{\delta x'}{\delta t'}\right)^2 + \left(\frac{\delta y'}{\delta t'}\right)^2 + \left(\frac{\delta z'}{\delta t'}\right)^2 - 2\bar{v}\frac{\delta x'}{\delta t'} - ((\bar{c})^2 - (\bar{v})^2) = 0,$$

ou encore, en désignant par α l'inclinaison de la direction de propagation sur la direction de la translation,

$$v'^2 - 2\bar{v}v'\cos\alpha - ((\bar{c})^2 - (\bar{v})^2) = 0.$$

Dans la direction de la translation, on a $v' = \bar{c} \pm \bar{v}$; dans les sens perpendiculaires à la translation, on a $v' = \sqrt{(\bar{c})^2 - (\bar{v})^2}$.

d'où, avec la condition que \bar{x}' et x' s'annulent ensemble, ainsi que \bar{y}' et y' , \bar{z}' et z' , \bar{t}' et t' (pour $x' = 0$),

$$(55) \quad \bar{x}' = \beta x', \quad \bar{y}' = y', \quad \bar{z}' = z', \quad \bar{t}' = \frac{t'}{\beta} - \frac{\beta \bar{v}}{(c)^2} x'.$$

Remarquons qu'ici la correspondance établie par les formules (55) n'est pas limitée à un domaine spatial infiniment petit. Les formules (55) sont donc *rigoureusement* valables dans tout l'espace euclidien x', y', z' et pour tous les temps t' de S' .

De (55), on déduit immédiatement, dans ce cas particulier, la contraction de Lorentz et la dilatation d'Einstein.

En vertu de (50), les équations (55) peuvent s'écrire

$$(57) \quad \boxed{\bar{x}' = \beta(\bar{x} - \bar{v}\bar{t}), \quad \bar{y}' = \bar{y}, \quad \bar{z}' = \bar{z}, \quad \bar{t}' = \beta\left(\bar{t} - \frac{\bar{v}\bar{x}}{(c)^2}\right)}.$$

Inversement, on aura

$$(58) \quad \boxed{\bar{x} = \beta(\bar{x}' + \bar{v}\bar{t}'), \quad \bar{y} = \bar{y}', \quad \bar{z} = \bar{z}', \quad \bar{t} = \beta\left(\bar{t}' + \frac{\bar{v}\bar{x}'}{(c)^2}\right)}.$$

Les équations (57) ou (58) définissent la *transformation de Lorentz* (1). La méthode générale ici employée pour les obtenir montre que ces transformations forment un *groupe*, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier par le calcul (*voir* la remarque II ci-après).

En vertu des équations (57) ou (58), on aura dans tout l'espace et pour tout temps

$$(59) \quad \begin{aligned} (\delta\bar{s})^2 &\equiv -(\delta\bar{x})^2 - (\delta\bar{y})^2 - (\delta\bar{z})^2 + (\bar{c})^2(\delta\bar{t})^2 \\ &\equiv -(\delta\bar{x}')^2 - (\delta\bar{y}')^2 - (\delta\bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2(\delta\bar{t}')^2 \end{aligned}$$

avec $\bar{c} = \bar{c}'$.

Il en résulte que le spectateur \bar{S}' pourra, à la suite de ses expé-

(1) J.-J. LARMOR, *Aether and Matter*, Cambridge, 1900, p. 167-177. — H. A. LORENTZ, *Verh. Ak. Amst.*, 12, 1904, p. 986. — H. POINCARÉ, *C. R. Acad. Sc.*, 140, 1905, p. 1504. — A. EINSTEIN, *Ann. d. Phys.*, 17, 1905, p. 891. — Voir aussi VOIGT, *Ueber das Doppler'sche Prinzip* (Gött. Nachr., 1887).

riences, affirmer, avec autant de raison que \bar{S} , que le vide dans lequel il a fait ses mesures est de Minkowski.

En résumé, aucun de ces spectateurs \bar{S} , \bar{S}' , ..., animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, ne pourra, à la suite de ses mesures de longueur et de temps, affirmer que *seul* son vide est de Minkowski; on dira aussi qu'aucun des trièdres T, T' ... n'est *privilegié*. C'est là le sens philosophique qu'il faut attacher à l'expression : *relativité restreinte*.

CONTRACTION DE LORENTZ ET DILATATION D'EINSTEIN :

Considérons, avec \bar{S} , deux points sur l'axe $O\bar{x}$, ayant pour abscisses \bar{x}_1 et \bar{x}_2 , *au même instant* \bar{t} . En vertu de la première équation (57), on aura

$$(60) \quad \boxed{\bar{x}'_1 - \bar{x}'_2 = \beta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}.$$

Si les deux points considérés sont *au repos par rapport à* \bar{S}' , le spectateur \bar{S} dira que \bar{S}' trouve un nombre β fois *plus grand* que celui qu'il a trouvé lui-même, parce que l'étalon de longueur utilisé par \bar{S}' est devenu β fois *plus petit* que le sien. \bar{S} dira aussi que l'étalon de longueur, entraîné dans le système de \bar{S}' , a subi *la contraction de Lorentz*.

Considérons, avec \bar{S}' , un point d'abscisse \bar{x}' , à deux instants différents \bar{t}'_1 et \bar{t}'_2 . En vertu de la dernière équation de (58), on aura

$$(61) \quad \boxed{\bar{t}'_1 - \bar{t}'_2 = \frac{1}{\beta}(\bar{t}_1 - \bar{t}_2)}.$$

Le spectateur \bar{S} dira que l'étalon de temps, entraîné dans le système de \bar{S}' , a subi *la dilatation d'Einstein* ⁽¹⁾, ou encore, que l'horloge utilisée par \bar{S}' marche β fois *plus lentement* que la sienne.

⁽¹⁾ A. EINSTEIN, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Ann. der Phys., 17, 1905, § 4). — Voir aussi H. POINCARÉ, *La théorie de Lorentz et le principe de la réaction* (Archives néerlandaises, 1900). — P. LANGEVIN, *L'évolution de l'espace et du temps* (Scientia, 10, 1911, p. 31).

Expérience (1) de Michelson-Morley :

Représentons par O'A et O'B (voir *fig. 4*) les deux bras *égaux*, d'après \bar{S}' , de l'appareil (2) utilisé par Michelson et Morley. Si nous désignons par \bar{a} et \bar{b} les mesures de ces bras obtenues par \bar{S}' , on aura donc $\bar{a} = \bar{b}$. Or, d'après (28'), on a, en outre, $\bar{c}' \equiv \bar{c}$ quelle que soit la direction du rayon lumineux considéré par \bar{S}' . Il en résulte que

$$\frac{\bar{a}}{\bar{c}'} = \frac{\bar{b}}{\bar{c}'};$$

autrement dit, *les durées de marche des rayons O'AO' et O'BO' seront les mêmes, pour \bar{S}'* . Il en résulte que l'expérience de Michelson ne peut déceler le mouvement de translation rectiligne et uniforme de \bar{S}' par rapport à \bar{S} .

Entrânement partiel des ondes ou loi de Fizeau (3) :

Dérivons la première des relations (58) par rapport à \bar{t} et la dernière par rapport à \bar{t}' . On obtient

$$(62) \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \beta \left(\frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} + \bar{v} \right) \frac{d\bar{t}'}{d\bar{t}}$$

et

$$(63) \quad \frac{d\bar{t}}{d\bar{t}'} = \beta \left(1 + \frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} \right).$$

En substituant $\frac{d\bar{t}'}{d\bar{t}}$, tirée de cette équation (63), dans l'équation (62), on

(1) MICHELSON, *American Journal of Sciences*, 3^e série, 22, 1881, p. 120. — MICHELSON et MORLEY, *American Journal of Sciences*, 3^e série, 34, 1887, p. 333; *Phil. Mag.*, 5^e série, 24, 1887, p. 449. — H.-A. LORENTZ, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Leiden, 1895), § 89-92.

Au point de vue historique, retenons la remarque suivante faite par Lorentz lors de la réimpression d'une partie de son Mémoire (Teubner, 1920. *Das Relativitätsprinzip*) :

« Wie Herr Fitzgerald mir freundlichst mitteilte, hat er seine Hypothese schon seit längerer Zeit in seine Vorlesungen behandelt. In der Literatur habe ich dieselbe nur bei Herrn Lodge, in der Abhandlung « Aberration problems » (London, *Phil. Trans.*, 184, A, 1893, p. 727), erwähnt gefunden. »

(2) Pour la description de ces appareils, voir par exemple H. OLLIVIER, *Cours de Physique générale*, t. III, 1923, p. 386.

(3) Pour les détails expérimentaux, voir par exemple H. OLLIVIER, *Cours de Physique générale*, t. III, 1923, p. 655.

obtient le *théorème d'Einstein* ⁽¹⁾ relatif à la composition des vitesses, à savoir

$$(64) \quad \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} + \bar{v}}{1 + \frac{\bar{v}}{c} \frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'}}.$$

Dans l'expérience de Fizeau, la vitesse du liquide dans le tube sera, par \bar{S} , désignée par \bar{v} . La vitesse de la lumière dans ce liquide par rapport au spectateur \bar{S}' entraîné par ce liquide sera $\frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} = \frac{\bar{c}'}{\bar{n}'}$, en désignant par \bar{n}' l'indice de réfraction ⁽²⁾ du liquide *immobile*; la vitesse de la lumière par rapport au spectateur immobile \bar{S} sera $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{c}{n}$, en désignant par \bar{n} l'indice de réfraction du liquide *en mouvement*; on aura donc, en se rappelant que $\bar{c}' = \bar{c} = c$,

$$(65) \quad \frac{c}{\bar{n}} = \frac{\frac{c}{\bar{n}'} + \bar{v}}{1 + \frac{\bar{v}}{c} \frac{1}{\bar{n}'}} ,$$

ou approximativement

$$(66) \quad \frac{c}{\bar{n}} \sim \frac{c}{\bar{n}'} + \bar{v} \frac{(\bar{n}')^2 - 1}{(\bar{n}')^2}.$$

C'est la loi de Fizeau ou l'entraînement partiel des ondes.

Remarque I. — La lumière observée par \bar{S} sera encore éprouvée comme lumière par le spectateur entraîné \bar{S}' . Il en résulte que quand \bar{S} trouve

$$(67) \quad -(\delta\bar{x})^2 - (\delta\bar{y})^2 - (\delta\bar{z})^2 + (\bar{c})^2(\delta\bar{t})^2 = 0,$$

le spectateur \bar{S}' trouvera

$$(68) \quad -(\delta\bar{x}')^2 - (\delta\bar{y}')^2 - (\delta\bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2(\delta\bar{t}')^2 = 0,$$

en représentant par \bar{c}' la vitesse observée physiquement par \bar{S}' à l'aide des étalons de longueur et de temps que \bar{S} lui a remis et que \bar{S}' a emportés avec lui.

En général, on aura donc, pour l'intervalle de deux événements quel-

⁽¹⁾ A. EINSTEIN, *Zur Electrodynamik bewegter Körper* (*Ann. der Physik.* 17, 1905).

