G. VALIRON

Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 2 (1925)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__2__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER) ETC. ET DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE II.

Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable

Par G. VALIRON.
Professeur à la Faculté des Sciences à Strasbourg

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1925

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en gros caractères, figurant entre parenthèses dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

FONCTIONS ENTIÈRES

ET

FONCTIONS MÉROMORPHES D'UNE VARIABLE

Par M. G. VALIRON.

I. — INTRODUCTION.

1. Le premier théorème de Weierstrass. — Une fonction entière $f(z)$ est une fonction holomorphe pour toute valeur de z, qui ne se réduit pas à un polynome. Son développement de Taylor étant

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

le rapport $-\log|c_n| : n$ tend vers $+\infty$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que le développement (1) définisse une fonction entière.

Les zéros d'une fonction entière sont des points isolés, leur seul point limite possible est le point à l'infini, ils peuvent être rangés en une suite par ordre de modules non décroissants. Nous désignerons par a_n le $n^{\text{ième}}$ terme non nul de cette suite et par r_n son module. Weierstrass a montré qu'on peut former une fonction entière admettant pour zéros une telle suite infinie de points a_n; si l'on pose

$$(2) \qquad E(u, 0) = 1 - u, \qquad E(u, q) = (1 - u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^q}{q}} \qquad (q \text{ entier } \geqq 1).$$

le produit infini

$$(3) \qquad P(z) = \prod_{1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

est en effet *uniformément et absolument convergent dans tout* *domaine fini si la série*

(4) $$\sum \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$$

converge quel que soit r. Il suffit de prendre $p_n = n$ pour que la série (4) converge, $P(z)$ définit alors une fonction entière s'annulant aux points a_n et en ces points seulement.

$P(z)$ est appelé *produit canonique*, les facteurs de ce produit sont les *facteurs primaires de Weierstrass.* Toute fonction entière $f(z)$ peut se mettre sous la forme

(5) $$f(z) = z^m e^{g(z)} P(z),$$

où $P(z)$ est un polynome ou un produit canonique et $g(z)$ une fonction entière ou un polynome; c'est la formule de décomposition en facteurs.

Une fonction méromorphe $\Phi(z)$, c'est-à-dire dont les seuls points singuliers à distance finie sont des pôles, est donc le quotient de deux fonctions entières ou polynomes.

Soit z_0 un point singulier isolé et essentiel d'une fonction uniforme, en envoyant ce point à l'infini on obtient une fonction $F(z)$ qui est la somme d'une fonction entière et d'une fonction $\psi(z)$ holomorphe pour $|z| \geqq A$ et nulle à l'infini; $F(z)$ est aussi le produit d'une fonction entière par une fonction $\psi_1(z)$ holomorphe pour $|z| > A$ sauf peut-être au point à l'infini qui peut être un pôle, $\psi_1(z)$ ne s'annulant pas pour $|z| > A$. De même, si le point à l'infini est point singulier essentiel limite de pôles d'une fonction $\Phi(z)$ méromorphe dans tout domaine $A < A' \leqq |z| \leqq A'' < \infty$, cette fonction est le produit d'une fonction méromorphe (dans tout le plan) par une fonction holomorphe, non nulle, pour $|z| > A$ et égale à 1 à l'infini.

La plupart des résultats de la théorie des fonctions entières sont applicables aux fonctions $F(z)$ considérées ci dessus; de même ceux obtenus pour les fonctions méromorphes sont aussi valables pour les fonctions méromorphes autour du point à l'infini.

2. Le second théorème de Weierstrass et le théorème de Picard. — Dans la suite nous désignerons toujours par $M(r)$ le maximum pour $|z| = r$ du module d'une fonction holomorphe sur cette circonférence. Pour une fonction entière les théorèmes de Cauchy montrent que, quels que soient r et n,

$$|c_n| r^n < M(r). \tag{6}$$

Pour toute fonction $F(z)$, quel que soit le nombre positif K, le rapport $M(r) : r^K$ finit par dépasser tout nombre donné. On en déduit le théorème de Liouville et le théorème classique de Weierstrass sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée (point singulier isolé essentiel ou point essentiel limite de pôles).

I. *L'ensemble des valeurs prises par une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé admet toute valeur finie ou infinie pour valeur limite.*

En 1879, E. Picard apporta à ce théorème un complément essentiel. En utilisant les propriétés de la fonction modulaire elliptique, il établit cette proposition qui fut l'origine d'une théorie déjà très riche et qui se développe encore chaque jour.

II. *Une fonction uniforme prend une infinité de fois toute valeur sauf deux valeurs exceptionnelles au plus dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée.*

En 1896, E. Borel donna de ce théorème, dans le cas particulier des fonctions entières, une démonstration ne faisant intervenir que des propriétés élémentaires nouvelles des fonctions holomorphes et des fonctions croissantes; il mit ensuite en évidence des relations très serrées entre la densité des zéros des fonctions $f(z) - x$ et le mode de croissance de la fonction $M(r)$. Ce sont ces résultats de E. Borel qui, avec ceux de J. Hadamard, ont été la base de la théorie des fonctions entières et méromorphes. Dans cet exposé, consacré spécialement à ces fonctions, nous nous placerons surtout au point de vue de E. Borel.

II. — Les inégalités de Borel. La fonction $M(r)$ et la suite des coefficients.

3. Les inégalités de Borel. — La présence de facteurs $e^{g(z)}$ dans la décomposition (5) et les méthodes de démonstration élémentaire du théorème de Picard ont conduit à étudier des relations entre la croissance de certaines fonctions. Soient .

$$\psi(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n \tag{7}$$

une série entière convergente par exemple pour $|z| < 1$, $M(r)$ son module maximum et $A(r)$ le maximum de sa partie réelle pour $|z| = r < 1$. L'emploi des formules de Fourier a conduit J. Hadamard (a) aux inégalités

$$|c_n| r^n \leqq 4 \overset{+}{A}(r) + 2|c_0| \quad (^1) \tag{8}$$

qui permettent d'étendre le théorème de Liouville au cas où l'on a $A(r) < r^K$. De ces formules, E. Borel (b, c) déduisit une inégalité entre $M(r)$ et $A(R)$, $(r < R)$ qui a été complétée par Carathéodory par une toute autre méthode [*voir* (22, c)] : on a

$$M(r) < \frac{R}{R-r}[2A(R) + 4|c_0|] \qquad (r < R). \tag{9}$$

Si $M^1(r)$ est le maximum du module de la dérivée $\psi'(z)$, les théorèmes de Cauchy montrent que l'on a

$$\frac{M(r) - |c_0|}{r} < M^1(r) < \frac{M(R)}{R-r} \qquad (r < R). \tag{10}$$

Si $m(r)$ désigne la fonction qui pour chaque r est égale au plus grand des nombres $|c_n| r^n$, les inégalités (6) donnent [Borel (b, c)]

$$m(r) < M(r) < m(R)\frac{R}{R-r} \qquad (r < R). \tag{11}$$

Nous dirons que $m(r)$ est le *terme maximum*, si $\psi(r)$ est une fonction entière, $m(r)$ est une fonction croissante.

E. Borel a montré que $U(r)$ étant une fonction indéfiniment croissante lorsque r croît indéfiniment et α un nombre positif donné, on a, en général, l'inégalité

$$U\left[r + \frac{1}{\log U(r)}\right] < U(r)^{1+\alpha},$$

---

(1) Nous désignerons avec R. Nevanlinna par $\overset{+}{A}(x)$ une fonction égale à $A(x)$ si $A(x) \geqq 0$, et à 0 si $A(x) \leqq 0$.

il en déduit (b, c) que les fonctions $A(r)$, $M(r)$, $m(r)$, $M'(r)$ sont du même ordre de grandeur :

III. *Le rapport des logarithmes de deux des fonctions* $M(r)$, $A(r)$, $m(r)$, $M'(r)$ *tend vers un lorsqu'on exclut certains intervalles* ($r > r_0 > 0$) *dans lesquels la variation totale de* $\log r$ *reste finie.*

Une étude détaillée des propriétés des fonctions croissantes a été faite par O. Blumenthal (c) en vue de l'édification d'une théorie des fonctions entières d'ordre infini (voir aussi les travaux de G. Rémoundos et de ses élèves).

4. **Méthode de J. Hadamard.** — Une application très simple du théorème de Cauchy sur le maximum du module d'une fonction monogène a conduit J. Hadamard au théorème suivant :

IV. *La fonction* $\log M(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$ [*voir* (13, b), (4, a et b), (11, a)].

Divers auteurs ont étendu ce résultat à des fonctions analogues : G.-H. Hardy (b) montre que, $I(r)$ étant la valeur moyenne de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, $\log I(r)$ est aussi une fonction convexe de $\log r$; R. Nevanlinna montre que les fonctions qu'il introduit (*voir* n^{os} 22, 24) sont aussi convexes; O. Faber et G. Valiron (u) établissent et utilisent un résultat analogue à IV pour les fonctions de plusieurs variables.

Dans un ordre d'idées analogue, O. Blumenthal (b) a obtenu la proposition suivante :

V. *La fonction* $M(r)$ *est analytique par sections, les points tels que* $|f(z)| = M(r)$ *sont sur des arcs de courbes analytiques, le nombre de ces arcs étant fini dans tout cercle* $|z| \leqq R$.

Il montre sur un exemple que la dérivée seconde de $M(r)$ peut ne pas être continue [*voir aussi* (16, a)].

J. Hadamard déduisit de son théorème IV une méthode pour étudier la relation entre les fonctions $m(r)$ et $M(r)$; il utilise le polygone de Newton $\pi(f)$ dont les sommets sont certains points A_n ($x = n$, $y = -\log|c_n|$), les autres points A_n étant sur les côtés ou au-dessus des côtés. La polaire réciproque de $\pi(f)$ par rapport à la parabole $x^2 = 2y$ donne $\log m(r)$ en fonction de $\log r$; J. Hadamard définit une seconde courbe donnant une limitation supérieure de $\log M(r)$. Cette méthode et les théorèmes IV et V sont valables pour une série entière.

G. Valiron (c, g) introduit le rang $N(r)$ du terme maximum; en supposant $c_0 \neq 0$, on a

$$\log m(r) = \log|c_0| + \int_0^r N(x)\frac{dx}{x} < \log M(r), \tag{12}$$

$$M(r) < m(r)\left\{2N\left[r + \frac{r}{N(r)}\right] + 1\right\}. \tag{13}$$

L'inégalité (13) donne la même précision que la méthode de J. Hadamard. Ces résultats s'étendent au cas des fonctions de plusieurs variables (46, u). G. Valiron montre aussi que le rapport $r\frac{d}{dr}(\log M(r)) : N(r)$ tend vers *un* si l'on exclut des intervalles analogues à ceux figurant dans l'énoncé III.

5. Classification d'après le mode de croissance. Fonctions d'ordre fini. — E. Borel (b, c) a introduit la notion d'ordre. *L'ordre ρ d'une fonction $F(z)$ est la limite supérieure pour r infini du rapport* $\log_2 M(r) : \log r$. Les fonctions d'ordre fini ont été longtemps les seules pour lesquelles on ait obtenu des résultats simples et précis autres que le théorème de Picard. Pour qu'une fonction soit d'ordre fini ρ, il faut et il suffit que le rapport $\log N(r) : \log r$ admette ρ pour limite supérieure d'indétermination pour r infini; on déduit alors des inégalités (12) et (13) ce résultat (46, c, d) :

VI. *Pour une fonction d'ordre fini les rapports des logarithmes de deux des fonctions $M(r)$, $m(r)$, $A(r)$, $M^1(r)$ tendent vers un lorsque r croît indéfiniment; si ρ est l'ordre et ε positif quelconque, on a, à partir d'une valeur de r,*

$$M(r) < m(r)\,r^{\rho+\varepsilon}, \qquad M(r) < A(r)\,r^{\rho+\varepsilon}, \qquad M^1(r) < M(r)\,r^{\rho-1+\varepsilon} \text{ [1]}.$$

J. Hadamard (b), E. Borel (d), Lindelöf, Pringsheim, G. Valiron (c, g, z) ont donné des méthodes pour étudier les relations entre

---

[1] La dernière inégalité est nouvelle.

la loi de décroissance de la suite des coefficients $|c_n|$ et la fonction $M(r)$. Si les $|c_n|$ sont donnés on calcule une valeur approchée de $m(r)$ et l'on emploie l'inégalité (13) ou la proposition VI si l'ordre est fini. Lorsqu'on se donne *a priori* une valeur approchée de $\log M(r)$, elle est assujettie à certaines conditions; dans le cas de l'ordre fini, il suffit que $\log M(r)$ soit asymptotiquement égal à une fonction dérivable $V(r)$, fonction convexe de $\log r$ [le rapport de $\log M(r)$ à $V(r)$ tend vers un, ce qu'on écrit

$$\log M(r) \sim V(r)]. \tag{14}$$

Les inégalités (6), (12) et (13) donnent des limitations pour $|c_n|$ et $N(r)$. On peut *a fortiori* supposer que $\log M(r) : V(r)$ a des limites d'indétermination finies et positives, que $\log_2 M(r)$ est asymptotiquement égal à $\log V(r)$, etc. Un grand nombre d'énoncés ont été donnés, je me bornerai à citer les deux suivants :

VII. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit d'ordre fini égal à ρ est que*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|c_n|}{n \log n} = -\frac{1}{\rho} \qquad \text{[Borel (c)]}. \tag{15}$$

VIII. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho} = A \tag{16}$$

est que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\rho e} |c_n|^{\frac{\rho}{n}} = A \qquad \text{[Lindelöf (a)]}. \tag{17}$$

Signalons à ce propos la terminologie de Lindelöf et Pringsheim : la fonction est dite *du type minimum, moyen ou maximum de son ordre* suivant que dans l'égalité (16) on a : $A = 0$, $0 < A < +\infty$, $A = +\infty$.

Des résultats analogues ont été donnés, notamment par E. Maillet, pour les fonctions d'ordre nul ou d'ordre infini.

G. Valiron a distingué dans certaines questions deux sortes de fonctions d'ordre fini ρ, les *fonctions de la classe inférieure* pour lesquelles l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}} dx \tag{18}$$

converge, et les *fonctions de la classe supérieure* pour lesquelles elle diverge. L'intégration de l'égalité asymptotique entre $\log M(r)$ et $\log m(r)$ multipliée par un facteur convenable et l'emploi d'un théorème de Carleman et Littlewood [*voir* (46, z)] sur les séries conduit à la proposition suivante dans laquelle $\log R_n$ désigne la pente du polygone $\pi(f)$ d'Hadamard entre les points d'abscisse n et $n+1$.

IX. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit de la classe inférieure est que la série*

$$\sum (R_n)^{\rho}$$

converge; les fonctions pour lesquelles la série de terme général $|c_n|^{\rho:n}$ *diverge sont de la classe supérieure* (46, p, z).