⁽²⁾ Rappelons que l'indice (absolu) de réfraction d'un milieu pondérable est égal au rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse de la lumière dans ce milieu.

conques $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ et $(\bar{x} + \delta\bar{x}, \bar{y} + \delta\bar{y}, \bar{z} + \delta\bar{z}, \bar{t} + \delta\bar{t})$, observés par \bar{S} ,

$$(69) \quad \begin{aligned} (\delta\bar{s})^2 &\equiv -(\delta\bar{x})^2 - (\delta\bar{y})^2 - (\delta\bar{z})^2 + (\bar{c})^2(\delta\bar{t})^2 \\ &= k \left[-(\delta\bar{x}')^2 - (\delta\bar{y}')^2 - (\delta\bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2(\delta\bar{t}')^2 \right], \end{aligned}$$

où k est une fonction encore indéterminée de la vitesse v (1).

En reprenant les calculs indiqués ci-dessus, dans le cas où \bar{S}' est animé par rapport à \bar{S} et d'après celui-ci, d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse \bar{v} , on trouve

$$(70) \quad \bar{x}' = k\beta x', \quad \bar{y}' = k y', \quad \bar{z}' = k z', \quad \bar{c}'\bar{t}' = k \left(-\beta \frac{v}{c} x' + \frac{\bar{c}}{\beta} t' \right),$$

où β est encore donné par (53).

Il en résulte immédiatement que la contraction de Lorentz devient

$$(71) \quad \delta\bar{x}' = k\beta \delta x', \quad \delta\bar{y}' = k \delta y', \quad \delta\bar{z}' = k \delta z'.$$

Des deux dernières relations précédentes, on déduit par raison de symétrie que

$$(72) \quad k(\bar{v}) = k(-\bar{v}).$$

La dilatation d'Einstein est donnée par

$$\bar{c}'\delta\bar{t}' = k \frac{\bar{c}}{\beta} \delta t'.$$

Retournons aux variables utilisées par \bar{S} ; il viendra

$$(73) \quad \bar{x}' = k\beta(x - \bar{v}t), \quad \bar{y}' = k y, \quad \bar{z}' = k z, \quad \bar{c}'\bar{t}' = k\bar{c}\beta \left(-\frac{\bar{v}}{c^2}x + t \right).$$

En dérivant ces relations par rapport à \bar{t}' , on trouve

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} &= \frac{\bar{c}'}{c} \frac{\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} - \bar{v}}{1 - \frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}}, & \frac{d\bar{y}'}{d\bar{t}'} &= \frac{\bar{c}'}{c\beta} \frac{\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}}{1 - \frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}}, \\ \frac{d\bar{z}'}{d\bar{t}'} &= \frac{\bar{c}'}{c\beta} \frac{\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}}{1 - \frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}}. \end{aligned} \right.$$

(1) Pour plus de renseignements à ce sujet on est prié de se reporter au Mémoire de H. BATEMAN, *The Transformation of the electro-dynamical equations* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, 2^e série, vol. 8).

Les équations (73) permettent de passer du spectateur \bar{S} au spectateur \bar{S}' . Passons maintenant du spectateur \bar{S}' à un spectateur \bar{S}'' qui, d'après \bar{S}' , serait animé, par rapport à celui-ci, d'une vitesse de translation $\frac{d\bar{x}'}{d\bar{t}'} = \bar{c}'$. Le passage de \bar{S}' à \bar{S}'' sera donné par

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'' = k' \beta' (\bar{x}' - \bar{v}' \bar{t}'), \quad \bar{y}'' = k' \bar{y}', \quad \bar{z}'' = k' \bar{z}', \\ \bar{c}'' \bar{t}'' = k' \bar{c}' \beta' \left[-\frac{\bar{c}'}{(\bar{c}')^2} \bar{x}' - \bar{t}' \right], \end{array} \right.$$

avec

$$(76) \quad \beta' \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v}')^2}{(\bar{c}')^2}}}.$$

Supposons que $\bar{v}' = -\bar{v} \frac{\bar{c}'}{c}$; d'où, en vertu de (74), on tire $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = 0$; ainsi, on retourne au spectateur \bar{S} .

On aura alors $\bar{x}'' = \bar{x}$, $\bar{y}'' = \bar{y}$, $\bar{z}'' = \bar{z}$, $\bar{t}'' = \bar{t}$. Si nous nous reportons aux équations (75), nous voyons que

$$(77) \quad k k' = 1,$$

ou, plus explicitement.

$$(78) \quad k(c) k \left(-\bar{v} \frac{\bar{c}'}{c} \right) = 1.$$

Cette relation ne suffit pas pour déterminer la fonction k . Pour sortir de cette indétermination, il faut faire une nouvelle hypothèse: admettons, comme précédemment, que

$$(79) \quad \bar{c}' = \bar{c};$$

d'où, (72),

$$(80) \quad k = 1.$$

Remarque II. — Les transformations (73) forment un groupe ⁽¹⁾.

En effet, remplaçons dans (73), \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' , \bar{t}' par leurs valeurs fournies par (73);

⁽¹⁾ H. POINCARÉ. *Sur la Dynamique de l'Électron* (Rendiconti Circolo matematico Palermo, 23 juillet 1905, p. 129 à 175).

il viendra

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'' = kk' \beta \beta' \left[(\bar{x} - \bar{v} \bar{t}) - \frac{\bar{v}' \bar{c}}{\bar{c}'} \left(-\frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \bar{x} + \bar{t} \right) \right], \quad \bar{y}'' = kk' \bar{y}', \quad \bar{z}'' = kk' \bar{z}. \\ \bar{c}'' \bar{t}'' = kk' \bar{c}' \beta \beta' \left[-\frac{\bar{v}'}{(\bar{c}')^2} (\bar{x} - \bar{v} \bar{t}) + \frac{\bar{c}}{\bar{c}'} \left(-\frac{\bar{v}}{(\bar{c})^2} \bar{x} + \bar{t} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Mais en vertu de (73), le spectateur \bar{S} pourra écrire *directement* les relations suivantes :

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'' = k'' \beta'' (\bar{x} - \bar{v}'' \bar{t}), \quad \bar{y}'' = k'' \bar{y}', \quad \bar{z}'' = k'' \bar{z}, \\ \bar{c}'' \bar{t}'' = k'' \bar{c}' \beta'' \left(-\frac{\bar{v}''}{(\bar{c}')^2} \bar{x} + \bar{t} \right), \end{array} \right.$$

dans lesquelles nous avons désigné par \bar{v}'' la vitesse de \bar{S}'' par rapport à \bar{S} , et où nous avons posé

$$(83) \quad \bar{c}'' = \frac{1}{\left| \sqrt{1 - \frac{(\bar{v}'')^2}{(\bar{c}')^2}} \right|}.$$

La première relation (74) peut s'écrire ici

$$(84) \quad \bar{v}' = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} \frac{\bar{v}'' - \bar{v}}{1 - \frac{\bar{v}'' \bar{v}}{(\bar{c}')^2}}.$$

Identifions (81) et (82); d'où

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} k'' \beta'' = kk' \beta \beta' \left(1 + \frac{\bar{v}' \bar{v}}{\bar{c}' \bar{c}} \right), \quad k'' \beta'' \bar{v}'' = kk' \beta \beta' \left(\bar{v} + \frac{\bar{c} \bar{v}'}{\bar{c}'} \right), \\ k'' \frac{\bar{c}'' \bar{v}''}{\bar{c}'} = \beta \beta' \left(\frac{\bar{v}'}{\bar{c}'} - \frac{\bar{v}}{\bar{c}} \right), \quad kk' \bar{c}' \beta'' = \beta \beta' \left(\frac{\bar{v} \bar{v}'}{\bar{c}'} + \bar{c} \right). \end{array} \right.$$

En vertu de (84) et de

$$(86) \quad k'' = kk',$$

ces relations (85) sont *identiquement satisfaites*.

15. Mouvement quelconque du trièdre T' dans le champ de Minkowski de \bar{S} . — Établissons entre $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ et x', y', z', t' la correspondance suivante, où les x'_i, x''_i sont des fonctions données quel-

conques de \bar{t} ou de t' :

$$(87) \quad \begin{cases} \bar{x}_i = \bar{x}_i^0 + \sum_j x'_j \cos(\bar{x}_i, x'_j) \\ \bar{t} = t' \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Les \bar{x}_i^0 sont les coordonnées ⁽¹⁾, par rapport au trièdre T, de l'origine O' du trièdre mobile T', à l'instant \bar{t} . Les équations (87) définissent le mouvement le plus général, mesuré par \bar{S} , du trièdre T' par rapport à T.

On aura, à tout instant, la relation d'orthogonalité

$$(88) \quad \sum_i \cos(\bar{x}_i, x'_j) \cos(\bar{x}_i, x'_k) = \varepsilon_j^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

où $\varepsilon_j^j \equiv 1$ pour $j \equiv k$ et $\varepsilon_j^k \equiv 0$ pour $j \neq k$. Les conditions (88) sont nécessaires et suffisantes pour avoir

$$(89) \quad (\delta\bar{x})^2 + (\delta\bar{y})^2 + (\delta\bar{z})^2 = (\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2.$$

A cause de (89), la relation (27) prendra la forme

$$(90) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv -(\delta x')^2 - (\delta y')^2 - (\delta z')^2 \\ + 2g'_{11} \delta x' \delta t' + 2g'_{21} \delta y' \delta t' + 2g'_{31} \delta z' \delta t' + g'_{44} (\delta t')^2.$$

Or, les $\cos(\bar{x}_i, x'_j)$ étant des fonctions de t seulement, on a, en vertu de (87),

$$(91) \quad \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x'_i} = \cos(\bar{x}_\alpha, x'_i) \quad (i, \alpha = 1, 2, 3);$$

de sorte que la covariance

$$(92) \quad g'_{i\alpha} \equiv \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x'_i} \frac{\partial \bar{x}_\beta}{\partial x'_i} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2, 3)$$

devient, avec les valeurs $g_{\alpha\beta}$ de (26),

$$(93) \quad g'_{i\alpha} \equiv - \sum_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t'} \cos(\bar{x}_j, x'_i) = -(\bar{v}_e)_{x'_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

(1) Tous les nombres \bar{x}_i^0 , $\cos(\bar{x}_i, x'_j)$, x'_j peuvent être obtenus directement et physiquement par \bar{S} dans son champ de Minkowski.

en désignant par $(\bar{v}_e)_x x'_i$ la projection orthogonale, sur l'axe $O'x'_i$, de la vitesse d'entraînement \bar{v}_e du trièdre T' par rapport au trièdre T au point x'_1, x'_2, x'_3 . En outre,

$$(94) \quad s'^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t'} \frac{\partial \bar{x}_{\beta}}{\partial t'} = (\bar{c})^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x'_i}{\partial t'} \right)^2 = (\bar{c})^2 - (\bar{v})^2.$$

En substituant dans (90), on obtient donc

$$(95) \quad (\delta \bar{s})^2 = (\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2 - 2(\bar{v}_e)_x \delta x' \delta t' \\ - 2(\bar{v}_e)_y \delta y' \delta t' - 2(\bar{v}_e)_z \delta z' \delta t' + ((\bar{c})^2 - (\bar{v})^2) (\delta t')^2.$$

Posons

$$(96) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v}_e)^2}{(\bar{c})^2}}};$$

(91) devient

$$(97) \quad \delta t' = \frac{\delta t}{\beta} - \frac{\beta}{(\bar{c})^2} [(\bar{v}_e)_x \delta x' + (\bar{v}_e)_y \delta y' + (\bar{v}_e)_z \delta z'].$$

Représentons par \bar{v}_e le vecteur vitesse d'entraînement du trièdre T' par rapport au trièdre T au point x', y', z' ; par \bar{v}_r le vecteur vitesse d'entraînement *de rotation* de T' par rapport à T au même point; par r' le vecteur mené du point O' au point (x', y', z') ; par R le vecteur mené de O vers (x', y', z') . Alors on déduit de (97), en intégrant dans un domaine spatial infinitésimal et pendant un laps de temps infiniment petit, la constante d'intégration étant convenablement déterminée, la formule suivante, valable en première approximation :

$$(98) \quad \bar{t}' = \beta \left\{ \left[1 - \frac{(\bar{v}_e \bar{v}_r)}{(\bar{c})^2} \right] \bar{t} - \frac{(\bar{v}_e R)}{(\bar{c})^2} \right\}.$$

Dans le cas d'une translation rectiligne et uniforme, (98) se réduit à la formule vectorielle établie par G. Herglotz (1).

Si l'on applique à l'expression (95) la méthode résumée dans les formules (39) à (46), on trouve que l'équation en s devient, en

(1) *Annalen der Physik*, 36, 1911, p. 497.

posant $s - 1 = \frac{\beta^2}{(c)^2} \sigma$,

$$(99) \quad \sigma^2(\sigma - c_r^2) = 0;$$

les racines s sont donc

$$(100) \quad s_1 = \beta^2, \quad s_2 = s_3 = 1.$$

Par suite, les équations (46) deviennent

$$(101) \quad \begin{cases} \bar{x}' \equiv \beta x^*, \\ \bar{y}' \equiv y^*, \\ \bar{z}' \equiv z^*. \end{cases}$$

On retrouve, en première approximation, les formules (55) de la relativité restreinte. Il y aura donc contraction de Lorentz dans le sens du mouvement, et pas de contraction, dans un plan perpendiculaire au mouvement.

Les formules (98) et (101), qui permettent de passer des variables de \bar{S} aux variables de \bar{S}' , deviennent *rigoureuses* dans le cas de la translation rectiligne et uniforme du trièdre T' par rapport au trièdre T . On peut démontrer que *c'est le seul cas où cela arrive; ainsi s'explique le rôle exceptionnel que la Relativité restreinte joue dans la Relativité générale.*

16. Rotation uniforme dans le champ de Minkowski. — Considérons un trièdre animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe coïncidant avec l'axe Oz .

Le spectateur \bar{S} écrira pour l'équation de la circonférence de centre O et de rayon $\bar{\rho}$

$$(102) \quad (\bar{x})^2 + (\bar{y})^2 = (\bar{\rho})^2.$$

Appliquons les relations (101); le plan $z^* = 0$ coïncide avec le plan $\bar{z} = 0$; l'axe des x^* est tangent à la circonférence (102); l'axe des y^* est perpendiculaire à cette tangente au point de contact.

On aura donc

$$(104) \quad \delta \bar{x}' = \beta \delta x^*, \quad \delta \bar{y}' = \delta y^*, \quad \delta \bar{z}' = \delta z^*.$$

Si \bar{S}' effectue ses mesures le long de la circonférence C (102), il obtiendra,

en chaque point, $\partial \bar{y}' = \partial \bar{z}' = 0$, et l'arc élémentaire $\partial \bar{s}'$ sera égal à $\partial \bar{x}'$. Il trouvera donc pour la longueur de la circonférence, mesurée avec son étalon physique, la valeur

$$(105) \quad \int_C \partial \bar{s}' = \beta \int_C \partial x^* = \beta \cdot 2\pi \bar{\rho}.$$

Si \bar{S}' effectue ses mesures le long d'un diamètre D, il trouvera, pour la longueur de ce dernier,

$$(106) \quad \int_D \partial y' = \int_D \partial y^* = 2\bar{\rho};$$

le rapport de ces deux nombres est $\pi\beta$, et sera donc plus grand que $\pi = 3,14159\dots$

Cet exemple célèbre est dû à Einstein (1).

Appliquons également la formule (97) au cas du *mouvement circulaire uniforme*. On a ici, $\bar{\omega}$ désignant la vitesse angulaire, mesurée par \bar{S} ,

$$(107) \quad (\bar{v}_e)_{x'} = -\bar{\omega} y', \quad (\bar{v}_e)_{y'} = \bar{\omega} x', \quad (\bar{v}_e)_{z'} = 0.$$

Donc

$$(108) \quad \partial t' = \frac{\partial t}{\beta} - \frac{\beta \bar{\omega}}{(c)^2} (x' \partial y' - y' \partial x').$$

En faisant $\partial x' = \partial y' = 0$, on retrouve la dilatation du temps : en un point donné, fixe par rapport au trièdre mobile, un intervalle de temps égal à $\partial \bar{t}'$ pour \bar{S}' sera estimé par S' égal à $\partial t' = \beta \partial \bar{t}'$, nombre supérieur à $\partial \bar{t}'$; rappelons que $\bar{t} \equiv t'$; donc \bar{S} dira que l'horloge de \bar{S}' marche moins vite que la sienne.

De plus, il résulte de (108) que deux événements, *simultanés pour \bar{S}'* , et se passant en deux points infiniment voisins du trièdre mobile, sont séparés dans le temps, pour S' (ou pour \bar{S}), par une durée égale à

$$(109) \quad \partial \bar{t} \quad \text{ou} \quad \partial t' = \frac{\beta^2 \bar{\omega}}{(c)^2} (x' \partial y' - y' \partial x'),$$

où

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{\omega}^2 r'^2)}{(c)^2}}},$$

avec

$$r'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Ce résultat permet d'interpréter l'expérience ci-après.

(1) A. EINSTEIN, *The meaning of the Relativity* (Methuen London, 1922) p. 67.

L'expérience de Sagnac. — G. Sagnac a exécuté l'expérience suivante. Deux rayons lumineux, issus d'une même source, sont amenés à interférence après avoir parcouru, en sens opposés, un même circuit fermé. Si l'on met en rotation la plate-forme qui porte l'ensemble du système optique, on constate un déplacement des franges correspondant à une différence $\frac{4\omega\bar{A}}{(c)^2}$ entre les

durées de parcours du circuit fermé, *dans les deux sens*; \bar{A} désigne l'aire limitée par la projection orthogonale du circuit fermé, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, et mesuré par \bar{S} quand la plate-forme est immobile par rapport au trièdre T.

Ce phénomène, par lequel Sagnac se proposa de mettre en évidence la réalité de l'éther, s'explique d'une manière simple au moyen de la formule (108). Le physicien qui observe les franges sans participer à la rotation, correspond à notre spectateur S (ou \bar{S}). Le spectateur \bar{S}' est immobile par rapport au plateau tournant.

Soient (x', y', z') et $(x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z')$ deux points infiniment voisins du circuit fermé décrit par la lumière: ces nombres sont donnés par S' (et par \bar{S}). L'aire du triangle ayant pour sommet le centre de la plate-forme et pour base la projection de la distance de ces deux points, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, vaudra, d'après S' (et d'après \bar{S}),

$$(110) \quad \delta A' = \frac{1}{2} (x' \delta y' - y' \delta x');$$

de sorte que (108) peut s'écrire

$$(111) \quad \delta \bar{t}' = \frac{\delta t'}{\beta} - \frac{2\beta\bar{\omega}}{(c)^2} \delta A'.$$

Rappelons qu'on a, en vertu de (50),

$$\delta t' = \delta \bar{t}.$$

Si nous désignons par $\delta \bar{t}$ la mesure, faite par \bar{S} , de l'intervalle de temps mis par la lumière pour aller de l'un à l'autre de ces deux points infiniment voisins, alors $\delta \bar{t}'$ sera l'intervalle correspondant mesuré par \bar{S}' .

Intégrant le long du circuit fermé, dans le sens positif, \bar{S}' trouvera, pour le temps mis par la lumière à parcourir ce circuit,

$$(112) \quad t'_1 = \frac{\bar{t}_1}{\beta} - \frac{2\beta\bar{\omega}}{(c)^2} A';$$

en intégrant dans le sens opposé, on a

$$(113) \quad \bar{t}'_2 = \frac{\bar{t}_2}{\beta} + \frac{2\beta\bar{\omega}}{(c)^2} A'.$$

Il en résulte que

$$(114) \quad \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \frac{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}{\beta} + 4 \frac{\beta \bar{\omega}}{c^2} A'.$$

Mais, pour \bar{S}' , la durée du parcours est *la même* dans les deux sens (isotropie de la lumière); par suite, $\bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 0$, et il vient

$$(115) \quad \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{4 \beta^2 \bar{\omega}}{(c)^2} A'.$$

Or A' est égal à l'aire mesurée par \bar{S} ; nous écrivons donc

$$A' \equiv \bar{A}.$$

Le spectateur \bar{S} constatera la différence de temps :

$$(116) \quad \boxed{\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = \frac{4 \beta^2 \bar{\omega}}{(c)^2} \bar{A}}.$$

Supposons qu'on ait approximativement $\beta \sim 1$; d'où

$$(117) \quad \bar{t}_1 - \bar{t}_2 \sim \frac{4 \bar{\omega}}{(c)^2} \bar{A}.$$

Ce résultat est conforme à l'expérience ⁽¹⁾ de Sagnac.

CHAPITRE II.

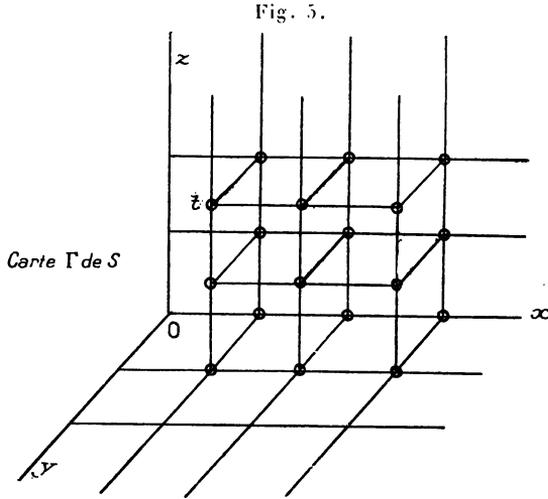
CHAMPS D'EINSTEIN.

17. Champs d'Einstein. — Nous n'avons considéré jusqu'ici qu'un champ de Minkowski exploré par le spectateur \bar{S} . Rappelons que celui-ci utilisait *un réseau* euclidien muni d'horloges réglées au moyen de la lumière (*fig. 1*). Ce réseau était réalisé *physiquement* par \bar{S} au moyen de ses étalons de longueur et de temps.

⁽¹⁾ G. SAGNAC, *Journ. de Phys.*, mars 1914. — P. Langevin a, le premier, démontré la formule (117) de Sagnac au moyen de la théorie de la relativité générale (*C. R. Ac. Sc.*, 173, 7 novembre 1921).

Einstein suppose qu'il existe des champs dans lesquels ce réseau ne pourra être réalisé. Ces champs seront désignés sous le nom de *champs d'Einstein*.

Considérons, avec un spectateur ou mathématicien S, le réseau euclidien muni d'indications horaires, qui a servi à \bar{S} pour explorer



le champ de Minkowski. Ce réseau n'aura ici qu'une valeur représentative tout comme un réseau de méridiens et de parallèles dans une carte géographique. Nous désignerons ce réseau euclidien, y compris toutes les indications horaires, géométriques et physiques qu'on y aura inscrites, sous le nom de *carte Γ* (fig. 5).