E. Borel (c) a montré l'importance des *fonctions à croissance régulière*, fonctions pour lesquelles le rapport

$$\log_2 M(r) : \log r$$

tend vers ρ lorsque r croît indéfiniment. E. Lindelöf a montré que :

X. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre* ρ *soit à croissance régulière est que la condition* (15) *étant réalisée, on puisse trouver une suite d'indices* n_p *telle que*

$$\lim_{p=\infty} \frac{\log |c_{n_p}|}{n_p \log n_p} = -\frac{1}{\rho}, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{\log n_{p+1}}{\log n_p} = 1.$$

On peut de même considérer des *fonctions à croissance très régulière* pour lesquelles le rapport $\log M(r) : r^{\rho}$ a des limites d'indétermination (pour $r=\infty$) finies et positives, et des *fonctions à croissance parfaitement régulière* pour lesquelles ce rapport tend vers une limite finie non nulle. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on se trouve dans ces cas ont été données par E. Lindelöf (b) [*voir* aussi (46, z)], qui a aussi comparé $\log M(r)$ à des expressions de la forme $r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}$, ... Ces résultats de E. Lindelöf peuvent être groupés de la façon suivante (46, c) :

XI. *Soient* $\rho(r)$ *une fonction dérivable tendant vers* ρ *et telle que* $\rho'(r)\, r \log r$ *tende vers* 0 *lorsque* r *croît indéfiniment,* $\chi(x)$ *la* *fonction inverse de* $x = r^{\rho(r)}$. *Pour que le rapport*

$$\log M(r) : r^{\rho(r)}$$

ait des limites d'indétermination finies positives (ou tende vers une limite A non nulle), *il faut et il suffit que les nombres*

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,\chi\left(\frac{n}{\rho}\right)$$

aient une limite supérieure d'indétermination finie $\left(\text{ou égale à } B = (Ae)^{\frac{1}{\rho}}\right)$ *et qu'il existe une suite d'indices* n_p *pour lesquels ces nombres aient une limite inférieure d'indétermination positive* (ou tendent vers B), *le rapport* $n_{p+1} : n_p$ *ayant des limites d'indétermination positives finies* (ou égales à 1).

Des résultats analogues sont donnés par E. Lindelöf pour l'ordre infini, par R. Mattson et G. Valiron (*c*) pour l'ordre nul.

Pour les fonctions à croissance parfaitement régulière $\log M(r)$ est asymptotiquement égal à une fonction simple de $N(r)$ et r; G. Valiron a déterminé toutes les fonctions pour lesquelles cette circonstance se produit, et donne les conditions correspondantes relatives aux coefficients; les fonctions obtenues, qui peuvent être à croissance très irrégulière, peuvent servir de fonctions de comparaison. Pour toute fonction d'ordre fini ρ existent des fonctions $\rho(x)$ telles que

$$\lim_{x=\infty} \rho(x) = \rho, \qquad \underline{\lim}_{x=\infty} \rho(x) = \rho_1 > 0, \qquad \lim_{x=\infty} x\,\rho'(x)\log x = 0,$$

pour lesquelles on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}} = 1;$$

$\rho(r)$ est un *ordre précisé;* on peut prendre $\rho_1 = \rho$, $\rho(r)$ est alors un *ordre* L (Lindelöf); ou, si ρ n'est pas entier, ρ_1 supérieur à la partie entière de ρ, on a un *ordre* B (Boutroux) (46, *z*). G. Valiron introduit des considérations analogues dans le cas des fonctions d'ordre nul.

La plupart des résultats ici exposés s'étendent aux séries entières dans leur cercle de convergence lorsque la croissance de $M(r)$ est assez rapide (46, *g*).

6. **Méthode de Wiman et Valiron.** — Dans deux remarquables Mémoires, A. Wiman (e, f) a obtenu des inégalités beaucoup plus précises que celles de Borel; il en a déduit diverses propriétés et notamment une démonstration élémentaire du théorème de Picard. G. Valiron (j, k) a complété les résultats de Wiman en montrant d'abord que ses inégalités sont valables sauf dans certains intervalles exceptionnels, puis en donnant des inégalités valables dans de petits domaines; il a utilisé le polygone $\pi(f)$ de J. Hadamard et a donné à la démonstration une forme géométrique. En posant

$$\mathfrak{F}(u) = \sum_0^\infty e^{n^\alpha} u^n \qquad (0 < \alpha < 1),$$

on obtient ce lemme fondamental :

XII. *La fonction $f(z)$ étant donnée, à une valeur r correspondent en général des couples de nombres l et k tels que la fonction $k\,\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ majore $f(z)$, les deux fonctions ayant des termes maxima égaux et de même rang pour cette valeur r. Les valeurs r pour lesquelles cette circonstance ne se produit pas forment entre* 1 *et* R, N(R) *intervalles au plus dans lesquels la variation totale de* $\log r$ *reste finie lorsque* R *croît indéfiniment.*

Les valeurs r satisfaisant à l'énoncé sont les *valeurs ordinaires* d'indice α. Dans le cas d'une fonction $\psi(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$, il existe encore *une suite de valeurs remarquables* vérifiant le lemme pourvu que $\log_2 M(r) : \log \frac{1}{1-r}$ ne tende pas vers 0 et que α soit convenablement choisi.

En écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \left[f(z_0) + \frac{z - z_0}{nz_0} g(z_0) + \left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^2 \chi(z, z_0)\right]$$

avec

$$g(z) = z f'(z) - n f(z),$$

on arrive à la proposition suivante (46, k, z) :

XIII. *Soient* R *une valeur ordinaire d'indice* $\frac{11}{12}$ *suffisamment grande, h un nombre donné, z_0 un point pour lequel*

$$|f(z_0)| > M(R) N^{-\frac{1}{16}}, \qquad |z| = R,$$

et D_{z_0} *la région définie par*

$$|r - R| < \frac{h}{N} R, \qquad |\varphi - \varphi_0| < N^{-\frac{15}{16}} \qquad (z = r e^{i\varphi}).$$

Il existe une constante K *ne dépendant que de* h *telle que :*

1° *En tout point de* D_{z_0} *le rapport* $|f(z)| : |f(z_0)|$ *reste compris entre* K^{-1} *et* K;

2° *Si* z *et* z_1 *sont dans* D_{z_0}, *on a*

$$\left| \left(\frac{z_1}{z}\right)^N \frac{f(z)}{f(z_1)} - 1 \right| < \frac{K}{N^{\frac{1}{16}}};$$

3° *Si* z *et* z_1 *sont deux points de* D_{z_0} *tels que*

$$|z - z_1| M(R) < \varepsilon(R) N^{-\frac{13}{16}},$$

on a

$$\left| f(z) - \left(\frac{z}{z_1}\right)^N f(z_1) \right| < \varepsilon(R) K;$$

4° *L'inégalité*

$$|z f'(z) - N f(z)| < K N^{\frac{13}{16}} M(R)$$

est vérifiée en tout point z *de module inférieur à* $R\left(1 + \frac{h}{N}\right)$.

Il suffit de supposer que $N = N(R)$ dépasse une constante absolue K′ dépendant de h et K pour que ces résultats soient vrais, ils restent vrais pour une série entière $\psi(z)$ de rayon de convergence égal à 1 s'il existe des valeurs remarquables pour lesquelles N est supérieur à K′. Les conséquences suivantes qui précisent les théorèmes de Borel (n° 3) sont donc aussi valables dans certaines conditions pour ces séries (**47**, *f*; **46**, *j*, *k*) :

Pour toute valeur ordinaire r, on a

$$A(r) \sim M(r), \qquad r M^1(r) \sim N(r) M(r).$$

et dans le voisinage des points où $|f(z)|$ ou $|z f'(z) : N|$ est voisin de $M(r)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \left(1 + h N^{-\frac{1}{16}}\right) \frac{N(r)}{z}.$$

Cette dernière égalité se généralise pour les dérivées successives, ce qui conduit à des propriétés des solutions de certaines équations différentielles (47, f; 40, d; 46, v). Les inégalités entre $M(r)$ et $m(r)$ sont complétées de la façon suivante : ε étant donné et positif, on a

$$M(r) < N(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, m(r), \qquad M(r) < [\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, m(r),$$

sauf dans des intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ reste finie.

En remplaçant la série de comparaison $\mathfrak{F}(u)$ par une fonction entière, on obtient des résultats plus serrés pour les fonctions à croissance moins rapide (47, e; 46, j), par exemple : pour toute fonction d'ordre fini moindre que ρ, il existe une suite de valeurs indéfiniment croissante r pour lesquelles

$$M(r) < \sqrt{2\pi\rho}\, m(r) \sqrt{\log m(r)}.$$

D'après les inégalités de E. Le Roy, ce résultat ne peut être amélioré.

III. — Le théorème de Picard.

7. Le théorème de Picard. — Lorsqu'une fonction $F(z)$ est holomorphe et non nulle autour du point à l'infini, qui est point essentiel, les modules maxima de $F(z)$ et $\frac{1}{F(z)}$ sont du même ordre, le sens exact du mot étant donné par le théorème XIII; A. Wiman (f) et G. Valiron (j) déduisent de là des démonstrations élémentaires du théorème de Picard; A. Bloch (a) remarque que la fonction $F(z)\,[F(z)-1]$ ne jouissant plus de la propriété indiquée si $F-1$ ne s'annule pas, le théorème est démontré. G. Valiron (k) donne une démonstration directe utilisant la troisième partie du théorème XIII : si $F(z)$ ne s'annule pas dans le voisinage du point essentiel à l'infini, les équations $F(z) - x$ ont, dans des domaines analogues à ceux définis dans ce théorème, un nombre de racines supérieur à $K \log M(r)$. Si $n(r, x)$ est le nombre des zéros de $F(z) - x$ dont le module est moindre que r, le rapport $n(r, x) : r$ a une limite inférieure d'indétermination (pour r infini) positive et indépendante de x [comparer (33, b)].

Dans sa Thèse, W. Saxer a présenté la méthode de Wiman et Valiron sous forme arithmétique et l'a utilisée à la démonstration de l'impossibilité de certaines identités, généralisant celles considérées par Borel dans sa démonstration du théorème de Picard (n° 16).

A. Bloch (a) remarque que la seconde partie du théorème XIII contient le résultat suivant :

XIV. *Si $Z = F(z)$ admet le point à l'infini pour point singulier isolé et est holomorphe autour de ce point, la surface de Riemann décrite par le point Z comprend des cercles à un seul feuillet de rayon aussi grand que l'on veut.*

Il applique ce résultat à la démonstration de ce théorème général obtenu par Picard (b, c) en 1883 : Deux fonctions admettant un même point pour singularité essentielle isolée ne peuvent être liées par une relation de genre supérieur à l'unité.

8. Théorème de Bloch. Théorèmes de Landau et de Schottky. — La proposition XIV reste vraie pour les séries entières convergentes dans le cercle de rayon 1 dans les conditions indiquées plus haut. En examinant séparément le cas des fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ de la forme

$$Z = \psi(z) = z + c_2 z^2 + \ldots, \tag{19}$$

pour lesquelles le nombre $N(r)$ correspondant aux valeurs remarquables reste inférieur à une constante K', A. Bloch (b) obtient cette proposition générale :

XV. *Il existe une constante K telle que la surface de Riemann, correspondant à une fonction quelconque de la forme (19) convergente pour $|z| < 1$, comprend un cercle à un seul feuillet de rayon au moins égal à K.*

En appliquant ce théorème à la fonction

$$\log \frac{\sqrt{\log\psi - 2i\pi} - \sqrt{\log\psi}}{\sqrt{\log\psi - 2i\pi} + \sqrt{\log\psi}}$$

A. Bloch obtient le théorème de Landau :

XVI. *Soit une fonction définie par une série entière convergente dans le voisinage de l'origine*

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots \qquad (c_1 \neq 0).$$

Il existe un nombre $R(c_0, c_1)$, ne dépendant que des deux pre-

miers coefficients, tel que, dans le cercle $|z| < R(c_0, c_1)$: *ou bien* $\psi(z)$ *ne reste pas holomorphe; ou bien cette fonction prend une fois au moins l'une des valeurs* o *ou* 1.

C'est en employant la méthode de Borel que E. Landau (a) avait tout d'abord établi cette si remarquable proposition; il donna ensuite une démonstration très simple en utilisant les propriétés de la fonction modulaire. Carathéodory a montré que cette dernière méthode donne la valeur exacte de la fonction $R(c_0, c_1)$; Hurwitz (b) donne, également au moyen de la fonction modulaire, l'inégalité très simple

$$R(c_0, c_1)\,|c_1| \leqq 16\,|c_0|^{\frac{2}{3}}\,|c_0 - 1|^{\frac{1}{2}}.$$

Un grand nombre de travaux, dont il sera question dans d'autres fascicules, ont été publiés sur ce sujet; je me bornerai à signaler ici le Mémoire de E. Lindelöf (g) [*voir* aussi (h)] dont il sera question au n° **12**; toute cette théorie y est traitée d'une façon très naturelle. E. Landau (f) a déduit de son théorème une proposition qui généralise un théorème de Koebe et qui doit être rapprochée du théorème XV : si une fonction de la forme (19) est holomorphe dans le cercle $|z| < 1$, les valeurs Z recouvrent toute une circonférence $|Z| = h \geq K'$, K' étant une constante absolue.

Le théorème de Landau est une conséquence simple de l'importante proposition obtenue à la même époque par F. Schottky (a) :

XVII. *Si une fonction* $\psi(z)$ *est holomorphe pour* $|z| < R$ *et ne prend pas les valeurs* o *et* 1 *à l'intérieur de ce cercle, son module vérifie l'inégalité*

$$|\psi(z)| < K\left(c_0, \frac{r}{R}\right), \tag{20}$$

le nombre $K(c_0, u)$ *ne dépendant que de* $c_0 = \psi(0)$ *et de* u.

Comme le théorème de Landau, celui de Schottky peut être obtenu par les méthodes élémentaires de Borel ou par l'emploi de la fonction modulaire; A. Bloch (b) a remarqué que l'intégration de l'inégalité obtenue pour le rayon du cercle de convergence dans le théorème de Landau conduit au théorème de Schottky. La valeur explicite de la fonction K est sans importance dans certaines questions, par exemple dans la théorie des familles normales (n° **10**), mais elle joue un rôle essentiel dans les extensions du théorème de Picard dont il sera question au n° 9. Par les méthodes élémentaires, on trouve que

$$\log K(c_0, u) < \frac{K_1(c_0)}{(1-u)^\beta}; \tag{21}$$

β étant supérieur à 2, E. Landau (*b*) obtint au moyen de la fonction modulaire la valeur $\beta = 1$, qui est la plus petite possible comme on le voit en considérant la fonction $e^{\frac{1}{1-z}}$.

9. Le théorème de Picard dans un secteur. — Le théorème de Schottky, avec le complément de Landau qui vient d'être signalé, montre que le théorème de Picard s'applique aux fonctions $\psi(z)$ holomorphes pour $|z| < 1$ pourvu que

$$\overline{\lim_{r=1}}\,(1-r)\log M(r) = +\infty, \tag{22}$$

mais il ne s'applique plus dans tous les cas lorsque le premier membre de (22) est borné [1]. Cette remarque conduit, par une transformation immédiate à des propositions complétant le théorème de Picard relatif au point essentiel isolé. Considérons une fonction $\theta(z)$, $(z = re^{i\varphi})$, admettant une singularité à l'origine, mais holomorphe dans un secteur S, $|z| < R_0$, $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{\gamma}$; si Δ est un angle de sommet O intérieur à S, on désignera par $M(r, \Delta)$ le maximum de $|\theta(z)|$ pour les points $|z| = r$ appartenant à Δ et l'on appellera ordre de $\theta(z)$ dans Δ le nombre

$$\overline{\lim_{r=0}}\,\frac{\log_2 M(r, \Delta)}{-\log r}.$$

On obtient alors cette proposition (2, *a*, *b*; 46, *j*, *m*) :

XVIII. *Si une fonction $\theta(z)$ est holomorphe dans un secteur* S *d'ouverture $\frac{\pi}{\gamma}$ et est d'ordre supérieur à γ dans un angle intérieur, elle prend toute valeur, sauf une au plus, en une suite de points de* S *admettant l'origine pour point limite.*

---

[1] La méthode élémentaire de Nevanlinna (Chap. V) conduit également à ce résultat, mais avec une condition un peu plus restrictive que (22).

Dans le cas d'une fonction $F(z)$ admettant le point ∞ pour point essentiel (et holomorphe autour de ce point), le théorème XVIII s'applique dès que l'ordre ρ dépasse $\frac{1}{2}$: il existe au moins un angle [et même deux comme le remarque Milloux (a)] d'ouverture $\frac{\pi}{\rho}+\varepsilon$, ε étant positif et arbitrairement petit, dans lequel $F(z)-x$ s'annule une infinité de fois, sauf peut-être pour une valeur x. On peut considérer de même des domaines limités par des arcs spiraliques (46, m). H. Milloux (c) a complété le théorème XVIII en définissant dans le secteur S une suite de régions dans lesquelles les fonctions $F(z)-x$ s'annulent, c'est une conséquence de son théorème du n° 11. L. Bieberbach (b, c) déduit de la proposition XVIII et des méthodes de Lindelöf-Phragmén (*voir* n° 20) un théorème d'une forme remarquable, mais qui n'est plus applicable aux fonctions d'ordre infini : une fonction $F(z)$ d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans un angle fixe mais arbitrairement placé dont l'ouverture est supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$, $2\pi-\frac{\pi}{\rho}$.

10. Les familles normales de fonctions de P. Montel [1]. — Le théorème de Schottky permet de montrer que les fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas deux valeurs exceptionnelles forment une famille normale. La notion féconde de famille normale est due à P. Montel qui en a fait de nombreuses applications.

P. Montel dit qu'une suite de fonctions $\varphi_n(z)$ holomorphes dans un domaine Δ (un domaine est un ensemble de points tous intérieurs et bien enchaînés) *converge uniformément dans* Δ lorsque, ou bien il y a convergence uniforme sur tout ensemble fermé intérieur à Δ, ou bien la suite $\frac{1}{\varphi_n(z)}$ converge uniformément vers o sur tout ensemble fermé intérieur. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, si chaque point de Δ est centre d'un cercle appartenant à Δ dans lequel la suite converge uniformément, elle converge uniformément

[1] Les propriétés des familles normales seront étudiées plus complètement dans le fascicule consacré aux familles de fonctions analytiques.

dans Δ. Une suite de fonctions $\Phi_n(z)$ méromorphes dans Δ *converge uniformément dans* Δ lorsque chaque point de Δ est centre d'un cercle dans lequel l'une des deux suites $\Phi_n(z)$ ou $\frac{1}{\Phi_n(z)}$ est une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes.

P. Montel (*b*, *c*, *d*) dit qu'*une famille de fonctions méromorphes dans* Δ *est normale* lorsque, de toute suite de fonctions de la famille, on peut extraire une autre suite uniformément convergente dans Δ. Une famille est *normale en un point de* Δ lorsque ce point est centre d'un cercle dans lequel la famille est normale. En utilisant le théorème de Borel-Lebesgue, P. Montel montre que :

XIX. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit normale dans un domaine est qu'elle soit normale en chaque point du domaine.*

Le lemme fondamental dans cette théorie :

XX. *Une suite de fonctions* $\varphi_n(z)$ *holomorphes dans le cercle* $|z| < R$ *et telles que l'on ait uniformément*

$$|\varphi_n(z)| < M$$

est normale dans ce cercle,

combiné avec le théorème XIX et le théorème de Schottky, conduit P. Montel à cette importante conséquence :

XXI. *Les fonctions holomorphes dans un domaine* Δ *où elles ne prennent pas les valeurs* 0 *et* 1 *forment une famille normale dans* Δ.

Une même transformation homographique effectuée sur les fonctions d'une famille normale dans un domaine conduit à une famille normale, ce qui permet de passer à la proposition générale :

XXII. *Les fonctions méromorphes dans un domaine* Δ *où elles ne prennent pas trois valeurs exceptionnelles fixes forment une famille normale dans* Δ.

G. Julia a remarqué que, si des fonctions méromorphes dans un domaine ne forment pas une famille normale, il existe un point du domaine où cette famille n'est pas normale; dans un cercle ayant pour centre ce point l'ensemble de ces fonctions prend toute valeur, sauf peut être deux valeurs exceptionnelles. Cette remarque est le point de départ des recherches qui vont être exposées.

11. Le théorème de G. Julia. — Soit $\Phi(z)$ une fonction admettant le point à l'infini pour singularité essentielle isolée (limite de pôles ou non). Soient Γ un chemin continu aboutissant à ce point, M un point de Γ et E(M) l'ensemble des valeurs de $\Phi(z)$ sur Γ entre M et l'infini et des points limites de ces valeurs. L'ensemble E commun à tous les E(M) est le *domaine d'indétermination* de (z) le long de Γ : si E est borné, Γ est un *chemin d'indétermination finie;* s'il se réduit à un point ω, Γ est un *chemin de détermination* ω, Γ est la *valeur asymptotique* le long de Γ. Si $\Phi(z)$ est holomorphe autour du point à l'infini, il existe des chemins de détermination ∞ (*voir* n° **21**).

G. Julia (*a*, *b*) a établi les propositions suivantes :

XXIII. *S'il existe un chemin de détermination* ω (*finie ou non*) *pour la fonction* $\Phi(z)$, *on peut assurer que toute fonction* $\Phi(z) - x$ *s'annule une infinité de fois, sauf pour deux valeurs* x_D, x'_D *au plus, sur certains ensembles* D *définis de l'une des façons suivantes :*

1° *Soient* L *un chemin donné aboutissant au point à l'infini,* ε *un nombre positif donné,* D' *le domaine balayé par un cercle* C_z *dont le centre* z *décrit* L *et dont le rayon est* $\varepsilon|z|$; *il existe un domaine* D *qui se déduit de* D' *par une rotation convenable autour de l'origine;*

2° *Soient* σ *un nombre de module supérieur à* 1 *et* ε *un nombre positif arbitraire, il existe un point* z_0 *au moins de module compris entre* 1 *et* σ (*égalité permise*) *tel que l'ensemble des cercles* C_n ($n = 1, 2, \ldots$) *de centres* $z_0\sigma^n$ *et rayons* $\varepsilon|\sigma^n|$ *constitue un ensemble* D;

3° *Soient* ω_1 *un nombre, distinct de* ω, *pour lequel* $\Phi(z) - \omega_1$ *a une infinité de zéros;* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *une suite infinie de ces zéros et* C'_n *le cercle de centre* a_n *et rayon* $\varepsilon|a_n|$ (ε *arbitrairement choisi*), *il existe un ensemble* D *qui se déduit de l'ensemble des* C'_n *par une rotation convenable autour de l'origine.*

Pour obtenir la seconde proposition, par exemple, G. Julia applique la remarque faite à la fin du n° 10 à la suite des fonctions méromorphes $\Phi_n(z) = \Phi(z\sigma^n)$. Il étudie également l'ensemble E_σ des points où cette suite n'est pas normale (et les ensembles analogues dans les deux autres cas) : E_σ est un ensemble fermé, c'est sa seule propriété générale, il peut ne comprendre qu'un point dans chaque région $|\sigma|^n \leqq z < |\sigma|^{n+1}$, mais il est parfait si $\Phi(z)$ admet une seconde valeur asymptotique; il peut être linéaire et même comprendre tout le plan.

G. Julia a abordé aussi le cas où $\Phi(z)$ n'admet pas de valeur asymptotique (c'est ce qui se produit pour les fonctions elliptiques), mais les résultats alors obtenus ne présentent plus le même degré de généralité; il considère aussi d'autres définitions de l'ensemble D. P. Montel (*f*) a complété le théorème de Julia dans le cas des fonctions $F(z)$ holomorphes autour du point à l'infini qui possèdent en outre un chemin d'indétermination finie. Ses résultats et le théorème XXIII sont des conséquences d'une proposition plus précise due à H. Milloux (*b*, *c*) :

XXIV. *Soit* $Z = \Phi(z)$ *une fonction admettant le point à l'infini pour point singulier essentiel isolé et admettant un chemin* Γ *de détermination* o. *Soit* $\mu(r)$ *une fonction croissante, mais croissant moins vite que* $\left|\frac{1}{\Phi(z)}\right|$ *sur* Γ. *Posons*

$$D(r) = [\log \mu(r)]^{\frac{1}{14}}, \qquad q(r) = \frac{1}{15} \log_2 \mu(r).$$

L'un des deux cas suivants se présente :

1° *Dans la couronne* $||z| - r| < \frac{2\pi r}{q(r)}$, *on a l'inégalité*

$$\log|\Phi(z)| < -[\log \mu(r)]^{\frac{2}{3}};$$

2° *Il existe un cercle* $C(r)$ *dont le centre a pour module* r *et dont le rayon est* $\frac{8\pi r}{q(r)}$ *dans lequel* $\Phi(z)$ *prend toutes les valeurs* Z *de module inférieur à* $D(r)$, *sauf peut-être celles comprises dans deux cercles de rayons* $\frac{3}{D(r)}$.

Dans sa démonstration, H. Milloux s'appuie directement sur le théorème de Schottky et sur cette proposition qui découle du théorème de Phragmén et Lindelöf (th. XLIII) : si $\psi(z)$ est holomorphe et de module inférieur à M dans un cercle C et sur sa circonférence et de module moindre que m $(m < M)$ sur une ligne polygonale joignant le centre à un point de la circonférence, on a dans le cercle concentrique à C et de rayon moitié

$$|\psi(z)| < M\left(\frac{m}{M}\right)^{\alpha},$$

α étant une constante positive facile à calculer. La démonstration de Milloux montre que le théorème de Julia peut se généraliser au cas où l'on considère l'ensemble des fonctions $F(z)+P(z)$ où $P(z)$ est un polynome, ou des ensembles encore plus généraux; le résultat obtenu est d'ailleurs plus précis puisque les rayons des cercles $C(r)$ tendent vers o. Mais l'étude des ensembles tels que E_σ, qui s'introduisent dans la méthode de Julia, semble digne d'intérêt.

12. Théorèmes de Lindelöf et de Montel. — La méthode des familles normales a permis à P. Montel (b, c, d) de retrouver et de compléter des théorèmes démontrés d'abord par E. Lindelöf (g, i) par une toute autre méthode. Ces théorèmes sont relatifs à la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe $\theta(z)$ dans un secteur S, $|z| < R_0$, $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \gamma$, dans lequel elle ne prend pas trois valeurs exceptionnelles a, b, c : on introduit la suite de fonctions $\theta_n(z) = \theta(z\sigma^n)$, σ étant positif et inférieur à 1. On établit ainsi ces propositions :

XXV. 1° *Soit* Γ *un chemin aboutissant à l'origine en restant à l'intérieur d'un angle* A *de sommet intérieur à* S. *Si* $\theta(z)$ *tend vers une limite lorsque* z *tend vers* o *sur* Γ, $\theta(z)$ *tend uniformément vers cette limite lorsque* z *tend vers* o *en restant dans* A. *Si* $|\theta(z) - a|$ $\left(\text{ou } \left|\frac{1}{\theta(z)}\right| \text{ si } a = \infty\right)$ *reste supérieur à* $K > 0$ *sur* Γ, *cette expression reste uniformément supérieure à un nombre* K' *dans* A (¹);

2° *Le domaine d'indétermination de* $\theta(z)$ *le long de deux chemins tangents en* O *à un même rayon intérieur à* S *est le même; le domaine d'indétermination* Ω_φ *le long d'un rayon* $\varphi =$ const. *varie continûment avec* φ;

(¹) P. Montel suppose Γ rectiligne, sa démonstration s'étend au cas général.

3° *$r_n(x)$ étant le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $\theta(z) - x$ contenu dans A, la série $\Sigma r_n(x)^\varepsilon$ converge pour tout ε positif si x n'appartient pas à tous les domaines Ω_φ.*

Ces résultats peuvent être complétés lorsque $|\theta(z)|$ est borné dans S [*voir* Montel (*d*)]; dans ce cas E. Lindelöf donne quelques démonstrations extrêmement simples au moyen du principe dont il sera question au n° 20.