Le réseau de la carte Γ étant euclidien, la mesure $\delta\sigma$ de la distance dans la carte Γ entre les points (x, y, z) et $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ sera donnée par

$$(118) \quad (\delta\sigma)^2 \equiv (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2.$$

En utilisant une lumière fictive de vitesse $c = \bar{c}$ (§ 9), on sera amené à écrire, (5),

$$(119) \quad (\delta s)^2 \equiv -(\delta x)^2 - (\delta y)^2 - (\delta z)^2 + c^2(\delta t)^2,$$

où δs est l'intervalle dans la carte Γ entre les événements (x, y, z, t) et $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$.

Sauf dans le champ de Minkowski, les expressions (118) et (119)

NE correspondent QU'APPROXIMATIVEMENT ⁽¹⁾ aux mesures PHYSIQUES ou RÉELLES. Pour atteindre celles-ci d'une manière rigoureuse, généralisons, d'après Einstein, la forme quadratique qui figure dans le second membre de (119), en posant :

$$(120) \quad S \dots\dots \left(\overline{\delta s} \right)^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \delta x_{\alpha} \delta x_{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

où $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ sont dix fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 ; ce sont les *potentiels gravifiques d'Einstein*; nous dirons aussi qu'ils définissent le *champ d'Einstein considéré* ⁽²⁾. La recherche de ces dix fonctions $g_{\alpha\beta}$ de x_1, x_2, x_3, x_4 constitue le problème fondamental de la Gravifique. Dans le cas particulier où ces fonctions se réduisent au tableau (20), nous retrouvons la forme particulière (5) attachée, par \bar{S} , au champ de Minkowski. On voit qu'alors \bar{S} s'identifie avec S.

Rappelons que les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 qui figurent dans la forme quadratique (120) ne sont autres que ceux qui sont représentés dans la carte Γ . On peut dire, avec Einstein, que ce sont les *paramètres de l'espace-temps* défini par (120). Mais nous désirons éviter ici toute intuition dans l'espace-temps.

La forme quadratique (120) est utilisée par le spectateur S attaché au trièdre euclidien $(O; x_1, x_2, x_3)$.

Un événement sera défini par le spectateur S au moyen des quatre paramètres x_1, x_2, x_3, x_4 ou x, y, z, t .

Deux événements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) seront simultanés pour S, si l'on a $t_1 = t_2$.

Deux événements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) coïncideront pour S, si l'on a, à la fois,

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2 \quad \text{et} \quad t_1 = t_2.$$

Le carré de l'intervalle entre deux événements (x, y, z, t) et $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$ est donné, pour S, par (120).

⁽¹⁾ Nous verrons, dans la seconde Partie, qu'il peut être *plus pratique* de choisir d'autres cartes Γ . On pourra toujours passer de l'une à l'autre.

⁽²⁾ A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeine Relativitätstheorie* (Ann. d. Phys., 49, 1916). — A. Einstein a utilisé pour la première fois la forme quadratique (120) dans *Zeitsch. f. Math. u. Phys.*, Bd 62, 1913, Heft. 3, p. 229.

18. **Les spectateurs S et \bar{S} .** — Attachons à S un spectateur \bar{S} effectuant des mesures physiques. Pour cela, considérons un domaine spatial et temporel *infinitement petit* autour de l'événement (x_1, x_2, x_3, x_4) et proposons-nous de mettre (120) sous la forme de Minkowski, à savoir :

$$(121) \quad \bar{S} \dots \dots (\delta \bar{s})^2 \equiv -(\delta \bar{x})^2 - (\delta \bar{y})^2 - (\delta \bar{z})^2 + (\bar{c})^2 (\delta \bar{t})^2.$$

Nous avons déjà expliqué au paragraphe 11 comment s'effectue le passage de (120) à (121). *Les formules (26) à (46) subsistent ici*, après suppression des accents dont sont affectés les x', y', z' et t' . Ainsi, par exemple, les relations (30), (32) et (33) deviennent ici :

$$(122) \quad (\delta \bar{s})^2 \equiv \sum_i \sum_j g_{ij} \delta x_i \delta x_j - \left(\frac{\sum_i g_{i4} \delta x_i}{\sqrt{g_{44}}} \right)^2 + \left(\frac{\sum_\alpha g_{\alpha 4} \delta x_\alpha}{\sqrt{g_{44}}} \right)^2$$

$(\alpha = 1, 2, 3, 4; i, j = 1, 2, 3),$

$$(123) \quad \bar{c} \delta \bar{t} \equiv \frac{\sum_{\alpha=1}^4 g_{\alpha 4} \delta x_\alpha}{\sqrt{g_{44}}}$$

et

$$(124) \quad -(\delta \bar{x})^2 - (\delta \bar{y})^2 - (\delta \bar{z})^2 \equiv \sum_i \sum_j \left(g_{ij} - \frac{g_{i4} g_{j4}}{g_{44}} \right) \delta x_i \delta x_j$$

$(i, j = 1, 2, 3).$

Une horloge immobile utilisée par \bar{S} sera aussi immobile pour S, ce qui s'exprime en disant que si $\delta \bar{x}_1 = \delta \bar{x}_2 = \delta \bar{x}_3 = 0$, on aura aussi $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = 0$. La marche de l'horloge utilisée par \bar{S} sera donnée par [comparer à (34)] :

$$(125) \quad \boxed{\delta \bar{t} = \frac{\sqrt{g_{44}}}{c} \delta t}.$$

L'heure fournie par l'horloge de \bar{S} sera exprimée par

$$(126) \quad \bar{t} - \bar{t}^0 = \frac{1}{c} \int_0^t \sqrt{g_{44}} \delta t.$$

Si g_{14} ne dépend pas du paramètre t , on aura

$$(126') \quad \bar{t} - t\bar{\theta} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{c} (t - t^0).$$

Rappelons aussi qu'en *un même point* pour S et \bar{S} , deux événements simultanés pour S sont aussi simultanés pour \bar{S} . Par contre, en *deux points différents* dans la carte Γ de S, la simultanéité pour S n'entraînera pas la simultanéité pour \bar{S} . *Réciproquement*, à la simultanéité, en deux points différents pour \bar{S} , c'est-à-dire à $\delta\bar{t} = 0$, correspond la non-simultanéité pour S. [Comparer à (36) et (38).]

Pour obtenir la correspondance entre les paramètres spatiaux x_1, x_2, x_3 utilisés dans la carte Γ par S, et les mesures spatiales effectuées par le *spectateur-physicien* \bar{S} , on procédera comme au paragraphe 11 [voir équations (39) à (46)]; on aura soin d'enlever les accents de x'_1, x'_2, x'_3 . Ainsi, par exemple, la formule (46) deviendra

$$(127) \quad \left. \begin{array}{l} \bar{x} = x^* \sqrt{s_1} \\ \bar{y} = y^* \sqrt{s_2} \\ \bar{z} = z^* \sqrt{s_3} \end{array} \right\}.$$

On pourrait, de même, étendre à tout champ d'Einstein donné ce que nous avons dit aux paragraphes 12 et 13 concernant *la contraction de Lorentz* et *la dilatation d'Einstein généralisées*. On aura à considérer alors deux spectateurs \bar{S}_1 et \bar{S}_2 immobiles par rapport à S.

Exemple. — Supposons que S adopte dans la carte Γ , les coordonnées sphériques euclidiennes r, θ, φ , ainsi que le temps fictif t . A titre d'exemple, prenons, avec S,

$$(128) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv -A(\delta r)^2 - r^2[(\delta\theta)^2 + \sin^2\theta(\delta\varphi)^2] + c^2B(\delta t)^2,$$

où A et B sont fonctions de r seulement.

Proposons-nous maintenant de mettre $(\delta\bar{s})^2$ sous la forme de Minkowski écrite en coordonnées sphériques, à savoir, (24) :

$$(129) \quad (\delta\bar{s})^2 \equiv -(\delta\bar{r})^2 - (\bar{r})^2[(\delta\bar{\theta})^2 + \sin^2\bar{\theta}(\delta\bar{\varphi})^2] + (\bar{c})^2(\delta\bar{t})^2.$$

Ces nombres $\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\varphi}, \bar{t}$ sont ceux obtenus par le spectateur-physicien \bar{S} effectuant des mesures dans le domaine spatial et temporel infiniment petit considéré. Nous supposons que $\theta = \bar{\theta}$ et que $\varphi = \bar{\varphi}$.

La relation (125) nous donne immédiatement la correspondance entre le nombre t utilisé par le spectateur-mathématicien S et le nombre \bar{t} obtenu par le spectateur-physicien \bar{S} , à savoir :

$$(130) \quad \delta\bar{t} = \sqrt{B} \delta t$$

ou, en intégrant, puisque B ne dépend pas de t ,

$$(131) \quad \bar{t} - \bar{t}^0 = \sqrt{B}(t - t^0).$$

Pour trouver la correspondance entre les nombres r et \bar{r} utilisés respectivement par les spectateurs S et \bar{S} , faisons $\delta\theta = \delta\bar{\theta} = 0$, $\delta\varphi = \delta\bar{\varphi} = 0$; ces deux spectateurs considèrent ainsi la même direction radiale. Supposons, en outre, que $\delta t = 0$; d'où, en vertu de (123) et de (128), $\delta\bar{t} = 0$.

On aura, (128) et (129),

$$(132) \quad \delta\bar{r} = \sqrt{A} \delta r$$

ou, en intégrant entre deux limites r_0 et r ,

$$(133') \quad \bar{r} - r^0 = \int_{r^0}^r \sqrt{A} \delta r.$$

Remarquons que les nombres \bar{r} et \bar{t} trouvés par le spectateur-physicien \bar{S} ne coïncideront avec les nombres r et t trouvés par le spectateur-mathématicien S que si A et B valent 1; c'est ce qui se réalise dans un champ de Minkowski (20).

19. Les spectateurs S' et \bar{S}' . — Comme au paragraphe 15, nous pouvons figurer, dans la carte Γ , un trièdre T' euclidien trirectangle (O'; x' , y' , z') animé par rapport à (O; x , y , z) d'un mouvement déterminé (87).

Le spectateur S *attachera à ce trièdre T' un spectateur S' qui utilisera les variables x' , y' , z' , $t' = t$* , et qui tracera ainsi une carte Γ' (fig. 6).

La forme quadratique (120) deviendra maintenant

$$(133) \quad S' \dots\dots (\delta\bar{s}')^2 = \sum_x \sum_\beta g'_{x\beta} \delta x'_x \delta x'_\beta,$$

où l'on a posé

$$(134) \quad g'_{x\beta} \equiv \sum_a \sum_b g_{ab} \frac{\partial x_a}{\partial x'_x} \frac{\partial x_b}{\partial x'_\beta}.$$

Attachons maintenant à S' un spectateur \bar{S}' effectuant des mesures physiques dans un domaine spatial et temporel infiniment petit.