IV. — Fonctions entières et méromorphes d'ordre fini.

13. La formule de Jensen-Poisson et l'exposant de convergence. — J. L. Jensen (*a*) a donné une formule, aujourd'hui classique, qui joue un rôle essentiel dans les recherches quantitatives relatives aux zéros des fonctions analytiques. R. et F. Nevanlinna (34) ont établi une formule générale, dont ils ont donné de belles applications, qui comprend comme cas particuliers celle de Jensen et la formule bien connue de Poisson. Soient $\Phi(z)$ une fonction méromorphe dans une couronne $R' \leq |z| \leq R$ limitée par deux circonférences Γ et Γ'; a_1, $a_2, \ldots, a_n$ les zéros et $b_1, b_2, \ldots, b_m$ les pôles supposés tous intérieurs à la couronne et z_0 un point de la couronne distinct de ces zéros et pôles. Si

$$\theta(z) = e^{h(z)+ik(z)}$$

désigne une fonction monogène dans la couronne, sauf en z_0 qui est un pôle d'ordre 1, et de module égal à 1 sur Γ et Γ' (fonction de Green), l'intégration de la fonction

$$\log \Phi(z) \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$$

sur un contour convenable conduit à la formule qui sert de point de départ à F. et R. Nevanlinna. En supposant $R' = 0$, on obtient la *formule de Jensen-Poisson* qui sera seule utilisée dans ce qui suit :

$$(23) \quad \log|\Phi(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(Re^{iv})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(v - \varphi)}\,dv$$
$$-\sum \log\left|\frac{R^2 - a'_i z}{R(z - a_i)}\right| + \sum \log\left|\frac{R^2 - b'_j z}{R(z - b_j)}\right|$$

(les a'_i et b'_j sont les nombres imaginaires conjugués des a_i et b_j et $r < \mathrm{R}$). On en déduit de suite la *formule de F. et R. Nevanlinna*

$$(24)\qquad \log\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(\mathrm{R}\,e^{iv})|\,\frac{\mathrm{R}\,e^{iv}+z}{\mathrm{R}\,e^{iv}-z}\,dv$$
$$-\sum \log\frac{\mathrm{R}^2 - a'_i z}{\mathrm{R}(z-a_i)} + \sum \log\frac{\mathrm{R}^2 - b'_j z}{\mathrm{R}(z-b_j)} + i\mathrm{K}.$$

Pour $r = 0$, la formule (23) donne la formule de Jensen; si l'on désigne par $n(x)$ le nombre des zéros a_i de module inférieur ou égal à x, on peut écrire

$$\sum \log\frac{r}{|a_i|} = \int_0^r n(x)\,\frac{dx}{x} = \mathrm{W}(r),$$

et l'on obtient, pour une fonction entière $f(z)$ ($f(0) \neq 0$), la formule de Jensen sous la forme souvent utilisée :

$$(25)\qquad \mathrm{W}(r) + \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r\,e^{i\varphi})|\,d\varphi < \log\mathrm{M}(r).$$

Cette formule est à rapprocher de celle du n° 5 et fait prévoir que la fonction $\mathrm{W}(r)$ est appelée à jouer un rôle analogue à celui du terme maximum.

Pour une fonction d'ordre fini ρ, l'inégalité (25) montre que $n(r)$ est inférieur à $r^{\rho+\varepsilon}$, ε positif, à partir d'une valeur de r, la série

$$(26)\qquad \sum \frac{1}{r_n^\tau}$$

converge pour $\tau > \rho$. On appelle *exposant de convergence de la suite des zéros* ou *ordre réel* (Borel) le nombre ρ_1 jouissant de cette propriété : la série (26) converge pour $\tau > \rho_1$ et diverge pour $\tau < \rho_1$; on reconnaît aisément que ρ_1 *est la limite supérieure pour n infini de la suite* $\log n : \log r_n$. Le résultat obtenu ci-dessus s'énonce alors de la façon suivante :

XXVI. *L'exposant de convergence de la suite des zéros d'une fonction* $\mathrm{F}(z)$ *holomorphe autour du point à l'infini est au plus égal à l'ordre* [Borel (c)].

Remarquons ici que la série (26) converge ou diverge en même temps que l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{n(x)}{x^{\tau+1}}\,dx.$$

14. Théorie de J. Hadamard. — J. Hadamard a montré que la fonction $g(z)$ qui s'introduit dans la formule de décomposition en facteurs de Weierstrass (n° 1) est un polynome de degré au plus égal à $\rho+1$, si ρ est l'ordre, et si $P(z)$ est convenablement défini. La méthode de J. Hadamard est encore celle qui conduit aux résultats les plus complets, c'est la seule que nous exposerons avec quelques détails, avec les diverses additions qui y ont été faites.

Si ρ est l'ordre supposé fini, ρ_1 l'exposant de convergence, le plus petit entier p qui est tel que la série (26) converge pour $\tau = p+1$ mais diverge pour $\tau = p$ est la partie entière de ρ_1 si ρ_1 n'est pas entier, il est égal à ρ_1 ou à $\rho_1 - 1$ si ρ_1 est entier. *On forme le produit* $P(z)$ *de Weierstrass en prenant* $p_n = p$, p *est le genre du produit canonique* (Laguerre). L'étude des produits canoniques ainsi définis, amorcée par Poincaré, a été faite par J. Hadamard et E. Borel (*c*). En utilisant des limitations assez grossières de $E(u, p)$ on établit les inégalités suivantes, où k est donné supérieur à 1 et K un nombre fixe :

$$(27)\quad \begin{cases} -KI + \log \prod_{1}^{N} \left| 1 - \dfrac{z}{a_n} \right| < \log |P(z)| < KI \qquad (r_N \leq kr \leq r_{N+1}), \\ I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{n(x)}{x^{p+1}} \frac{r^{p+1}}{x+r}\,dx, \end{cases}$$

qui permettent d'établir les deux théorèmes de Borel (*c*).

XXVII. *L'ordre ρ_1 d'un produit canonique de genre fini p est égal à l'exposant de convergence de la suite de ses zéros.*

XXVIII. *Si de chaque zéro a_n comme centre on décrit un cercle de rayon r_n^{-h} $(h > \rho)$, dans le domaine restant, qui comprend des cercles de rayons aussi grands que l'on veut centrés à l'origine, on a, quel que soit ε,*

$$\log |P(z)| > -r^{\rho+\varepsilon},$$

pourvu que r soit assez grand.

Le second énoncé est dû en partie à E. Maillet, E. Borel le résume d'une façon frappante en disant que, en général, le minimum du module pour $|z| = r$ est d'ordre infinitésimal au plus égal à celui de $\frac{1}{M(r)}$. G. Valiron (*t*) a remarqué que, $M(r)$ étant le module maximum de $P(z)$, $p(r)$ le module minimum, on a

$$\int_\alpha^r \overset{+}{\log} \frac{1}{p(x)} dx < \int_\alpha^{kr} \log M(x)\, dx \qquad (\alpha > 0, k > 1);$$

cette formule comprend un résultat donné antérieurement par E. Lindelöf (*a*) qui montra que : lorsque $n(x) : x^\rho$ tend vers 0, non seulement $\log |P(z)| : r^\rho$ tend vers 0 (Borel (*c*)), mais aussi $\overset{+}{\log} \frac{1}{p(r)} : r^\rho$ pour une suite de valeurs tendant vers l'infini [*voir* aussi (36, *c*)].

En résolvant la formule de décomposition en facteurs par rapport au facteur exponentiel et en utilisant son résultat sur la partie réelle (n° 3), J. Hadamard obtient son théorème fondamental, qui, complété par Borel, s'énonce ainsi :

XXIX. *Une fonction entière d'ordre ρ non entier est de la forme* (5), $P(z)$ *étant de genre p (partie entière de ρ) et d'ordre ρ et $g(z)$ étant un polynome de degré q au plus égal à ρ. Si ρ est entier*, $P(z)$ *est d'ordre ρ_1 au plus égal à ρ, $g(z)$ est de degré q au plus égal à ρ, l'un au moins des nombres ρ_1 ou q étant égal à ρ.*

Le plus grand des deux nombres p et q est *le genre* de Laguerre; il est bien déterminé si ρ n'est pas entier, égal à ρ ou à $\rho - 1$ si l'ordre ρ est entier, le second cas ne pouvant se présenter que si $\log M(r) : r^\rho$ tend vers 0.

G. Valiron (*p*, *s*) a complété le théorème précédent en utilisant la formule de Jensen sous la forme plus générale

$$(28) \quad \int_\alpha^r \frac{n(x)}{x^{1+k}} dx < K + \frac{\log M(r)}{r^k} + k \int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{1+k}} dx \qquad (\alpha > 0, k > 0),$$

et en intégrant une inégalité déduite de (27); il donne ce résultat :

XXX. *Si l'ordre ρ n'est pas entier, la condition nécessaire et suffisante pour que la série* (26) *converge pour $\tau = \rho$ est que la fonction soit de la classe inférieure. Lorsque ρ est entier et la* *fonction de la classe inférieure, la série* (26) *converge pour* $\tau = \rho$, *le genre est* $\rho - 1$.

Le cas de l'ordre entier et des fonctions de la classe supérieure sera envisagé au n° 16. La définition de la classe (n° 5) ne faisant intervenir que les propriétés asymptotiques de $\log M(r)$, les séries (26) relatives aux diverses fonctions $F(z) + F_1(z)$ où $F(z)$ est donnée et $F_1(z)$ d'ordre inferieur convergent toutes en même temps si l'ordre de $F(z)$ n'est pas entier, on a de même des propriétés relatives à la dérivée.

F. Nevanlinna (*b*) a déduit le théorème de la décomposition en facteurs d'une formule obtenue en dérivant $q+1$ fois la formule (24). La formule (24) renferme en effet la proposition sur la partie réelle (qui peut être déduite de la formule de Poisson) et évite l'emploi du théorème XXVIII sur le minimum du module; on montre que la différence

$$\frac{d^{q+1}}{dz^{q+1}}[\log f(z)] - \sum_{r_n < R} \frac{(-1)^q !}{(z - a_n)^{q+1}}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$ dès que $q = p$, dans ces conditions la série introduite converge absolument, ce qui conduit à la formule de décomposition ([1]), mais ne donne pas le théorème XXIX (pour l'obtenir il faut utiliser le théorème XXVII ou une proposition analogue).

15. Distribution des zéros des fonctions d'ordre non entier. — Lorsque l'ordre n'est pas entier, les théorèmes XXIX et XXX donnent déjà des renseignements sur la densité des zéros, on peut étudier d'une façon plus précise les relations entre les fonctions $\log M(r)$ et $n(r)$, surtout dans les cas de croissance régulière.

Lorsque la suite des modules des zéros est connue, le théorème de Jensen et l'inégalité (27) donnent des limitations de $\log M(r)$: E. Lindelöf (*a*) a donné une limitation supérieure exacte dans le cas des genres 0 et 1 lorsque $n(r)$ est asymptotiquement égal aux fonctions $V(r)$ considérées au n° 5; G. Valiron (*c*) a généralisé ses résultats en comparant $n(r)$ aux fonctions $r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ jouissant des

---

([1]) La fin de la démonstration de F. Nevanlinna doit être modifiée dans le sens indiqué ici.

propriétés de l'ordre L (n° 5) et en ne limitant plus le genre. Dans un ordre d'idées analogue, G. Plóya (g) montre que la limite inférieure d'indétermination de $n(r) : \log M(r)$ est au plus égale à l'ordre ρ, la limite supérieure étant au moins égale à une fonction $\varphi(\rho)$ dont la valeur exacte est donnee par G. Valiron (y).

Lorsque l'on connaît une valeur approchée de $\log M(r)$, l'inégalité de Jensen donne une limitation supérieure de $n(r)$, l'emploi convenable de l'inégalité (27) fournit alors une limitation inférieure. On obtient ainsi le théorème de Borel (c) :

XXXI. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre ρ non entier soit à croissance régulière est que le rapport de* $\log n$ *à* $\log r_n$ *tende vers ρ lorsque n croît indéfiniment.*

E. Lindelöf (a) a complété ce résultat en introduisant des hypothèses plus précises; parmi ses résultats je citerai le suivant :

XXXII. ρ *n'étant pas entier, les limites supérieures d'indétermination de* $\log M(r) : r^\rho$ *et de* $n : r_n^\rho$ *sont à la fois* $0, +\infty$, *finies positives. Si l'une de ces expressions a ses deux limites d'indétermination finies et positives, il en est de même de l'autre.*

En remplaçant dans cet énoncé ρ par $\rho(r)$, ordre L, le résultat reste valable, il comprend tous ceux donnés par E. Lindelöf dans le même ordre d'idées. E. Lindelöf a montré les difficultés qui se présentent dans le calcul exact de l'une des limites figurant dans l'énoncé lorsqu'on donne la valeur de l'autre. En remplaçant ρ par $\rho(r)$, ordre B, on obtient de même les résultats de P. Boutroux (a); dans ce cas $\log M(r)$ peut être à croissance très irrégulière pourvu que les irrégularités soient lentes : la relation entre $\log M(r)$ et $n(r)$ ne depend en somme que de ce qui se passe dans un intervalle $\frac{r}{k}, kr$.

G. Valiron (c) a déterminé toutes les fonctions pour lesquelles le rapport $n(r) : \log M(r)$ a des limites d'indétermination finies positives quels que soient les arguments des zéros, il retrouve les fonctions de Boutroux; il donne le résultat suivant implicitement contenu dans ceux de Boutroux (46, q) :

XXXIII. *Pour toute fonction* $F(z)$ *d'ordre ρ non entier, on* *peut trouver trois constantes* K, K', K'' *et une suite infinie de couronnes non empiétantes* C_n, $R_n < |z| < K R_n$, *dans lesquelles* $\log_2 M(r) : \log r$ *tend vers* ρ *et telles que chaque fonction* $F(z) - x$ *possède*

$$h \log M(KR_n), \qquad K' < h < K'',$$

dans toute couronne C_n *de rang assez grand* $(n > n_x)$.

16. Les zéros des fonctions d'ordre fini entier. — Dans le cas de l'ordre ρ entier, *le cas d'exception de Picard* peut se produire, la fonction peut n'avoir qu'un nombre fini de zéros. E. Borel (*c*) a apporté dans ce cas cet important complément au théorème de Picard :

XXXIV. $F(z)$ *étant d'ordre entier* ρ, *l'exposant de convergence des zéros de* $F(z) - x$ *est égal à* ρ, *sauf pour une valeur* x *au plus.*

Le processus de la démonstration doit être indiqué ici (on supposera la fonction entière) : si $f(z) - a$ et $f(z) - b$ ont un ordre réel moindre que ρ, ces fonctions sont de la forme

$$f(z) - a = e^{Q_1} P_1, \qquad f(z) - b = e^{Q_2} P_2,$$

Q_1 et Q_2 étant des polynomes de degré ρ, P_1 et P_2 des fonctions d'ordre inférieur à ρ. En éliminant e^{Q_2} entre l'identité

$$e^{Q_1} P_1 - e^{Q_2} P_2 \equiv b - a$$

et sa dérivée, on obtient e^{Q_1} sous forme du quotient de deux fonctions d'ordre moindre que ρ, ce qui est impossible d'après les théorèmes XXVII et XXVIII.

E. Borel (c) généralise le résultat en remplaçant x par le quotient de deux fonctions d'ordre inférieur à ρ. *Le cas d'exception de Borel*, c'est-à dire le cas où l'exposant de convergence des zéros est inférieur à l'ordre ρ, *ne peut se produire que si le rapport*

$$\log M(r) : r^\rho \tag{29}$$

a une limite finie non nulle pour $r = \infty$. Si cette circonstance se présente, la série (26) relative à $F(z)-x$ diverge, sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle x.

En suivant la méthode de Borel, mais en décomposant $f(z)-a$ en un produit d'une exponentielle par un polynome formé avec les zéros intérieurs au cercle $|z|<kr$, $(k>1)$, et en introduisant systématiquement la fonction de Jensen à la place du nombre des zéros, G. Valiron (q) a démontré cette proposition générale :

XXXV. *$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini, $n(r, x)$ le nombre des zéros de $f(z)-x$ dans le cercle $|z|\leqq r$, si l'on pose*

$$W(r, y)=\int_{\frac{1}{2}}^{r} n(x, y)\frac{dx}{x}, \tag{30}$$

à tout nombre k supérieur à 1 correspond un nombre $H(k)$ tel que, si $a\neq b$, on a pour $r>r_{a,b}$

$$W(kr, a)+W(kr, b)>H(k)\log M(r). \tag{31}$$

Le théorème reste vrai si l'on remplace $f(z)-x$ par $f(z)-f_1(z)$, $f_1(z)$ étant d'ordre moindre que $f(z)$; l'extension aux fonctions $F(z)$ holomorphes seulement autour du point à l'infini résulte de ce théorème de A. Bloch : si $F(z)$ est holomorphe pour $|z|>A$ sauf à l'infini, on peut effectuer une représentation conforme de l'extérieur d'un cercle $|z|\geqq A'>A$ sur l'extérieur d'une courbe, transformant $F(z)$ en le quotient d'une fonction entière par un polynome.

En intégrant les deux membres de (31) multipliés par $r^{-\rho-1}\,dr$, on complète le théorème XXX de la façon suivante (46, s) :

XXXVI. *Pour une fonction d'ordre ρ entier de la classe supérieure le genre du produit canonique relatif à $f(z)-x$ est égal à ρ, sauf pour une valeur x au plus.*

Le cas d'exception ne se produit pas si la fonction est du type maximum.

Le théorème XXXV avec le complément indiqué ci-dessus contient les résultats obtenus par E. Lindelöf (d) et tels que le suivant :

XXXVII. *Considérons les fonctions $f(z)f_1(z)-f_2(z)$, où $f(z)$ est d'ordre ρ, $f_1(z)$ et $f_2(z)$ d'ordre moindre que ρ : si $f(z)$ est du type moyen, le rapport $n : r_n^{\rho}$ reste au-dessous d'une limite finie,* *mais ne tend vers zéro pour aucune des fonctions considérées, sauf une au plus; si $f(z)$ est du type maximum, il y a une fonction au plus pour laquelle ce rapport reste borné.*

Remarquons qu'ici encore le cas d'exception ne se produit pas si $\log M(r) : r^\rho \log r$ a une limite supérieure infinie.

On retrouve de même les résultats de E. Lindelöf (d) concernant les fonctions à croissance régulière, par exemple : si $f(z)$ est à croissance très régulière et si le rapport $n(r, x) : r^\rho$ tend vers o pour une valeur de x, il a des limites d'indétermination positives pour toutes les autres valeurs. J. Sire (c) a montré que les choses sont moins simples en général : *pour les fonctions $f(z)$ d'ordre entier à croissance régulière, le rapport $\log n(r, x) : \log r$ tend vers ρ quel que soit x, sauf au plus pour les x appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle.* Cet ensemble exceptionnel peut effectivement exister et admettre tous les points d'une aire pour points de condensation. G. Valiron (l, x) a complété ces résultats, qui rentrent dans cette conséquence du théorème XXXV :

XXXVIII. *k étant donné et plus grand que un, l'inégalité*

$$W(kr, x) > H_1(k) \log M(r) \qquad [H_1(k) > 0]$$

a lieu pour toutes les valeurs x, sauf au plus pour les valeurs x appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle, et pour $r > r_x$.

Diverses anomalies qui peuvent se présenter pour les fonctions d'ordre entier ont été mises en évidence par E. Lindelöf (a, d), A. Wiman (a, b) et P. Boutroux (a) : la somme de deux fonctions d'ordre ρ et de genre $\rho - 1$ ou la somme d'une fonction d'ordre ρ et de genre $\rho - 1$ et d'une fonction d'ordre inférieur à ρ peut être de genre ρ; la dérivée d'une fonction d'ordre ρ et genre ρ peut être de genre $\rho - 1$; mais G. Valiron (t) et M. Alander (d) ont montré que :

XXXIX. *Le genre de la dérivée ne dépasse jamais le genre de la fonction.*

Wiman, Boutroux, Lindelöf ont aussi mis en évidence le rôle des arguments des zéros; si A est le coefficient de z^p dans $g(z)$, l'ordre de grandeur de la fonction dépend de celui de l'expression

$$r^p \left| \sum_1^{n(r)} \frac{1}{a_n^p} + pA \right|;$$

E. Lindelöf (d) en déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction d'ordre entier donnée par ses zéros soit du type minimum, moyen ou maximum et généralise ce résultat en comparant aux fonctions $r^\rho (\log r)^{\rho_1}$, etc.

De nouvelles propriétés des fonctions d'ordre entier ou non, se rattachant aux recherches de R. Nevanlinna, seront données au Chapitre V.

17. La dérivée logarithmique des fonctions entières. — P. Boutroux (a) a étendu à la dérivée logarithmique $H(z)$ d'un produit canonique le théorème relatif à l'ordre. En supprimant le voisinage des zéros on obtient une limitation supérieure de $|zH(z)|$ analogue à celle trouvée pour $\log P(z)$. On peut en particulier former un domaine Δ_α contenant des rayons $\varphi = \text{const.}$ dans tout angle donné de sommet O et d'ouverture donnée α ainsi que des circonférences $|z| = r$ dans toute couronne $R \leqq |z| \leqq R(1 + \alpha)$, dans lequel $|H(z)|$ *est inférieur à* $r^{\rho-1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, que ρ soit entier ou non, et à $K r^{\rho(r)-1} \log r$, $\rho(r)$ étant un ordre B, si ρ n'est pas entier. Si ρ est entier et si le genre est $\rho - 1$, il existe des circonférences $|z| = r$ de rayon aussi grand que l'on veut sur lesquelles $|H(z)|$ est inférieur à $\varepsilon r^{\rho-1}$. La formule de Cauchy donnant $n(r)$ au moyen d'une intégrale fournit d'autre part une limitation inférieure du maximum de $|H(z)|$ sur des circonférences appartenant à Δ_α.

P. Boutroux donne des propriétés analogues pour les dérivées successives de $H(z)$ et étend ses résultats à certaines classes de fonctions d'ordre infini; il les applique à l'étude des solutions des équations différentielles de P. Painlevé.

18. La méthode de Laguerre et les fonctions à zéros réels. — Laguerre a donné quelques indications sur une méthode qui lui a fourni d'importantes propriétés des fonctions de genre 0 et 1; E. Borel (c) a complété les démonstrations de Laguerre et établi en toute rigueur le théorème suivant :

XL. *Si une fonction entière réelle de genre p possède q zéros complexes seulement, sa dérivée est de genre p et possède, en dehors des zéros réels décelés par le théorème de Rolle, $p+q$ zéros au plus.*

L. Leau a démontré cette proposition et l'a complétée en utilisant des expressions approchées de la dérivée logarithmique $H(z)$, il donne une borne inférieure du nombre des *zéros extraordinaires* (non décelés par le théorème de Rolle) et étend certains résultats au cas où il y a une infinité de zéros complexes; certains de ses résultats sont complétés par G. Valiron (t), M. Alander a étudié les propriétés des dérivées des fonctions réelles à zéros réels, il donne une limitation inférieure du nombre des zéros complexes pour les petites valeurs du genre et cette proposition générale : *les seules fonctions entières réelles n'ayant ainsi que toutes leurs dérivées que des zéros réels sont le produit d'une fonction de genre* 1 *par* e^{-kz^2} ($k>0$). Il étend ce théorème au cas où l'on supprime l'hypothèse de la réalité de la fonction (I, c).

M. Biernacki a énoncé, pour la dérivée des fonctions non réelles à zéros réels, un résultat qu'il n'a pu établir complètement; M. Alander (e) montre que pour ces fonctions la dérivée n'a qu'un nombre fini de zéros dans deux des quatre angles formés par les axes du plan des z.

E. Lindelöf (a), A. Wiman (a), L. Leau, G. Valiron (c) ont donné des expressions asymptotiques de $\log P(z)$ lorsque les zéros sont voisins d'une demi-droite et leur distribution régulière; ils mettent ainsi en évidence diverses circonstances qui peuvent se présenter dans la distribution des zéros des fonctions $f(z)-x$. G. Valiron montre que $n(r)$ peut être calculé asymptotiquement lorsqu'on sait que les zéros sont positifs et lorsque $\log M(r)$ est suffisamment régulier (ordre non entier).

Les fonctions réelles à zéros réels qui sont le produit d'une fonction de genre o ou 1 par e^{-kz^2}, $k>0$, sont fonctions limites de suites de polynomes à zéros réels, elles jouissent d'un grand nombre de propriétés communes avec les polynomes. Sur ce point, G. Pólya a complété et étendu des résultats de Laguerre : dans un premier mémoire (10, b), en collaboration avec I. Schur, il étudie les suites de nombres γ_n qui sont telles que la transformation $(c_n, c_n\gamma_n)$ effectuée sur les coefficients n'influe pas sur la réalité des zéros ou sur leur signe; dans un second mémoire il étend notamment à ces fonctions un théorème énoncé par Poulain pour les polynomes [*voir* aussi Jensen (*b*)].

J. Grommer a donné les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients du développement de Taylor de la dérivée logarithmique $H(z)$, $(f(0) \neq 0)$, pour que tous les zéros soient réels. Ses recherches se rattachent à la théorie des moments de Stieltjes.

La méthode de Laguerre et Borel pour établir le théorème XL consiste à considérer la dérivée logarithmique $H(z)$ de la fonction entière comme la limite de la suite de fractions rationnelles obtenues en prenant les m premiers termes dans le développement de $H(z)$. Cette méthode a été employée par E. Lindwart pour démontrer le théorème d'Hadamard sur la décomposition en facteurs (mais non pas le théorème XXIX complet). P. Montel (*c*, *e*) a aussi démontré ce théorème en s'appuyant sur les propriétés des familles de polynomes d'ordre ρ : ce sont les polynomes pour lesquels les p premiers coefficients ($p =$ partie entière de ρ) sont bornés ainsi que la somme des puissances $-\rho-\varepsilon$ des modules des racines; une famille d'ordre ρ est normale et toute fonction limite est une fonction entière de genre p au plus. Cette méthode, qui rattache la démonstration du théorème d'Hadamard à la théorie des familles normales de fonctions (n° 10), conduit d'une façon très naturelle aux théorèmes de Laguerre-Borel (th. XL) et de Poulain. G. Pólya (*f*) a employé une méthode qui s'apparente à la fois à celles de Lindwart et de Montel.

19. Les fonctions d'ordre nul. — Les fonctions d'ordre nul présentent de grandes analogies avec les polynomes, ces analogies sont d'autant plus grandes que la croissance est moins rapide; mais la théorie de la croissance et la définition de l'ordre présentent les mêmes difficultés que pour les fonctions d'ordre infini. E. Maillet et R. Mattson ont étudié des classes de ces fonctions définies par la comparaison de $\log M(r)$ avec des fonctions simples : $(\log r)^k$, $k > 1$; $\log r (\log_2 r)^k$, etc. J. E. Littlewood (*a*) a considéré le cas où $\log r_n : \log n$ est une fonction croissante de n et a donné des formules très précises pour certaines classes de fonctions. G. Valiron (*a*) a complété ces résultats en donnant une théorie analogue à celle de

Blumenthal pour l'ordre infini puis en se plaçant au point de vue signalé au n° 5, ce qui permet de former un nombre restreint de classes aisées à étudier (46, c).

J.-E. Littlewood a donné la proposition générale suivante :

XLI. *Pour une fonction $f(z)$ d'ordre nul existe une suite de circonférences $|z| = r$, dont les rayons tendent vers l'infini, sur lesquelles on a*

$$\log|f(z)| \sim \log M(r) \sim W(r). \tag{32}$$

G. Valiron (c) retrouve le théorème précédent et obtient le suivant :

XLII. *Pour toute fonction d'ordre nul $f(z)$ telle que le rapport de $\log M(r)$ à $(\log r)^2$ reste borné, la première partie de l'égalité (32) a lieu à condition d'exclure du plan des aires renfermant les zéros a_n et infiniment petites par rapport à r_n, la seconde partie de l'égalité est vérifiée quel que soit r.*

Pour ces fonctions on peut établir une correspondance simple entre les zéros des fonctions $f(z) - x$, le problème de la distribution des zéros est résolu avec une grande précision. On a un résultat moins précis, mais valable pour toutes les fonctions d'ordre nul, en appliquant la méthode de Carleman (46, w).

20. Le principe de Lindelöf-Phragmén et le théorème de Wiman. — E. Lindelöf et E. Phragmén ont généralisé le théorème de Cauchy sur le maximum du module d'une fonction analytique de la façon suivante (28, e) :

XLIII. *Soit $\Theta(z)$ une fonction monogène et régulière dans un domaine Δ et dont le module est uniforme dans Δ et moindre que $M + \varepsilon$, si petit que soit le nombre positif ε, lorsqu'on approche du contour à l'exception d'un ensemble E de points de ce contour. Supposons qu'il existe une fonction $\omega(z)$, également monogène et régulière dans Δ, ne s'annulant pas dans Δ, de module uniforme et inférieur ou égal à 1 dans Δ et telle que, si petits que soient les nombres positifs σ et ε, on ait*

$$|\omega(z)^\sigma \Theta(z)| < M + \varepsilon,$$

dès que z est suffisamment voisin d'un quelconque des points de E. *Dans ces conditions* $|\Theta(z)|$ *est au plus égal à* M *en tout point de* Δ.