D'où, en reprenant les calculs indiqués au paragraphe 18, on aura

$$(135) \quad \bar{S}' \dots \dots (\delta \bar{s})^2 = -(\delta \bar{x}')^2 - (\delta \bar{y}')^2 - (\delta \bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2 (\delta \bar{t}')^2.$$

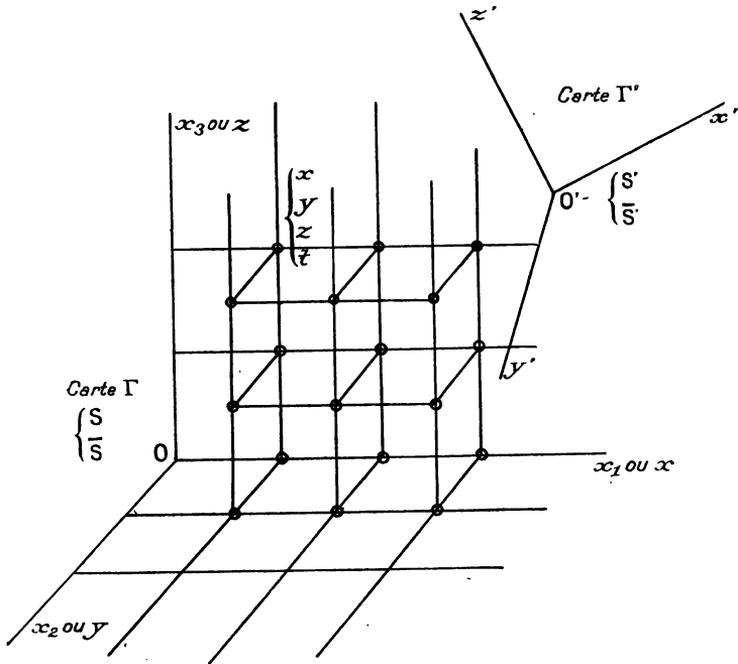
Nous poserons, avec Einstein,

$$(136) \quad \boxed{\bar{c}' = \bar{c} : c}.$$

On pourrait aussi étendre aux champs d'Einstein tous les résultats obtenus au paragraphe 18.

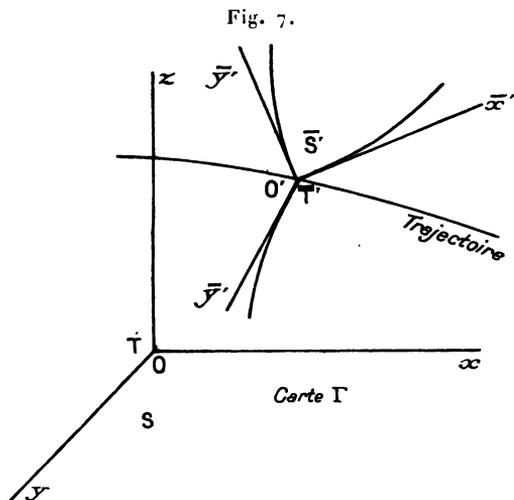
Récapitulons la méthode exposée ci-dessus dans le schéma synoptique suivant.

Fig. 6.



$$\left\{ \begin{array}{l} S \dots \dots (\delta s)^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \delta x_{\alpha} \delta x_{\beta}, \\ \bar{S} \dots \dots (\delta \bar{s})^2 \sim -(\delta \bar{x})^2 + (\delta \bar{y})^2 - (\delta \bar{z})^2 - (\bar{c})^2 (\delta \bar{t})^2, \\ S' \dots \dots (\delta s')^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g'_{\alpha\beta} \delta x'_{\alpha} \delta x'_{\beta}, \\ \bar{S}' \dots \dots (\delta \bar{s}')^2 \sim -(\delta \bar{x}')^2 - (\delta \bar{y}')^2 - (\delta \bar{z}')^2 + (\bar{c}')^2 (\delta \bar{t}')^2. \end{array} \right.$$

20. **Passage direct de S à \bar{S} '.** — Dans ce qui précède nous nous sommes *donné* le mouvement de S' par rapport à S; puis, nous avons passé de S' à \bar{S} ' par un changement de variables entre les x', y', z', t' (ou t), d'une part, et les $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}'$, d'autre part.



Maintenant, nous allons *chercher le changement de variables* de manière que la forme quadratique (120) prenne la *forme de Minkovski* (5), avec l'approximation la plus grande possible, dans un domaine spatial et temporel infiniment petit. Nous *cherchons* donc le changement de variables

$$(137) \quad \begin{cases} x = x(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}'); \\ y = y(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}'); \\ z = z(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}'); \\ t = t(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{t}'); \end{cases}$$

tel que

$$(138) \quad (\delta \bar{s})^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \bar{g}'_{\alpha\beta} \delta \bar{x}'_{\alpha} \delta \bar{x}'_{\beta},$$

où

$$(139) \quad \bar{g}'_{\alpha\beta} \equiv \sum_a \sum_b \mathcal{E}_{ab} \frac{\partial x_a}{\partial \bar{x}'_{\alpha}} \frac{\partial x_b}{\partial \bar{x}'_{\beta}},$$

prenne, avec l'approximation la plus grande, la forme de Minkowski, dans le domaine spatial et temporel infiniment petit considéré.

Pour fixer les idées, nous supposons que la variable \bar{x}'_4 a la même dimension que le temps $t = x_4$ utilisé par S.

Construisons, avec \bar{S} , un trièdre \bar{T}' curviligne (O' ; $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$) de la manière suivante. A un instant déterminé $\bar{t}' \equiv \bar{x}'_4$, nous prenons comme origine de ce trièdre le point O' de coordonnées

$$\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 = \bar{x}'_3 = 0.$$

Pour construire l'axe des \bar{x}' , nous faisons varier \bar{x}' seulement, en conservant la valeur précédente de \bar{t}' et en prenant $\bar{y}' = \bar{z}' = 0$. Nous procédons de la même manière pour construire l'axe des \bar{y}' , puis l'axe des \bar{z}' (fig. 7).

Le trièdre \bar{T}' ainsi obtenu sera, en général, mobile par rapport au trièdre T utilisé par S.

Pour trouver le changement de variables (137) qui résout le problème proposé, nous admettons que les x_i sont développables en séries de Taylor dans le voisinage du point $\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 = \bar{x}'_3 = \bar{x}'_4 = 0$:

$$(140) \quad x_i \equiv x_i^0 + \sum_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}'_k} \right)_0 \bar{x}'_k + \frac{1}{2!} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \bar{x}'_k \partial \bar{x}'_l} \right)_0 \bar{x}'_k \bar{x}'_l + \dots$$

($i, k, l, \dots = 1, 2, 3, 4$).

Les indices zéro servent à rappeler que les symboles qui en sont affectés se rapportent à $\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 = \bar{x}'_3 = \bar{x}'_4 = 0$. Les \bar{x}'_k qui figurent dans (140) seront considérés comme des infiniment petits du premier ordre. Déterminons les coefficients des séries (140). Nous avons d'abord

$$x_i^0 = x_i(0, 0, 0, 0);$$

ces nombres sont donc les coordonnées et le temps utilisés par S et correspondant à l'origine O' considérée à l'instant initial $\bar{t}' = 0$. On se donnera les quatre nombres x_i^0 , d'après le problème considéré.

Nous admettons que les fonctions $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ sont également développables en séries de puissances entières et positives dans un domaine du

premier ordre autour du point $\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 = \bar{x}'_3 = \bar{x}'_4 = 0$:

$$(142) \quad \bar{g}'_{\alpha\beta} \equiv (\bar{g}'_{\alpha\beta})_0 + \sum_k (\bar{g}'_{\alpha\beta,k})_0 \bar{x}'_k + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\bar{g}'_{\alpha\beta,kl})_0 \bar{x}'_k \bar{x}'_l + \dots$$

Le problème posé consiste à faire en sorte que les $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ se réduisent identiquement, avec l'approximation la plus élevée possible, aux composantes $\delta_{\alpha\beta}$ du *tenseur fondamental de Minkowski* (1) :

$$(143) \quad \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{c}')^2 \end{array}$$

Pour que cette identification des $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ avec les $\delta_{\alpha\beta}$ se réalise dans (142) en première approximation, c'est-à-dire aux infiniment petits du premier ordre près, il faut et il suffit que dans (142) on ait les dix conditions

$$(144) \quad (\bar{g}'_{\alpha\beta})_0 = \delta_{\alpha\beta}.$$

La covariance (139) fournit alors les dix équations

$$(145) \quad \delta_{\alpha\beta} = (\bar{g}'_{\alpha\beta})_0 \equiv \sum_i \sum_j (g_{ij})_0 \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}'_\alpha} \right)_0 \left(\frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}'_\beta} \right)_0$$

qui permettent de calculer dix des seize coefficients (2)

$$(146) \quad \left(\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}'_k} \right)_0$$

figurant dans les termes du premier ordre des séries (140).

Pour que les $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ coïncident avec les $\delta_{\alpha\beta}$, non seulement en première approximation, mais aussi en seconde approximation, c'est-

(1) Nous supposons que \bar{S} emploie les coordonnées *rectangulaires* $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ et qu'il définit le temps \bar{t}' au moyen de la vitesse \bar{c}' de la lumière qu'il observe.

(2) On pourra encore se donner *a priori* trois des u_0^i, \dots, u_0^j qui figurent plus loin dans (165); d'où trois nouveaux coefficients (146). Rappelons à ce sujet, que la forme de Minkowski demeure *invariante* pour une transformation de Lorentz, quelle que soit la vitesse (constante) v qui y figure. Remarquons, enfin, que le spectateur \bar{S} pourra changer d'axes rectangulaires $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$, en conservant l'origine O' et le temps \bar{t}' ; il pourra disposer ainsi de trois autres indéterminées (les angles d'Euler).

à-dire aux infiniment petits du second ordre près, il faut et il suffit, en vertu de (142), que l'on ait les quarante égalités

$$(147) \quad (\bar{g}'_{\alpha\beta,\lambda})_0 = 0 \quad (\alpha, \beta, \lambda = 1, 2, 3, 4)$$

Or, de (139), on déduit, par dérivation,

$$(148) \quad \bar{g}'_{\alpha\beta,k} = \sum_i \sum_j \left[\sum_m g'_{ij,m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial x_\beta} + g'_{ij} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_\alpha \partial x'_k} \frac{\partial x_j}{\partial x_\beta} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_\beta \partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha} \right) \right] \\ (i, j, m = 1, \dots, 4).$$

En faisant dans ces égalités $\bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 = \bar{x}'_3 = \bar{x}'_4 = 0$ et en tenant compte des conditions (147), nous aurons quarante équations permettant de déterminer d'une manière univoque les quarante coefficients

$$(149) \quad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_k \partial x'_l} \right)_0$$

des termes du second ordre des séries (140), après que les $\left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right)_0$ auront été calculés ou choisis comme il vient d'être expliqué.

Pour obtenir explicitement les expressions des coefficients (149), remarquons que l'on aura, grâce aux égalités (147),

$$(150) \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\}'_0 = 0 \quad (1).$$

En vertu de la covariance (2) ou des identités en x_1, x_2, x_3, x_4 .

$$(151) \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\}'_0 = \sum_i \left[\sum_j \sum_\nu \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial x'_\beta} \frac{\partial \bar{x}'_k}{\partial x_\nu} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \frac{\partial \bar{x}'_k}{\partial x_i} \right],$$

on en déduit

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_k \partial x'_l} \right)_0 = - \sum_\alpha \sum_\beta \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & i \end{matrix} \right\}'_0 \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_k} \right)_0 \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_l} \right)_0.$$

(1) Pour la définition de ce symbole $\left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ & k \end{matrix} \right\}'$, voir, plus loin, éq. (200) et (201).

(2) Voir, par exemple, notre *Grav. inst.* éq. (87). Le lecteur pourrait retrouver la relation (151) ci-dessus à partir des équations (139), (200) et (201).

Nous aurons maintenant

$$(153) \quad \boxed{\bar{g}'_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l (\bar{g}'_{\alpha\beta,kl})_0 \bar{x}'_k \bar{x}'_l + \dots}$$

Pour que les $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ soient identiques avec les $\delta_{\alpha\beta}$ en troisième approximation, c'est-à-dire aux infiniment petits du troisième ordre près, il faudrait que l'on eût les cent relations $(\bar{g}'_{\alpha\beta,kl})_0 = 0$. Or, de (148) on déduirait, par dérivation, les expressions des $\bar{g}'_{\alpha\beta,kl}$ en fonction des $\frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}'_k \partial \bar{x}'_l \partial \bar{x}'_m}$; si l'on annule les $(\bar{g}'_{\alpha\beta,kl})_0$, on obtiendra cent relations pour déterminer les quatre-vingts coefficients $\left(\frac{\partial^3 x_i}{\partial \bar{x}'_k \partial \bar{x}'_l \partial \bar{x}'_m}\right)_0$ des termes du troisième ordre dans les séries (140), de sorte qu'il est, en général, impossible d'identifier complètement, en troisième approximation, les $\bar{g}'_{\alpha\beta}$ avec les $\delta_{\alpha\beta}$.

La détermination des quatre-vingts coefficients (154) peut se faire de diverses façons : celles-ci dépendent *du choix* (1) *des quatre-vingts coefficients* pris parmi les cent coefficients $(\bar{g}'_{\alpha\beta,kl})_0$ qui figurent dans (153).

Temps physique ou propre de \bar{S}' . — Pour une horloge fixe par rapport à \bar{S}' , ou demeurant au point $(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3)$, on aura

$$\delta \bar{x}'_1 = \delta \bar{x}'_2 = \delta \bar{x}'_3 = 0;$$

d'où, en vertu de (135),

$$(155) \quad \frac{\delta \bar{s}'}{c'} = \delta t'.$$

On a $\delta \bar{s} \equiv \delta \bar{s}'$. En intégrant, on aura, grâce à (120),

$$(156) \quad \bar{t} - \bar{t}^0 = \frac{1}{c'} \int_{t^0}^{t'} \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \delta x_{\alpha} \delta x_{\beta}},$$

où l'intégrale est étendue à une ligne λ , munie d'indications horaires t , tracée dans la carte Γ . On obtient le sens physique de \bar{s}' ; au facteur c' près, c'est l'intervalle de temps propre à \bar{S}' . On dit aussi parfois que c'est le temps vécu par \bar{S}' . Le mouvement de \bar{S}' , ou de l'horloge entraînée, est représenté schématiquement dans la carte Γ , au moyen de la ligne λ munie de ses indications horaires t .

(1) Pour plus de renseignements, voir les travaux de A.-S. EDDINGTON, *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, 1923, p. 78 à 81. — A.-D. FOKKER, *Koninkl. Ak. Wetenschappen*, Amsterdam, 30 octobre 1920, p. 614 à 616. — G. DARMOIS, *Annales de Physique*, 1924, 1; janvier février (§ 46 à 48).

21. **Théorème du déplacement parallèle.** — Dérivons les équations (140) par rapport au paramètre indépendant \bar{s} ; d'où

$$(157) \quad u^\alpha = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \right)_0 \bar{u}'^\beta + \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} \right)_0 \bar{u}'^\beta \bar{x}'^\gamma + \dots$$

($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 4$),

où nous avons posé

$$(158) \quad u^\alpha \equiv \frac{dx_\alpha}{ds}; \quad \bar{u}'^\alpha \equiv \frac{d\bar{x}'_\alpha}{d\bar{s}}.$$

En vertu de (140), on a aussi le développement en série

$$(159) \quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \right)_0 + \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} \right)_0 \bar{x}'^\gamma + \dots$$

Dérivons aussi ces équations par rapport au paramètre auxiliaire \bar{s} ; d'où

$$(160) \quad \frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \right) = \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} \right)_0 \bar{u}'^\gamma + \dots$$

En vertu de (133), on aura

$$(161) \quad \sum_a \sum_b \bar{g}'_{ab} \bar{u}'^a \bar{u}'^b = 1;$$

d'où, pour tout point *immobile* par rapport au trièdre \bar{T}' ,

$$\bar{u}'^1 = \bar{u}'^2 = \bar{u}'^3 = 0 \quad \text{et} \quad \bar{u}'^4 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}'_{44}}}.$$

Retournons à la relation (160); d'où, en $\bar{x}' = \bar{y}' = \bar{z}' = \bar{t}' = 0$, (153),

$$(162) \quad \left[\frac{d}{d\bar{s}} \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \right) \right]_0 = \frac{1}{c'} \left(\frac{\partial^3 x_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} \right)_0.$$

Utilisons les relations (152); alors les relations précédentes deviennent

$$(163) \quad \left[\frac{d \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\beta} \right)}{d\bar{s}} \right]_0 = - \frac{1}{c'} \sum_a \sum_b \left\{ \begin{matrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{matrix} \right\}_0 \left(\frac{\partial x_a}{\partial x'_\beta} \right)_0 \left(\frac{\partial x_b}{\partial x'_\alpha} \right)_0.$$

Mais on a, en vertu de (157), de (162) et (153),

$$(164) \quad (u^b)_0 = \frac{1}{c'} \left(\frac{\partial x_b}{\partial x'_4} \right)_0 \quad (b = 1, \dots, 4).$$

En substituant (165) dans (164), on obtient enfin (1) :

$$(166) \quad \left[\frac{d \left(\frac{\partial x_a}{\partial x_\beta} \right)}{ds} \right]_0 = - \sum_a \sum_b \left\{ \begin{matrix} a & b \\ & a \end{matrix} \right\}_0 \left(\frac{\partial x_a}{\partial x_\beta} \right)_0 (u^b)_0$$

($\alpha, \beta, a, b = 1, \dots, 4$).

Nous dirons que les relations (166) expriment *le théorème du déplacement parallèle* (2) ou *de la translation géodésique*, à l'origine O' et à l'instant initial $\bar{t}' = 0$.

22. Mouvement du trièdre \bar{T}' par rapport au trièdre T . — Si, au point O' , le spectateur \bar{S}' trace, à l'instant \bar{t}' , les tangentes respectives aux axes curvilignes des \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' , il obtiendra un trièdre trirectangle, que nous désignerons encore par \bar{T}' . On peut se proposer d'étudier le mouvement du trièdre \bar{T}' par rapport au trièdre trirectangle T (*fig. 7*).

Pour cela, considérons, avec S , la trajectoire

$$(167) \quad x_i^0 \equiv x_i^0(t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

décrite par l'origine O' de \bar{T}' . A chacun des points O' de cette courbe, nous associons, dans la carte Γ , un trièdre trirectangle formé par la tangente, la normale principale et la binormale, en O' , de la trajectoire (167); nous désignons ce trièdre par $(O'; X, Y, Z)$. On aura à effectuer un changement de variables

$$(168) \quad x_i \equiv x_i^0 + \sum_j (x_i, X_j) X_j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Les cosinus directeurs (x_i, X_j) sont des fonctions *connues* de t .

Ensuite, on considérera les points infiniment voisins de O' et *attachés au trièdre \bar{T}'* , et l'on étudiera leur mouvement par rapport au trièdre $(O'; X, Y, Z)$. Par la transformation (168), on aura, enfin,

(1) Nous avons développé cette méthode élémentaire dans le *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique*, Classe des Sciences, 3 février 1923, p. 66.

(2) On peut rattacher immédiatement les relations (147) au *déplacement parallèle* de T. Levi-Civita (*Rendiconti Circolo matematico Palermo*, 1917).

leur mouvement par rapport au trièdre T. Le problème posé se trouve ainsi être résolu (1).

CHAPITRE III.

CINÉMATIQUE.

23. Vitesse. — La vitesse *contravariante* est définie par cu^z ($z = 1, 2, 3, 4$), où

$$(169) \quad u^z \equiv \frac{dx_z}{ds} \quad (z = 1, 2, 3, 4).$$

Les u^z sont uniquement fonctions des quatre paramètres x_1, x_2, x_3, x_4 .

Posons

$$(172) \quad u_\alpha \equiv \sum_{\beta} g_{z\beta} u^\beta \quad (z = 1, \dots, 4);$$

ces quatre fonctions définissent la vitesse *covariante* cu_α ($\alpha = 1, \dots, 4$).

Appelons $g^{\alpha\beta}$ les mineurs algébriques de $g_{\alpha\beta}$ dans le déterminant g , divisés par ce même déterminant. En vertu de l'identité

$$(174) \quad \sum_x g_{z\beta} g^{\alpha\gamma} \equiv \varepsilon_{\beta}^{\gamma},$$

où $\varepsilon_{\beta}^{\gamma}$ vaut 0 ou 1 suivant que les indices sont différents ou sont égaux, nous pouvons écrire, grâce à (172),

$$(175) \quad u^z = \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} u_{\beta}.$$

Posons ensuite

$$(176) \quad W^2 \equiv \sum_{\alpha} u_{\alpha} u^{\alpha}.$$

On aura donc, (120) et (172),

$$(177) \quad W^2 \equiv \sum_x \sum_{\beta} g_{z\beta} u^z u^{\beta} = 1.$$

(1) On pourra lire un exemple de cette méthode dans notre Note que nous venons de citer. On retrouve ainsi la *précession annuelle de Schouten-Kramers-Fokker*.

En tenant compte cette fois de (175), on aurait pu écrire d'une manière analogue

$$(178) \quad \boxed{\Psi^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} u_{\alpha} u_{\beta} = 1.}$$

Dans l'espace et le temps. — Les définitions précédentes se transportent aisément dans l'espace *et* le temps. Nous entendons par là que nous ferons jouer à x_4 , un rôle privilégié par rapport aux trois autres paramètres x_1 , x_2 et x_3 . Nous dirons que ceux-ci se rapportent à l'espace, tandis que x_4 représente le temps t .

Posons

$$(181) \quad v^i \equiv \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3).$$

$$(182) \quad v^4 \equiv 1.$$

Il en résulte que, (169),

$$(183) \quad u^{\alpha} = \frac{\frac{dx_{\alpha}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{v^{\alpha}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Posons aussi

$$(184) \quad \frac{ds}{dt} \text{ ou } \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} v^{\alpha} v^{\beta}} \equiv V \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4);$$

d'où

$$(185) \quad \boxed{u^{\alpha} = v^{\alpha} V^{-1}.}$$

Ces relations permettent d'exprimer la vitesse généralisée cn^{α} en fonction des v^{α} . Remarquons que, (184),

$$(186) \quad V = \frac{1}{u^4};$$

il en résulte que, (185),

$$(187) \quad v^{\alpha} = \frac{u^{\alpha}}{u^4} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

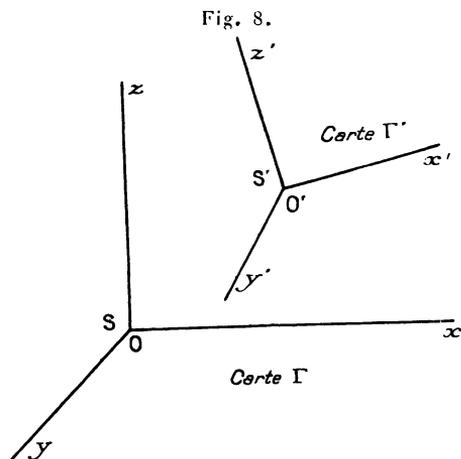
Ces relations permettent de passer des v^{α} aux vitesses u^{α} .