Cette proposition élémentaire conduit à de nombreuses conséquences, non seulement dans la théorie ici exposée, mais dans beaucoup d'autres. En voici une première : *une fonction* $\Theta(z)$, $z=e^{i\varphi}r$, *holomorphe dans un secteur* S, $|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2\rho'}$, $|z|>R_0$, *et telle que* $\log|\Theta(z)|:r^{\rho'}$ *tende uniformément vers* o *lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans* S, *est bornée dans* S *si elle l'est sur le contour de* S (38, *a* ; 28, *e*). On tire de là le theorème de Bieberbach du n° 9. Lindelöf et Phragmén ont déduit de leur principe le théorème général suivant qui s'applique en particulier aux fonctions $F(z)$ holomorphes autour du point à l'infini :

XLIV. *Soit* $\Theta(z)$ *holomorphe dans le secteur* S *défini ci-dessus et d'ordre* ρ *au plus égal à* ρ' *dans ce secteur. Soit* $V(z)$ *une fonction holomorphe dans* S, *réelle et positive pour z réel, positif et assez grand, telle que* $V(re^{i\varphi}):V(r)$ *tende uniformément vers* $e^{\rho\varphi i}$ *dans* S *lorsque r croît indéfiniment et telle que* $\log V(r):\log r$ *admette* ρ *pour limite supérieure pour r infini. Désignons par* $h(\varphi)$ *la limite supérieure pour r infini du quotient* $\log|\Theta(re^{i\varphi})|:V(r)$. *Dans ces conditions,* $h(\varphi)$ *est au plus égal à la valeur de la fonction linéaire et homogène en* $\cos\varphi\rho$ *et* $\sin\varphi\rho$ *qui prend les valeurs* $h\left(-\frac{\pi}{2\rho'}\right)$, $h\left(\frac{\pi}{2\rho'}\right)$ *sur les côtés du secteur.*

E. Lindelöf et Phragmén appliquent leur théorème en prenant pour $V(z)$ des fonctions telles que z^ρ, $z^\rho(\log z)^{\rho'}$, etc., on peut prendre aussi $V(r)=r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ étant un ordre L (46, *c*), ce qui conduit à des résultats valables pour toutes les fonctions d'ordre fini et en particulier au suivant :

XLV. *Pour une fonction* $F(z)$ *d'ordre égal à* $\rho(r)$, *la limite supérieure pour r infini du rapport* $\log|F(re^{i\varphi})|:r^{\rho(r)}$ *est au moins égale à* -1 *pour toute valeur de* ρ *et au moins égale à* $\cos\pi\rho$ *si* $\rho<1$; *un angle dans lequel cette limite est négative a une ouverture au plus égale à* $\frac{\pi}{\rho}$. *En particulier pour* $\rho<\frac{1}{2}$, *quelque petit que soit* $\varepsilon>0$, *il existe une suite de circonférences de* *rayons indéfiniment croissants sur lesquelles on a*

$$\log |F(z)| > (\cos \pi\rho - \varepsilon) \log M(r).$$

La dernière partie de cette proposition constitue *le théorème de Wiman* (46, c), (47, a) qui rapproche les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ des polynomes; certains résultats de la théorie des polynomes, par exemple ceux relatifs à la représentation par la formule de Lagrange, s'étendent à ces fonctions (46, f). Dès que l'ordre est égal à $\frac{1}{2}$, la fonction peut avoir une valeur asymptotique finie; G. Valiron (c, z) indique pour les fonctions d'ordre quelconque une proposition, encore incomplète, analogue au théorème de Wiman.

F. et R. Nevanlinna (34) ont montré que le principe de Phragmén-Lindelöf se déduit de propositions plus générales qui découlent de l'extension de la formule du n° 13. Parmi les résultats nouveaux obtenus par ces auteurs signalons le suivant qui se déduit de la formule de Poisson et complète ceux donnés ci-dessus :

XLVI. *Si* $\Theta(z)$, $z = x + iy$, *est régulière pour* $x > 0$, *et si, pour tout* ε *positif*, $|\Theta(z)| < 1 + \varepsilon$ *dans le voisinage de la droite* $x = 0$, *deux cas sont possibles :* 1° *en tout point du demi-plan* $x > 0$, *on a* $|\Theta(z)| < 1$; 2° *la fonction n'est pas bornée dans ce demi-plan et il existe un nombre positif* η *tel que*

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \overset{+}{\log} |\Theta(r e^{i\varphi})| \cos\varphi \, d\varphi > \eta.$$

21. Les chemins de détermination et le théorème de Carleman. — Le théorème XLIII montre que toute fonction $F(z)$ holomorphe autour du point essentiel ∞ admet des chemins de détermination infinie (18, a), (46, i). E. Lindelöf en déduit aussi cette importante proposition :

XLVII. *Si* $F(z)$ *admet deux chemins de détermination* ω_1, ω_2 *et est bornée dans l'un,* Δ, *des domaines délimités par ces chemins dans le voisinage du point* ∞, ω_2 *est égal à* ω_1 *et* $F(z)$ *tend uniformément vers* ω_1 *lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans* Δ.

Ce théorème et les propositions du numéro précédent permettent d'affirmer que ρ étant l'ordre, il existe au plus 2ρ chemins sur chacun desquels l'argument de z a une limite et qui sont chemins de détermination finie non contigus [deux chemins de détermination finie sont non contigus si $F(z)$ n'est borné dans aucun des deux domaines déterminés par ces chemins]. Des remarques de cette espèce ont conduit A. Denjoy (a) à penser que le nombre des valeurs asymptotiques finies est au plus égal au double de l'ordre, proposition qui n'est pas encore complètement démontrée ou mise en échec. T. Carleman a établi la proposition suivante :

XLVIII. *Le nombre des chemins de détermination finie non contigus d'une fonction* $F(z)$ *d'ordre* ρ *est au plus égal à* $\frac{\pi^2}{2}\rho$; *a fortiori, il y a* $\frac{\pi^2}{2}\rho$ *valeurs asymptotiques au plus.*

Dans sa démonstration, qui s'appuie sur les propriétés des fonctions de Green [ou ce qui revient au même sur le principe de Lindelöf-Phragmen (46, z)], T. Carleman montre que, s'il existe s chemins de détermination finie non contigus, on a

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \geqq \frac{2s}{\pi^2},$$

ce qui donne une condition supplémentaire pour l'existence de tels chemins. L'exemple des fonctions

$$\int_0^z \left(\sin z^{\frac{m}{2}}\right)^2 z^{-m}\,dz$$

signalé par A. Denjoy montre qu'il peut exister effectivement 2ρ valeurs asymptotiques distinctes. L'étude de la distribution des chemins de détermination finie demande encore beaucoup de recherches [*voir* (10), (18, d)].

22. Les fonctions méromorphes d'ordre fini. — Les fonctions méromorphes avaient été beaucoup moins étudiées que les fonctions entières, les seuls travaux importants étaient ceux de E. Borel (e, f) qui a étendu à ces fonctions, dans le cas de l'ordre fini, son théorème sur les fonctions entières (th. XXXIV). E. Borel appelle *fonction* *d'ordre fini ρ une fonction méromorphe $\Phi(z)$ qui est le quotient d'une fonction entière d'ordre $\rho_1 \leqq \rho$ par un produit canonique* $P(z)$ *d'ordre $\rho_2 \leq \rho$, l'un au moins des deux nombres ρ_1 ou ρ_2 étant égal à ρ.* Cet ordre est invariant lorsqu'on effectue sur $\Phi(z)$ une transformation homographique dont les coefficients sont des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ. En s'appuyant sur son théorème relatif aux fonctions entières, E. Borel établit la proposition suivante :

XLIX. *Parmi les fonctions $\Phi(z) + \Phi_1(z)$ où $\Phi(z)$ est donnée et d'ordre ρ et $\Phi_1(z)$ une fonction quelconque d'ordre inférieur à ρ, il y en a deux au plus pour lesquelles l'exposant de convergence de la suite des zéros est inférieur à ρ.*

E. Borel étudia aussi la représentation des fonctions méromorphes par des séries de fractions rationnelles mettant en évidence les parties principales des pôles. Dans cette étude difficile, la distribution relative des pôles b_m joue un rôle important par suite de la présence des quantités $P'(b_m)$ dans les dénominateurs des pôles simples, aussi E. Borel doit-il supposer cette distribution *ordinaire*, entendant par là que la plus courte distance de b_m au zéro le plus voisin est d'un ordre infinitésimal inférieur à celui de $[M(b_m)]^{-1}$, $M(r)$ étant le module maximum de $P(z)$. Une question importante qui reste à élucider est de savoir si les distributions non ordinaires peuvent se présenter dans les fonctions que l'on obtient d'une façon naturelle.

R. Nevanlinna (c) a renouvelé la question en introduisant les valeurs moyennes comme dans la théorie des fonctions entières (Chap. V). Si l'on pose

$$W(r, x) = \int_0^r \frac{n(t, x)}{t}\, dt, \qquad m(r, x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\Phi(r\,e^{i\varphi}) - x}\right| d\varphi,$$

lorsque x est fini, et

$$W(r, \infty) = \int_0^r \frac{p(t)}{t}\, dt, \qquad m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|\Phi(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$p(t)$ désignant le nombre des pôles et $n(t, x)$ le nombre des zéros non nuls de $\Phi(z) - x$ pour $|z| < t$; et

$$J(r, x) = W(r, x) + m(r, x),$$

le théorème de Jensen montre que le rapport $J(r, a) : J(r, b)$ tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment, ce qui justifie cette définition :

On appelle ordre de $\Phi(z)$ *le nombre*

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log J(r, x)}{\log r}.$$

Pour une fonction entière on retombe sur la définition de Borel, puisque, en prenant $x = \infty$, on a, d'après la formule de Poisson,

$$\frac{r-r'}{r+r'} \log M(r') < m(r, \infty) < \log M(r) \qquad (r' < r).$$

La méthode d'Hadamard conduit à la proposition suivante :

L. *Une fonction méromorphe* $\Phi(z)$ *d'ordre* ρ *est le quotient d'une fonction entière d'ordre* ρ *au plus par un produit canonique d'ordre* ρ *au plus, l'une des deux fonctions au moins étant d'ordre* ρ.

La définition de l'ordre coïncide donc avec celle de Borel. R. Nevanlinna généralise également le résultat de G. Valiron (nº **14**). Désignons par $M(r, \infty)$ le maximum $|\Phi(z)|$ pour $|z| = r$ et par $M(r, x)$ celui de $\frac{1}{\Phi(z) - x}$ lorsque x est fini. La convergence de l'intégrale

$$(33) \qquad \int^{\infty} \frac{J(r, x)}{r^{k+1}} dr \qquad (k > 0)$$

entraîne celles des expressions

$$(34) \qquad \sum^{\infty} \frac{1}{r_n(x)^k}, \qquad \int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r, x)}{r^{k+1}} dr,$$

et inversement, par suite :

LI. *Si pour une valeur* x *et* $k > 0$ *les expressions* (34) *convergent, elles convergent pour cette valeur* k *quel que soit* x.

On aura aussi des résultats de la forme suivante : pour qu'une fonction $\Phi(z)$ soit d'ordre fini ρ, il faut et il suffit que les exposants de convergence des zéros de trois distributions $\Phi(z) - x$ soient au plus égaux à ρ, l'un au moins étant égal à ρ ; si en outre la série (34) converge pour $k = \rho$ pour ces trois valeurs de x, elle converge quel que soit x ([1]). On pourra compléter ces résultats dans le cas de l'ordre non entier.

V. — Le théorème de Borel.

23. La théorie de Borel et les résultats de O. Blumenthal. — Dans son Mémoire fondamental des *Acta*, Borel (b) énonça pour les fonctions d'ordre infini un résultat analogue à celui du n° **16**. Il suivit une marche analogue à celle indiquée pour les fonctions d'ordre fini ; le produit canonique est défini par un choix convenable des nombres p_n. Ce choix judicieux de p_n a été fait par E. Borel dans le cas où la croissance des r_n n'est pas trop lente, ce qui lui permit de généraliser son théorème XXXIV de la façon suivante :

LII. *Le nombre* $n(r, x)$ *des zéros de* $f(z) - x$ *ne peut être d'un ordre de grandeur inférieur à celui de* $\log M(r)$ *que pour une seule valeur* x *au plus.*

La signification du mot ordre de grandeur est celle du n° **3**. E. Borel énonce d'ailleurs son résultat en considérant l'ensemble des fonctions $f_1(z)f(z) - f_2(z)$, f_1 et f_2 étant d'ordre moindre que f.

O. Blumenthal (c) et son élève Kraft ont construit une théorie générale des fonctions d'ordre infini reposant sur une étude approfondie des propriétés des fonctions croissantes. Une *fonction type* $T_\varepsilon(x)$ *adjointe à un infiniment petit* $\varepsilon(x)$ est une fonction croissante vérifiant la condition de croissance normale

$$T_\varepsilon(x') < [T_\varepsilon(x)]^{1+\varepsilon(x)} \quad \text{si} \quad \log x' = \{1 + [T_\varepsilon(x)]^{-\varepsilon(x)}\} \log x.$$

A toute fonction croissante $w(x)$ on peut adjoindre une fonction type telle que

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log w(x)}{\log T_\varepsilon(x)} = 1,$$

pourvu que $\varepsilon(x)$ soit convenablement choisi. En posant

$$\log_2 M(r) = w(r) \log r,$$

([1]) *Voir* aussi à ce sujet une Note de R. Nevanlinna (*C. R. Acad. Sc.*, 7 juillet 1924), parue peu après la rédaction de ce fascicule.

toute fonction type adjointe à $\varpi(r)$ est appelée *un ordre* de la fonction entière ; on définit de même au moyen de la suite des zéros *des exposants de convergence* qui sont des fonctions types $\rho_1(x)$ telles que la série

$$\sum \frac{1}{r_n^{\rho_1(r_n)^{1+\alpha}}}$$

converge si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha < 0$. Les propositions du n° **14** se généralisent de la façon suivante :

LIII. *Tout ordre d'un produit canonique d'exposant $\rho_1(r)$ est moindre que $\rho_1(r)^{1+\delta}$; l'inverse du minimum du module est de même ordre que le maximum si l'on supprime le voisinage des zéros. Tout exposant de convergence de la suite des zéros d'une fonction d'ordre $\rho(r)$ est moindre que $\rho(r)^{1+\delta}$.*

O. Blumenthal donne également les relations entre $A(r)$, $M(r)$, $M'(r)$; une proposition sur la décomposition en facteurs et le théorème de Borel sous la forme suivante :

LIV. *Parmi les fonctions $f(z) - x$, il y en a une au plus dont l'exposant de convergence des zéros soit constamment inférieur à $\rho(r)^{1-\delta}$, $\rho(r)$ étant un ordre.*

Il montre les difficultés qui se présentent lorsqu'on veut approfondir la nature de la relation entre $n(r, x)$ et $\log M(r)$ et pose la question suivante : qu'arrive-t-il si la distribution des zéros, pour une valeur x, est infranormale par passage, c'est-à-dire si $\rho(r)$ est égal à $\rho(r)^{1+\varepsilon(r)}$ dans certains intervalles et d'ordre inférieur à $\rho(r)$ dans d'autres intervalles? Une telle valeur x est-elle ou non unique? O. Blumenthal montre que, dans tous les cas, de la connaissance de deux exposants $\rho_1(r)$ et $\rho_2(r)$ relatifs à deux distributions, on peut déduire l'ordre $\rho(r)$. Ces considérations sont à rapprocher de celles du n° **24**.

A. Denjoy (c) a donné une limitation très précise du module d'un produit canonique donné par ses zéros. Ses résultats s'appuient sur une étude du facteur $E(u, p)$ qui épuise la question [*voir* aussi (**4**, e)] : le logarithme du maximum du module de $E(u, p)$ pour $|u| = $ const. est donné par

$$\int_0^{v} x^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,dx \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}. \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}\right)$$

si $v = |u| \leqq 1 + \frac{1}{p}$ et par

$$v + \frac{v^2}{2} + \ldots + \frac{v^p}{p} + \log(v - 1)$$

dans le cas contraire. Ces expressions exactes ont aussi été utilisées par G. Valiron (c). A. Denjoy donne une définition remarquable de ce qu'il faut entendre par produit canonique : si les r_n sont donnés et les p_n choisis, le module maximum $M(r)$ de $P(z)$ dépend de la suite p_n, on doit choisir p_n pour que $M(r)$ soit minimum ; il montre que les deux portions de $P(z)$ correspondant à $r_n < r$ et à $r_n > r$ sont alors du même ordre.

Parmi les inégalités obtenues par A. Denjoy dans les cas de régularité, citons la plus simple :

$$\log|P(z)| < (2 + \varepsilon)\, n(r) \log p,$$

où p est l'exposant choisi comme il vient d'être dit.

24. Théorèmes de Valiron et de Nevanlinna. — La méthode indiquée au n° 16 conduisit dans le cas de l'ordre infini à l'énoncé suivant (46, q, x).

LV. *$f(z)$ étant une fonction entière quelconque, $a \neq b$, la relation*

$$\log M(r) < [W(r, a) + W(r, b)]^{1+\varepsilon} \tag{35}$$

est valable, si petit que soit le nombre positif ε, sauf peut-être dans des intervalles où la variation totale de $\log r$ *pour $r > 1$ reste finie ; l'égalité*

$$W(r, x) = \left[\log M\left(\frac{r}{h}\right)\right]^{1+\eta} \qquad (1 < h < k,\ |\eta| < \varepsilon), \tag{36}$$

où k est un nombre donné supérieur à 1 *et ε donné et positif, a lieu à partir d'une valeur r_x de r, sauf au plus pour des valeurs de x appartenant à un ensemble de mesure linéaire nulle.*

L'ensemble exceptionnel peut effectivement exister et admettre tout point du plan pour point de condensation, il en est de même pour l'ensemble des valeurs infranormales par passages de O. Blumenthal.

Le théorème de Valiron a été précisé et complété par R. Nevanlinna (*b*) dont les résultats ont une forme particulièrement simple grâce à l'introduction des valeurs moyennes. Si $\psi(z)$ est une fonction holomorphe dans un certain cercle $|z| < \mathrm{R}$, on posera ici

$$m(r, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|\psi(r e^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

fonction qui est liée à $\log \mathrm{M}(r)$ par les inégalités du n° 22. L'identité fondamentale de Borel (n° 16)

$$\frac{\psi - b}{\psi - a} = \frac{\psi - b}{\psi'}\,\frac{\psi'}{\psi - a},$$

dans laquelle on calcule une limitation supérieure des quantités $\left|\frac{\psi'}{\psi - a}\right|$ par la formule obtenue en dérivant (24), conduit, grâce à l'emploi des valeurs moyennes, à ce lemme fondamental :

Si $\psi(z) = c_0 + c_p z^p + \ldots$ *est holomorphe pour* $|z| < \mathrm{R}$ *et* $a \neq b$, *il existe un nombre* C *ne dépendant que de* c_0, c_p, a, b, *tel que*

$$(37)\quad m(r, \psi) < \mathrm{C} + 8p\,\overset{+}{\log} r' + 6\,\overset{+}{\log}\frac{1}{r' - r} + \mathrm{W}(r', a) + \mathrm{W}(r', b)$$
$$- \mathrm{W}(r, \psi') + 4\,\overset{+}{\log}\, m(r', \psi) + 8p\,\overset{+}{\log}\frac{1}{r},$$

pourvu que $0 < r < r' < \mathrm{R}$.

$\mathrm{W}(r, \psi')$ est la fonction $\mathrm{W}(r)$ relative à la dérivée. En prenant $r' = r + \frac{r'' - r}{r''}$ et en intégrant de $r = r_0$ à $r = r''$, les deux membres de cette inégalité multipliés par $r^{-k-1}dr$, $(k > 0)$, on obtient cette conséquence :

LVI. *Si* $f(z)$ *est une fonction entière,* $a \neq b$, $k > 0$, *on a*

$$(38)\qquad \int_{r_0}^{r''} \frac{m(x, f)}{x^{1+k}}\, dx < \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 \int_{r_0}^{r''} \frac{\mathrm{W}(x, a) + \mathrm{W}(x, b)}{x^{1+k}}\, dx,$$

C_2 *ne dépendant que de* r_0 *et* k *et* C_1 *que de* a, b, c_0, c_p, p, r_0 *et* k. *Lorsque le premier membre diverge, on peut remplacer* C_2 *par une fonction tendant vers* 1 *lorsque* r *croît indéfiniment.*

R. Nevanlinna donne comme première application de ce théorème une proposition qui se déduit aussi des théorèmes de Valiron : soient $f(z)$ une fonction entière, $r_n(x)$ le $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z)-x$, si la série

$$\sum \frac{1}{r_n(x)^\rho}$$

converge pour deux valeurs de x, la fonction est d'ordre fini ρ et de la classe inférieure; si la série diverge pour une valeur x, elle diverge pour toutes les autres sauf une au plus et la fonction est de la classe supérieure si elle est d'ordre ρ.

En combinant les inégalités (37) et (38), on obtient la nouvelle relation

$$(39) \qquad m(r,f)+W(r,f') < 10 \overset{+}{\log}\frac{1}{r'-r} + [1+\varepsilon(r')][W(r',a)+W(r',b)] \quad (^1),$$

$\varepsilon(r')$ tendant vers 0 lorsque r croît indéfiniment. En négligeant $W(r,f')$ dans le premier membre, on obtient l'inégalité

$$\log M(r) < \left[\frac{k+1}{k-1}+\varepsilon(r)\right][W(kr,a)+W(kr,b)] \qquad (k>1),$$

qui comprend l'inégalité (31) de Valiron et celle, moins précise, que l'on déduirait de (35) [pour les fonctions d'ordre infini rapidement croissantes l'inégalité (35) vaut la précédente]; en négligeant le terme en $m(r,f)$ dans le premier membre de (39) on retrouve le théorème XXXIX.

Mais les inégalités (38) et (39) permettent d'obtenir également des résultats nouveaux tels que le suivant :

LVII. *Pour une fonction entière, l'inégalité*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{W(r,x)}{m(r,f)} \geq \frac{1}{2}$$

a lieu pour toutes valeurs de x, sauf une au plus.

Des exemples simples montrent que, dans l'inégalité précédente, le nombre $\frac{1}{2}$ ne peut être remplacé par 1 (2).

---

(1) *Voir* dans la note citée au n° 23 une formule plus précise.

(2) *Voir* le Mémoire de R. Nevanlinna qui doit paraître aux *Acta mathematica* et deux Notes de E. Collingwood (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179).

R. Nevanlinna étend ses résultats au cas des fonctions $F(z)$ holomorphes autour du point à l'infini.

25. Le théorème de Borel dans un secteur. Théorèmes de Nevanlinna. — G. Valiron (o) avait montré que la méthode de Blumenthal s'appliquait aux fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et d'ordre infini dans ce cercle, donc telles que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M(r)}{-\log(1-r)} = +\infty,$$

et que, par suite, le théorème de Borel restait valable pour ces fonctions ; mais sa méthode conduisait à des résultats insuffisants dans le cas de l'ordre fini. La méthode de R. Nevanlinna s'applique au contraire sans modification à ces fonctions, dès que l'ordre est supérieur à 1 le théorème de Borel est encore vrai. En partant toujours de l'inégalité (37) on arrive à cette proposition correspondant à LVI :

LVIII. *$\psi(z)$ étant holomorphe pour $|z| < 1$, $a \neq b$, et $k > 0$, il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que, pour $r_0 < r < 1$,*

$$\int_{r_0}^{r} m(x, \psi)(1-x)^{k-1}\,dx < C_1 + C_2 \int_{r_0}^{r} [W(x, a) + W(x, b)]\,dx.$$

Lorsque le premier membre diverge pour $r = 1$, on peut remplacer C_2 par une fonction de r tendant vers 1.

La théorie se développe parallèlement à celle relative à une fonction entière, on a en particulier cette conséquence : si pour $k > 0$, la série

$$\sum [1 - r_n(x)]^{1+k}$$

converge pour deux valeurs différentes de x, elle converge quel que soit x et les deux intégrales

$$\int^{1} m(x, \psi)(1-x)^{k-1}\,dx, \qquad \int^{1} \log M(x)(1-x)^{k}\,dx$$

convergent. Les résultats relatifs à une fonction $F(z)$ et à un secteur s'en déduisent de suite. On a notamment le résultat suivant qui est actuellement l'un des plus profonds de la théorie des fonctions d'ordre fini :

LIX. *Si la fonction $F(z)$ est d'ordre fini $\rho > \frac{1}{2}$, dans tout* *angle de sommet* o *et d'ouverture supérieure à* $\frac{\pi}{\rho}$ *dans lequel* F (z) *est d'ordre* ρ, *l'exposant de convergence de la suite des zéros de* $F(z) - x$ *intérieurs à l'angle est égal à* ρ, *sauf pour une valeur* x *au plus. Si en outre la fonction est de la classe supérieure, la série formée avec les puissances* $-\rho$ *des modules de ces zéros diverge, sauf pour un* x *au plus, pourvu que l'angle soit convenablement choisi.*

On peut compléter d'une façon analogue le théoréme de Bieberbach du n° 9.

26. Les généralisations de Borel. — E. Borel (b) a démontré l'impossibilité de certaines identités entre des fonctions entières, généralisant celle qui s'introduit dans la démonstration du théorème de Picard. En utilisant la notion d'ordre de Blumenthal, on a l'énoncé suivant :

LX. *Soient* $g_1(z), \ldots, g_k(z)$ *des fonctions entières telles que la différence de deux d'entre elles soit d'ordre* $\rho(r)$ *au moins, et* $f_1(z), \ldots, f_{k+1}(z)$ *des fonctions dont l'ordre est inférieur à* $e^{\rho(r)^{1-\alpha}}$, *l'identité*

$$f_1(z)\,e^{g_1(z)} + \ldots + f_k(z)\,e^{g_k(z)} + f_{k+1}(z) \equiv 0$$

ne peut avoir lieu que si toutes les fonctions $f_i(z)$ *sont identiquement nulles.*

Cette proposition a été l'origine des travaux de G. Rémoundos (a) qui, dans de nombreux mémoires, a généralisé aux fonctions multiformes à un nombre fini de branches les résultats de la théorie des fonctions uniformes.

VI. — Les fonctions inverses des fonctions méromorphes.

27. Les valeurs asymptotiques et les points critiques transcendants. — L'étude des fonctions inverses des fonctions entières ou méromorphes n'a été abordée que très récemment. Amorcée par A. Hurwitz (c) et A. Denjoy (a), redevable à P. Boutroux (c) de progrès importants, cette théorie a été édifiée d'une façon rigoureuse par F. Iversen. Si

$$w = \Phi(z) \tag{40}$$

est une fonction méromorphe, z_0 un point tel que $\Phi'(z_0) \neq 0$ et $w_0 = \Phi(z_0)$, il existe, d'après la théorie des fonctions implicites, une série entière

$$z - z_0 = \mathfrak{P}(w - w_0)$$

qui vérifie identiquement l'égalité (40) dans son cercle de convergence, c_{z_0}, c'est *un élément* e_{z_0} *de la fonction inverse de* $\Phi(z)$. *L'ensemble* E *des éléments* e_z *constitue la fonction inverse* $\mathrm{I}(w)$ *de* $\Phi(z)$: on peut passer de l'un e_{z_0} à un autre quelconque par prolongement analytique au sens de Weierstrass, et tout prolongement de e_{z_0} donne un élément de E. On peut étendre ce résultat aux pôles de $\Phi(z)$ [Iversen (a)].

Un point ω du plan des w est *point singulier pour une branche de* $\mathrm{I}(w)$ s'il existe une chaîne d'éléments $e_{z_1}, e_{z_2}, \ldots, e_{z_n}, \ldots$ dont chacun est un prolongement immédiat du précédent (les circonférences c_{z_n} et $c_{z_{n+1}}$ se coupent et e_{z_n} et $e_{z_{n+1}}$ coïncident en un point commun de ces cercles) telle que le rayon de c_{z_n} tende vers o, son centre tendant vers ω. F. Iversen montre que z_n tend alors vers un point déterminé du plan des z : si ce point est à distance finie, $\Phi'(z)$ y est nul, ω est un point critique algébrique pour la branche considérée ; si ce point est à l'infini, il existe un chemin de détermination ω passant par les z_n, ω est donc une valeur asymptotique. *Le domaine d'indétermination du point* ω *pour la branche considérée se réduit au point à l'infini*, ω est un *point transcendant ordinaire* au sens de P. Painlevé. [Rappelons que le domaine d'indétermination se définit comme suit : on considère l'ensemble E'_ρ décrit par z lorsqu'on prolonge à l'intérieur du cercle $|w - \omega| < \rho$ les éléments e_{z_n} appartenant à ce cercle, et on lui adjoint ses points limites, ce qui donne un ensemble E_ρ ; on prend alors l'ensemble commun à tous les E_ρ lorsque ρ tend vers zéro.] Inversement, à un chemin de détermination ω correspond un point ω qui est point transcendant pour une branche de $\mathrm{I}(w)$, et l'on a ce résultat de F. Iversen (a) [*voir* aussi $(9, a)$, $(17, c)$] :

LXI. *Les seuls points singuliers à distance finie de* $\mathrm{I}(w)$ *sont les points critiques algébriques correspondant aux zéros de la* *dérivée et des points transcendants ordinaires qui se confondent avec les valeurs asymptotiques.*

F. Iversen remarque que, si le nombre des points algébriques est fini, il y a au moins deux valeurs asymptotiques.

L'étude de l'ensemble E' des valeurs asymptotiques de $\Phi(z)$ est capitale dans cette question; le théorème de Carleman (n° 21) montre que E' renferme $5\cdot\rho$ points au plus pour une fonction entière d'ordre ρ; on a cru longtemps que E' était dénombrable pour toutes les fonctions entières. J. Sire (*b*) a donné un premier exemple d'une fonction d'ordre infini pour laquelle E' a la puissance du continu; F. Iversen donna un exemple plus simple; enfin W. Gross a construit une fonction pour laquelle E' couvre tout le plan. Il y aurait intérêt à définir des classes de fonctions pour lesquelles ces circonstances ne se présenteraient pas, et à examiner les cas des fonctions méromorphes.