Trièdre trirectangle mobile. Composition des vitesses. — Le passage du trièdre ($O; x, y, z$) au trièdre mobile ($O'; x', y', z'$) se fera au moyen de la

transformation orthogonale :

$$(188) \quad x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^3 x_j' \cos(x_j', x_i) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$(189) \quad t = t'.$$



Dérivons (188) par rapport à s ; d'où

$$(190) \quad u^i = \sum_{j=1}^3 u'^j \cos(x_i, x_j') + \frac{\partial x_i}{\partial t} u'^4 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

en posant

$$(191) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} \equiv \frac{dx_i^0}{dt} + \sum_{j=1}^3 x_j' \frac{d \cos(x_j', x_i)}{dt}.$$

Revenons à l'espace *et* au temps en remarquant que, grâce à (189) et à l'invariance de $d\bar{s}$, nous aurons ici $dt = dt'$, $d\bar{s} = d\bar{s}'$; d'où

$$(192) \quad V = V'.$$

L'équation (190) deviendra donc

$$(193) \quad v^i = \sum_{j=1}^3 v'^j \cos(x_i, x_j') + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Ce résultat peut s'énoncer : la vitesse absolue est égale à la résultante de la vitesse d'entraînement $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ et de la vitesse relative (v'^1, v'^2, v'^3).

Cas du champ de Minkowski. — Remplaçons dans l'expression (184) par $g_{\alpha\beta}$ par les valeurs données dans le tableau (20). On obtient, avec \bar{S} ,

$$(194) \quad \bar{V} = \frac{1}{u^i} = \sqrt{+(\bar{v})^2 + (\bar{c})^2} = \bar{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{v}}{\bar{c}}\right)^2},$$

où l'on a posé

$$(195) \quad (\bar{v})^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

On aura, (194),

$$(196) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}^i = \frac{\bar{c}^i}{\bar{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{v}}{\bar{c}}\right)^2}} \\ \bar{u}^4 = \frac{1}{\bar{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{v}}{\bar{c}}\right)^2}} \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i = -\bar{u}^i, \\ \bar{u}_4 = (\bar{c})^2 \bar{u}^4. \end{array} \right.$$

Si l'on néglige \bar{v} en présence de \bar{c} dans (194), on aura approximativement

$$(197) \quad \bar{V} = \frac{1}{u^i} \sim \bar{c},$$

et, d'après (187),

$$(198) \quad \bar{c} \bar{u}^1 \sim \bar{v}^1, \quad \bar{c} \bar{u}^2 \sim \bar{v}^2, \quad \bar{c} \bar{u}^3 \sim \bar{v}^3.$$

Les expressions (197) et (198) donnent l'interprétation par \bar{S} et l'ordre de grandeur des symboles $\bar{c} \bar{u}^\alpha$ et \bar{V} .

24. Accélération. — L'accélération *contravariante* est définie par $c^2 A^\sigma$ ($\sigma = 1, \dots, 4$), où

$$(199) \quad \Lambda^\sigma = \frac{du^\sigma}{ds} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \sigma \end{array} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \quad (\alpha, \beta, \sigma = 1, 2, 3, 4).$$

On a introduit les symboles de Christoffel à trois indices

$$(200) \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \sigma \end{array} \right\} = \sum_{\tau} g^{\sigma\tau} \left[\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \tau \end{array} \right]$$

et

$$(201) \quad \left[\begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \tau \end{array} \right] = \frac{1}{2} (g_{\alpha;\beta} + g_{\beta\tau;\alpha} - g_{\alpha\beta;\tau}).$$

Par analogie avec (172), définissons une accélération *cova-*
riante $c^2 A_\sigma$, en posant

$$(203) \quad \boxed{A_\sigma \equiv \sum_{\tau} g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau.}$$

En effectuant, on obtient

$$(204) \quad A_\sigma \equiv \sum_x g_{\sigma x} \frac{du^x}{ds} + \sum_x \sum_\beta \left(g_{x\sigma,\beta} - \frac{1}{2} g_{x\beta,\sigma} \right) u^x u^\beta.$$

Or, les deux premiers termes de cette expression se réduisent, en vertu de (172), à

$$\frac{du_\sigma}{ds}.$$

On aura donc, finalement,

$$(205) \quad \boxed{A_\sigma \equiv \frac{du_\sigma}{ds} - \frac{1}{2} \sum_x \sum_\beta g_{x\beta,\sigma} u^x u^\beta.}$$

Dérivons W^2 défini en (177) par rapport à x_σ ; on obtient

$$(207) \quad \frac{\partial W^2}{\partial x_\sigma} \equiv \sum_x \sum_\beta \left(g_{x\beta,\sigma} u^\alpha u^\beta + 2 g_{x\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\sigma} u^\beta \right) \equiv 0$$

ou, encore en vertu de (172),

$$(208) \quad \frac{\partial W^2}{\partial x_\sigma} \equiv 2 \sum_x \frac{\partial u_x}{\partial x_\sigma} u^x - \sum_x \sum_\beta g_{x\beta,\sigma} u^\alpha u^\beta =$$

Multiplions par u^σ et sommons par rapport à σ ; d'où

$$(209) \quad \frac{dW^2}{ds} \equiv 2 \sum_x \frac{du_x}{ds} u^x - \sum_x \sum_\beta \sum_\sigma g_{x\beta,\sigma} u^\alpha u^\beta u^\sigma \equiv 0.$$

On aura donc, finalement,

$$(210) \quad \boxed{\frac{dW^2}{ds} \equiv 2 \sum_x A_x u^x \equiv 0.}$$

De cette dernière relation, on déduit, en vertu de (172) et de (203),

$$(211) \quad \boxed{\sum_x A_x u_x \equiv 0.}$$

Remarquons que l'on peut mettre (205) sous la forme

$$(212) \quad \Lambda_{\sigma} \equiv \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial W}{\partial u^{\sigma}} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x^{\sigma}} \right),$$

les parenthèses servant à rappeler que les variables u^{σ} , x^{σ} sont considérées comme indépendantes. Pour établir cette relation, il suffit de remarquer qu'on a

$$(213) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial u^{\alpha}} \right) = \frac{\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} u^{\beta}}{W} - \frac{u^{\alpha}}{W},$$

$$(214) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{\sum_{\beta} \sum_{\gamma} g^{\beta\gamma, \alpha} u^{\beta} u^{\gamma}}{2W}.$$

Pour montrer toute l'importance de ces parenthèses, signalons que l'on a la relation

$$(215) \quad \left(\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}} \right) = - \left(\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha}} \right),$$

Dans l'espace et le temps. — Reprenons les relations permettant de passer des u^{α} aux v^{α} et introduisons-les dans les expressions (199) et (205) des accélérations contravariante et covariante. On aura donc :

$$(219) \quad \Lambda^{\sigma} \equiv V^{-1} \left[\frac{d(v^{\sigma} V^{-1})}{dt} + V^{-1} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} v^{\alpha} v^{\beta} \right],$$

$$(220) \quad \equiv V^{-2} \left[\frac{d^2 x^{\sigma}}{dt^2} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} v^{\alpha} v^{\beta} \right] - V^{-3} \frac{dV}{dt} v^{\sigma}$$

et

$$(221) \quad \Lambda_{\sigma} \equiv V^{-1} \left[\frac{d \left(V^{-1} \sum_{\tau} g_{\sigma\tau} v^{\tau} \right)}{dt} - \frac{1}{2} V^{-1} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta, \sigma} v^{\alpha} v^{\beta} \right].$$

On peut obtenir, dans l'espace et le temps, une relation analogue à (212); on a, en effet,

$$(222) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial v^{\sigma}} \right) \equiv \frac{\sum_{\tau} g_{\sigma\tau} v^{\tau}}{V}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x^{\sigma}} \right) \equiv \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta, \sigma} v^{\alpha} v^{\beta}}{2V},$$

en conservant aux parenthèses le sens qui y a été attaché plus haut.

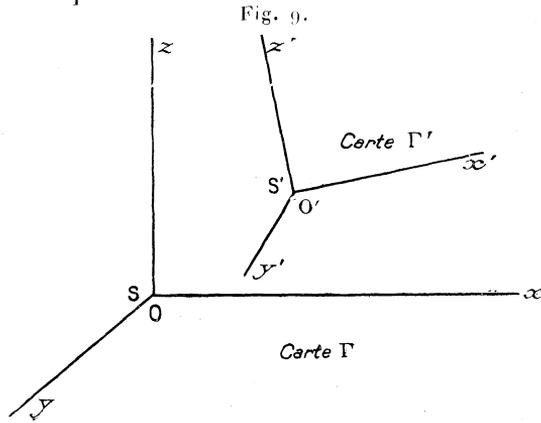
On aura donc, en introduisant ces dernières expressions dans (221),

$$(223) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial v^\sigma} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x_\sigma} \right) = V \Lambda_\sigma}.$$

Composition des accélérations. Théorème de Coriolis. — Considérons un champ d'Einstein défini par

$$(224) \quad (\delta s)^2 = \sum_\alpha \sum_\beta g_{\alpha\beta} \delta x_\alpha \delta x_\beta$$

et soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées utilisées par le spectateur S attaché à ce champ.



Introduisons dans la carte Γ , un autre spectateur S' se mouvant par rapport à S et utilisant les paramètres x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 .

Le problème de la composition des accélérations revient à étudier la covariance de l'accélération $c^2 \Lambda^\alpha$ pour le changement de variables :

$$(225) \quad x_\alpha = x_\alpha(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4).$$

On sait que

$$(226) \quad \Lambda'^\sigma \equiv \sum_\alpha \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\alpha} \Lambda^\alpha,$$

où, (199),

$$(227) \quad \Lambda^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{ds} + \sum_\beta \sum_\gamma \left\{ \begin{matrix} \beta & \gamma \\ & \alpha \end{matrix} \right\} u^\beta u^\gamma.$$

En posant, pour simplifier les écritures,

$$(228) \quad (\alpha) \equiv \sum_\beta \sum_\gamma \left\{ \begin{matrix} \beta & \gamma \\ & \alpha \end{matrix} \right\} u^\beta u^\gamma,$$

on pourra donc écrire (226) sous la forme

$$(229) \quad A'^{\sigma} \equiv \sum_{\alpha} \frac{d^2 x_{\alpha}}{(d\bar{s})^2} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha} (x) \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}}.$$

Or,

$$(230) \quad \frac{d^2 x_{\alpha}}{(d\bar{s})^2} \equiv \frac{d}{ds} \sum_{\beta} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} u'^{\beta} = \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \left(\frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\beta} \partial x'_{\gamma}} u'^{\beta} u'^{\gamma} + \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} \frac{d^2 x'_{\beta}}{ds^2} \right).$$

En introduisant (230) dans (229), on obtient finalement :

$$(231) \quad \boxed{A'^{\sigma} \equiv \frac{d^2 x'_{\sigma}}{(d\bar{s})^2} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 x_{\alpha}}{\partial x'_{\beta} \partial x'_{\gamma}} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} u'^{\beta} u'^{\gamma} + \sum_{\alpha} (x) \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}}}.$$

Cette relation exprime, dans le cas le plus général, l'analogie du *théorème de Coriolis*. Nous allons montrer par un cas particulier ce qu'il faut entendre par cette analogie.

Choisissons, pour définir le changement de variables (225), les relations euclidiennes

$$(232) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = z_0 + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \\ t = t'. \end{cases}$$

Dans ces formules x_0, y_0, z_0 représentent les coordonnées de l'origine O' par rapport au trièdre fixe $(O; x, y, z)$. Les cosinus directeurs $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont des fonctions données de t et sont liés par les conditions d'orthogonalité :

$$(233) \quad \begin{cases} \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j = 0 \end{cases} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3).$$

Les relations (232) et (233) sont données par S et inscrites par ce spectateur-mathématicien dans la carte Γ (*fig. 9*).

Remarquons que les dérivées partielles premières des x'_{σ} par rapport aux x_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) sont les *cosinus directeurs* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ qui figurent dans (232). Quant aux dérivées *secondes* des x_{α} par rapport aux x'_{β} , elles seront nulles, sauf quand l'indice β prend la valeur 4. On aura donc

$$(234) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial x'} = \alpha_1; & \frac{\partial x}{\partial y'} = \alpha_2; & \frac{\partial x}{\partial z'} = \alpha_3; \\ \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}_0 + \dot{\alpha}_1 x' + \dot{\alpha}_2 y' + \dot{\alpha}_3 z', \end{cases}$$

où le point indique une dérivée par rapport à t .

On aura, de même,

$$(235) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial t} = \dot{\alpha}_1; & \frac{\partial^2 x}{\partial y' \partial t} = \dot{\alpha}_2; & \frac{\partial^2 x}{\partial z' \partial t} = \dot{\alpha}_3; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \ddot{x}_0 + \ddot{\alpha}_1 x' + \ddot{\alpha}_2 y' + \ddot{\alpha}_3 z'; & \dots \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans (231), on trouve, (228),

$$(236) \quad \begin{cases} A'^1 = \frac{d^2 x'}{d(\bar{s})^2} + 2 \left(q' \frac{d\bar{z}'}{d\bar{s}} - r' \frac{dy'}{d\bar{s}} \right) u'^4 - a'_{x'} (u')^2 - \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial x'_1}{\partial x'_\alpha} (\alpha); \\ A'^2 = \dots; & A'^3 = \dots; & A'^4 = \frac{d^2 t}{d\bar{s}^2} + (4). \end{cases}$$

Dans ces formules, p' , q' , r' sont les composantes de la rotation instantanée du trièdre mobile (O' ; x' , y' , z') par rapport au trièdre fixe, rotation définie de la même manière qu'en cinématique ordinaire. On a donc

$$(237) \quad p' \equiv \alpha_3 \dot{\alpha}_2 + \beta_3 \dot{\beta}_2 + \gamma_3 \dot{\gamma}_2 = -(\alpha_2 \dot{\alpha}_3 + \beta_2 \dot{\beta}_3 + \gamma_2 \dot{\gamma}_3); \quad q' \equiv \dots; \quad r' \equiv \dots$$

D'autre part, on a posé, comme en cinématique ordinaire,

$$(248) \quad \begin{cases} a'_{x'} \equiv \alpha_1 (\ddot{x}_0 + \ddot{\alpha}_1 x' + \ddot{\alpha}_2 y' + \ddot{\alpha}_3 z') \\ \quad \quad \quad + \beta_1 (\ddot{y}_0 + \ddot{\beta}_1 x' + \ddot{\beta}_2 y' + \ddot{\beta}_3 z') \\ \quad \quad \quad + \gamma_1 (\ddot{z}_0 + \ddot{\gamma}_1 x' + \ddot{\gamma}_2 y' + \ddot{\gamma}_3 z'); \\ a'_{y'} \equiv \dots; \\ a'_{z'} \equiv \dots \end{cases}$$

Les deux dernières composantes s'obtiennent en remplaçant α_1 , β_1 , γ_1 qui se trouvent hors des parenthèses successivement par α_2 , β_2 , γ_2 et α_3 , β_3 , γ_3 .

Dans l'espace et le temps. — Proposons-nous, comme précédemment, de donner à x_4 un rôle privilégié par rapport aux trois autres paramètres x_1 , x_2 et x_3 . Nous dirons encore que ceux-ci se rapportent à l'espace, tandis que x_4 représente le temps.

Reportons-nous aux formules (231) et introduisons la relation (185); on obtient ainsi

$$(239) \quad A'^\sigma = V^{-2} \left[\frac{d^2 x'_\sigma}{dt^2} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 x'_\alpha}{\partial x'_\beta \partial x'_\gamma} \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x'_\alpha} v'^\beta v'^\gamma - v'^\sigma \frac{d \log V'}{dt} + \sum_x |z| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x'_x} \right],$$

où l'on a posé :

$$(240) \quad [\alpha] = \sum_a \sum_b \left\{ \begin{matrix} a & b \\ \alpha & \alpha \end{matrix} \right\} v^a v^b.$$

Dans le cas particulier où le changement de variables (225) se réduit à (232), les relations (239) se réduisent à des relations analogues à (236), à savoir :

$$(241) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda'^1 = V^{-2} \left[\frac{d^2 x'}{dt^2} + 2 \left(q' \frac{dz'}{dt} - r' \frac{dy'}{dt} \right) + a'_{r'} - r' \frac{d \log V'}{dt} + \sum_x [\alpha] \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_x} \right], \\ \Lambda'^2 = \dots, \\ \Lambda'^3 = \dots, \\ \Lambda'^4 = V^{-2} \left[\frac{d \log V'}{dt} + \sum_x [\alpha] \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_x} \right], \end{array} \right.$$

où $p', q', r', a'_{r'}, \dots$ ont la même signification que ci-dessus (237) et (238).

Cas du champ de Minkowski. — Retournons un instant aux définitions des accélérations contravariante et covariante, et voyons ce que deviennent ces expressions lorsqu'on remplace les $g_{\alpha\beta}$ par leurs valeurs données dans le tableau (20) relatif au champ de Minkowski (1).

Les $g_{\alpha\beta}$ étant constants, toutes les accolades de Christoffel sont nulles. On aura donc (2)

$$(242) \quad \bar{A}^\sigma = \frac{d^2 \bar{x}_\sigma}{d(\bar{s})^2}$$

ou encore, en tenant compte de (184) et de (185),

$$(243) \quad \bar{A}^\sigma = (\bar{V})^{-2} \left[\frac{d^2 \bar{x}_\sigma}{d(\bar{t})^2} - v^\sigma \frac{d \log \bar{V}}{d\bar{t}} \right].$$

Remarquons que ces dernières expressions rappellent celles de la *mécanique ordinaire* et justifient, par analogie, la définition de l'accélération $(\bar{c})^2 \bar{A}^\sigma$ de la *relativité*. Remarquons, en outre, que pour les mouvements considérés habituellement en mécanique, on aura approximativement $(\bar{c})^2 \bar{A}^\sigma \sim \frac{d^2 \bar{x}_\sigma}{d(\bar{t})^2}$.

En vertu de (203), on peut écrire d'autre part

$$(244) \quad \bar{A}^\sigma = \bar{g}_{\sigma\sigma} \bar{A}^\sigma,$$

où $\bar{g}_{\sigma\sigma}$ vaut $-1, -1, -1, (\bar{c})^2$ suivant que σ vaut 1, 2, 3, 4.

On aura donc

$$(245) \quad \bar{A}_1 = -\bar{A}^1, \quad \bar{A}_2 = -\bar{A}^2, \quad \bar{A}_3 = -\bar{A}^3, \quad \bar{A}_4 = (\bar{c})^2 \bar{A}^4.$$

(1) TH. DE DONDER et H. VANDERLINDEN, *Congrès international des Mathématiciens : Comptes rendus, Strasbourg*, 22 septembre 1920.

(2) Les *tirets* servent à rappeler que dans un champ de Minkowski, le spectateur S se confond avec le spectateur-physicien \bar{S} .

Le théorème de Coriolis dans le champ de Minkowski se déduit immédiatement de (236) ou de (241), si l'on remarque que les (α) et les $[\alpha]$ sont identiquement nuls dans le cas considéré.

TABLEAU DES DIMENSIONS.

Pour fixer les idées, supposons encore ici que x_1, x_2, x_3 aient les dimensions d'une *longueur* et que x_4 ait la dimension du *temps*. Nous désignerons ces dimensions respectivement par (1, 0) et (0, 1), le premier indice se rapportant à la longueur, le deuxième au temps.

Si nous admettons que \bar{ds} a la dimension d'une longueur, nous pourrons en déduire les dimensions des symboles utilisés jusqu'ici.

SYMBOLES	L	T	SIGNIFICATION DES SYMBOLES
x_1 ou x	1	0	Coordonnées rectilignes
x_2 ou y			
x_3 ou z			
x_4 ou t	0	1	Temps
\bar{ds}	1	0	Forme quadratique d'Einstein, exposant $\frac{1}{2}$
$g_{11} \quad g_{22} \quad g_{33}$	0	0	Potentiels d'Einstein
$g_{12} \quad g_{13} \quad g_{23}$	1	-1	
$g_{14} \quad g_{24} \quad g_{34}$	2	-2	
g_{44}	2	-2	Discriminant de la forme quadratique d'Einstein
g	1	-1	
$\sqrt{-g}$	0	0	Mineurs des potentiels d'Einstein, divisés par le discriminant
$g^{11} \quad g^{22} \quad g^{33}$	-1	1	
$g^{12} \quad g^{13} \quad g^{23}$	-2	2	
$g^{14} \quad g^{24} \quad g^{34}$	1	-1	
cu^1, cu^2, cu^3	0	0	Vitesse contravariante
cu^4	1	-1	
cu_1, cu_2, cu_3	1	-1	Vitesse covariante
cu_4	2	-2	
$V \equiv \frac{d\bar{s}}{dt}$	1	-1	Vitesse
v^1, v^2, v^3	0	0	
$v^4 \equiv 1$	1	-2	Accélération contravariante
$c^2 A^1, c^2 A^2, c^2 A^3$	0	-1	
$c^2 A^4$	1	-2	Accélération covariante
$c^2 A_1, c^2 A_2, c^2 A_3$	2	-1	
$c^2 A_4$			



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	1
CHAPITRE I. — <i>Champs de Minkowski</i>	2-32
<p style="margin-left: 2em;">Les vides physiques. — Champ de Minkowski. — Distance entre deux points. — Le temps. — Événement. — Simultanéité. — Coïncidence. — Vitesse de la lumière. — Intervalle entre deux événements. — Changement de variables fait par \bar{S}. — Trièdre euclidien dans le champ de Minkowski. — Contraction de Lorentz généralisée. — Dilatation d'Einstein généralisée. — Translation rectiligne et uniforme du trièdre T' dans le champ de Minkowski de \bar{S} ou la relativité restreinte. — Expérience de Michelson-Morley. — Entraînement partiel des ondes ou loi de Fizeau. — Mouvement quelconque du trièdre T' dans le champ de Minkowski de \bar{S}. — Rotation uniforme dans le champ de Minkowski. — Expérience de Sagnac.</p>	
CHAPITRE II. — <i>Champs d'Einstein</i>	32-45
<p style="margin-left: 2em;">Champs d'Einstein. — Les spectateurs S et \bar{S}. — Les spectateurs S' et \bar{S}'. — Passage direct de S à \bar{S}'. — Temps physique ou propre de \bar{S}'. — Théorème du déplacement parallèle. — Mouvement du trièdre \bar{T}' par rapport au trièdre T.</p>	
CHAPITRE III. — <i>Cinématique</i>	46-56
<p style="margin-left: 2em;">Vitesse. — Trièdre trirectangle mobile. — Composition des vitesses. — Accélération. — Composition des accélérations. — Théorème de Coriolis.</p>	
TABLEAU DES DIMENSIONS.....	56