Soient ω un point du plan des w, C_ε un cercle de rayon ε et centre ω et e_z un élément de $I(w)$ dont le cercle c_z coupe C_ε, prolongeons-le sans sortir de C_ε; les valeurs z obtenues couvrent un domaine $\Delta(\varepsilon, \omega)$ dans lequel $|\Phi(z) - \omega| < \varepsilon$. La branche $I_\Delta(w)$ de $I(w)$ ainsi définie est *la fonction inverse restreinte à* Δ. F. Iversen étudie cette fonction et en donne des propriétés qui découlent de cette conséquence du principe de Lindelöf et Phragmén : si une fonction $\psi(z)$ est holomorphe dans un domaine D et sur son contour sauf en un point A de ce contour et à un module constant sur le contour (A excepté), ou bien $\psi(z)$ s'annule dans D, ou bien il existe un chemin aboutissant à A sur lequel $\psi(z)$ tend vers o ou vers ∞ (46, *i*). F. Iversen (*a*) donne ainsi cette importante proposition :

LXII. *La fonction* $I_\Delta(w)$ *restreinte à un domaine* $\Delta(\varepsilon, \omega)$ *prend ou admet pour valeur limite toute valeur telle que* $|w - \omega| < \varepsilon$.

Il en résulte notamment une propriété que l'on peut énoncer sous forme abrégée de la façon suivante : la surface de Riemann décrite par $w = \Phi(z)$ ne renferme pas d'espaces lacunaires. Ces propositions rentrent dans le cadre des propriétés générales des fonctions multiformes énoncées par L. Zoretti (48) et démontrées rigoureusement par divers auteurs (*voir* les autres volumes de la collection).

En utilisant le théorème XXV, F. Iversen démontre encore quelques propositions telles que celle-ci : si le domaine Δ n'a qu'un nombre fini de contours dont n sont infinis, la fonction inverse restreinte à Δ possède au plus n points transcendants. Il montre aussi (c) que le domaine d'indétermination de $\Phi(z)$ au point à l'infini restreint à un domaine Δ comprend tout le cercle C_ε ou bien se réduit à un ensemble partout discontinu de points de sa circonférence.

28. La classification des points transcendants. — Dans ses recherches, P. Boutroux (c), guidé par ce qui se passe pour les fonctions les plus simples, a introduit quelques notions nouvelles telles que celle de langue [*voir* (48) et (46, c, z)], et il a donné une classification des points transcendants qui a été reprise et modifiée par F. Iversen (a).

La classification de F. Iversen s'applique à *un point transcendant* ω *isolé sur une branche*, c'est-à-dire tel qu'il existe un cercle C_ε (*voir* n° 27) de centre ω dans lequel la fonction inverse restreinte à $\Delta(\varepsilon, \omega)$ n'a pas d'autres points singuliers que des points critiques algébriques. C'est le cas pour les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini. Iversen montre que l'on peut alors construire systématiquement la surface de Riemann à une infinité de feuillets sur laquelle la branche considérée est uniforme en joignant les points critiques algébriques intérieurs à C_ε à la circonférence de ce cercle suivant le prolongement des rayons. Cela revient à diviser le domaine Δ en régions δ_n dans lesquelles $\Phi(z)$ prend une fois et une seule les valeurs intérieures à C_ε (sauf peut-être ω). Le cas le plus simple est celui où $\Phi(z)$ ne prend pas la valeur ω à l'intérieur de Δ : toutes les régions δ_n ont le point à l'infini pour point frontière, le point ω est appelé *point transcendant directement critique*. Si ω est le seul point critique dans C_ε (ε étant supposé assez petit), chaque région δ_n a pour frontière une portion de la frontière γ de Δ (correspondant à la circonférence de C_ε) et deux branches infinies correspondant à un même rayon, le point est dit *de première espèce ;* dans le cas contraire on a un point *directement critique de deuxième espèce*. Pour $\log z$, o et ∞ sont de première espèce ; pour la fonction inverse de $z \sin z$, le point ∞ est directement critique de deuxième espèce.

Lorsque Δ contient une infinité de zéros de $\Phi(z) - \omega$, il peut arriver que le prolongement de $I_\Delta(w)$ le long d'un rayon de C_ε conduise toujours à une valeur finie, quelle que soit la façon dont on contourne les points algébriques. Les chemins de détermination ω coupent une suite infinie de régions δ_n, les valeurs de w correspondantes tournent autour de ω en suivant un chemin en spirale, ω est dit *point indirectement critique* (exemple : fonction inverse de $w = \frac{\sin z}{z}$ pour $w = 0$).

Les points isolés n'appartenant pas aux deux classes précédentes sont dits *points directement et indirectement critiques*, c'est le cas pour la fonction inverse de $\frac{e^z - 1}{z}$ et pour $w = 0$.

F. Iversen (*d*) a étudié le cas des fonctions entières d'ordre fini entier qui présentent le cas d'exception de Borel : il y a un point critique unique à distance finie qui peut être directement ou indirectement critique.

OUVRAGES A CONSULTER.

Borel. — *Leçons sur les fonctions entières* (2e édition).
Borel. — *Leçons sur les fonctions méromorphes.*
Borel. — *Problèmes et méthodes de la théorie des fonctions.*
Blumenthal. — *Leçons sur les fonctions entières d'ordre infini.*
Julia. — *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.*
Valiron. — *Lectures on the general theory of integral functions.*

BIBLIOGRAPHIE.

1. Alander (M.). — *a.* Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation (*Thèse*, Upsala, 1914).
— *b.* Sur les zéros complexes des dérivées des fonctions entières réelles (*Arkiv för Math. Ast. Fys.*, t. 16, 1921).
— *c.* Sur les fonctions entières qui ont tous leurs zéros sur une droite (*C. R. Acad. Sc.*, t. 176).

— *d.* Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière (*Arkiv för Math. Ast. Fys.*, t. 17, 1923).
— *e.* Sur les fonctions entières non réelles (*Ibid.*, t. 18, 1924).
2. Bieberbach (L.). — *a.* Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singularer Stellen (*Math. Zeitschrift*, t. 2).
— *b.* Ueber eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung (*Ibid.*, t. 3).
— *c.* Auszug aus einem Briefe des Herrn Bieberbach an den Herausgeber (*Acta math.*, t. 42).
— *d.* Ueber die Verteilung der Null- und Einstellen analytischer Funktionen (*Math. An.*, t. 85).
3. Bloch (A.). — *a.* Démonstration directe de théorèmes de M. Picard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178).
— *b.* Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation (*Ibid.*, t. 178).
4. Blumenthal (O.). — *a.* Ueber ganze transzendente Funktionen (*D. Math. Ver.*, t. 16).
— *b.* Sur le mode de croissance des fonctions entières (*Bull. Soc. math.*, t. 35, 1907).
— *c.* *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, Gauthier-Villars, 1910).
5. Borel (E.). — *a.* Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122).
— *b.* Sur les zéros des fonctions entières (*Acta math.*, t. 20).
— *c.* *Leçons sur les fonctions entières*, 2e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1921).
— *d.* *Leçons sur les séries à termes positifs* (Paris, Gauthier-Villars, 1902).
— *e.* Contribution à l'étude des fonctions méromorphes (*Ann. École Norm.*, 1901).
— *f.* *Leçons sur les fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1903).
— *g.* Sur quelques fonctions entières (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 23).
— *h.* *Leçons sur la théorie de la croissance* (Paris, Gauthier-Villars, 1910).
— *i.* *Problèmes et méthodes de théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1921).
6. Boutroux (P.). — *a.* Sur quelques propriétés des fonctions entières (*Acta math.*, t. 28).
— *b.* Sur les propriétés d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs 0 et 1 (*Bull. Soc. math.*, t. 34).
— *c.* Sur l'indétermination d'une fonction holomorphe dans le voisinage d'une singularité transcendante (*Ann. Éc. Norm.*, t. 25, 1908).
7. Carathéodory (C.). — *a.* Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (*C. R. Acad. Sc.*, t. 141).
— *b.* Sur le théorème général de M. Picard (*Ibid.*, t. 154).
8. Carleman (T.). — Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini (*Arkiv för mat.*, t. 15).
9. Denjoy (A.). — *a.* Sur les fonctions entières de genre fini (*C. R. Acad. Sc.*, t. 145).

— *b*. Sur la fonction analytique égale au module maximum d'une fonction entière (*Ibid.*, t. 148).
— *c*. Sur les produits canoniques d'ordre infini (*J. de Math.*, 1910).
— *d*. Sur l'intégration de certaines inéquations fonctionnelles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 148).
10. GRANDJOT (K.). — Ueber Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen (*Math. Ann.*, t. 91).
11. FABER (G.). — *a*. Ueber das Anwachsen analytischer Funktionen (*Math. Ann.*, t. 63).
— *b*. Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen (*Ibid.*, t. 70).
12. FATOU (P.). — Remarque sur le théorème de M. Picard sur les fonctions entières (*Bull. Soc. math.*, t. 48, C. R. séances).
13. GROMMER (J.). — Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen (*J. für Math.*, t. 144).
14. GROSS (W.). — *a*. Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist (*Math. Ann.*, t. 79).
— *b*. Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebund singulärer Stellen (*Math. Zeitsch.*, t. 2).
15. HADAMARD (J.). — *a*. Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier une fonction étudiée par Riemann (*J. de Math.*, 1893).
— *b*. Sur la croissance des fonctions entières (*Bull. Soc. math.*, t. 24).
— *c*. Sur les fonctions entières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 135).
16. HARDY (G.-H.). — *a*. The maximum modulus of an integral function (*Quart. J.*, 1909).
— *b*. The mean value of the modulus of an analytic function (*Proc. London math. Soc.*, 1915).
17. HURWITZ (A.). — *a*. Ueber die Theorie der elliptischen Modulfunktion (*Math. Ann.*, t. 58).
— *b*. Ueber die Anwendung der elliptischen Modulfunktion auf einen Satz der allgemeinen Funktionentheorie (*Viertelj. der Naturf. Gesellschaft*, Zürich, 1904).
— *c*. Sur les points critiques des fonctions inverses (*C. R. Acad. Sc.*, t. 143 et 144).
18. IVERSEN (F.). — *a*. Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes (*Thèse*, Helsingfors, 1914).
— *b*. Sur une fonction entière dont la fonction inverse présente un ensemble de singularités de la puissance du continu (*Ofvers. of Finska Soc.*, t. 58).
— *c*. Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier (*Ibid.*, t. 58).
— *d*. Sur quelques fonctions entières qui admettent des valeurs asymptotiques finies (*Ibid.*, t. 61).
— *e*. Zum Verhalten analytischer Funktionen in Bereichen, deren Rand eine wesentliche Singularität enthält (*Ibid.*, t. 64).
— *f*. Sur les valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes et les singularités transcendantes de leurs inverses (*C. R. Acad. Sc.*, t. 166).
— *g*. Quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'une singu-

larité essentielle (*Conférences faites au V^e Congrès des Mathématiciens scandinaves*, Helsingfors, Librairie académique, 1923).

19. JENSEN (J.-L.). — *a*. Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions (*Acta math.*, t. 22).

— *b*. Recherches sur la théorie des équations (*Ibid.*, t. 36).

20. JULIA (G.). — *a*. Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières et méromorphes (*Ann. École Norm.*, 1919, 1920, 1921).

— *b*. *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

21. LAGUERRE (E.). — *Œuvres*, t. 1.

22. LANDAU (E.). — *a*. Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes (*Sitz. Kg. Akad. Wiss.*, Berlin, 1904).

— *b*. Ueber den Picardschen Satz (*Viertelj. naturf. Ges.*, Zürich, 1906).

— *c*. *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Springer, Berlin, 1916).

— *d*. Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach *Math. Ann.*, B. 85 (*Math. Ann.*, t. 87).

— *e*. Ueber ein Bieberbach Satz (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 46).

— *f*. Zum Kœbeschen Verzerrungssatz (*Ibid.*, t. 46).

23. LEAU (L.). — Étude sur des fonctions entières orientées d'ordre réel non entier (*Ann. École Norm.*, t. 23).

24. LE ROY (E.). — Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle (*Bull. Sciences math.*, 1900).

25. LÉVY (P.). — Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bull. Soc. math.*, t. 40).

26. LINDGREN (B.). — Sur le cas d'exception de M. Picard dans la théorie des fonctions entières (*Thèse*, Upsala, 1903).

27. LINDWART (E.). — Ueber eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion (*Diss. Inaug.*, *Göttingen*, 1914).

28. LINDELÖF (E.). — *a*. Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 31).

— *b*. Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor (*Bull. Sciences math.*, 1903).

— *c*. *Le calcul des résidus* (Paris, Gauthier-Villars, 1905).

— *d*. Sur les fonctions entières d'ordre entier (*Ann. École Norm.*, 1906).

— *e*. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier (en collaboration avec E. PHRAGMÉN) (*Acta math.*, t. 31).

— *f*. Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières (*Rendic. Circ. mat.*, *Palermo*, t. 25).

— *g*. Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 35).

— *h* Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes

(*C. R. du Congrès des Mathématiciens scandinaves tenu à Stockholm*, 1909).

— *i*. Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 46).

29. LITTLEWOOD (J.-E.). — *a*. On the asymptotic approximation of integral function of zero order (*Proc. London math. Soc.*, 2e série, t. 5).

— *b*. A general theorem on integral functions of finite order (*Ibid.*, t. 6).

— *c*. On the Dirichlet series and asymptotic expansions of integral functions of zero order (*Ibid.*, t. 7).

30. MAILLET (E.). — *a*, Sur les fonctions entières et quasi entières (*J. de Math.*, 1902).

— *b*. Sur les fonctions entières et quasi entières à croissance régulière (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1902).

— *c*. Sur les zéros des fonctions entières, etc. (*Ann. École Norm.*, 1906).

— *d*. Sur les fonctions quasi entières et quasi méromorphes d'ordre infini non transfini (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1907).

— *e*. Sur les fonctions entières d'ordre fini (*Ibid.*, 1908).

31. MATTSON (R.). — Sur les fonctions entières d'ordre zéro (*Thèse*, Upsala, 1905).

32. MILLOUX (H.). — *a*. Sur la croissance des fonctions entières d'ordre fini, et leurs valeurs exceptionnelles dans des angles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 176).

— *b*. Sur les suites infinies de fonctions et les fonctions méromorphes à valeur asymptotique (*Ibid.*, t. 176).

— *c*. Thèse. Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières (*J. de Math.*, 1924, p. 345).

33. MONTEL (P.). — *a*. *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (Gauthier-Villars, Paris, 1910).

— *b*. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Ann. École Norm.*, 1912).

— *c*. Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Ibid.*, 1916).

— *d*. Sur la représentation conforme (*J. de Math.*, 1917).

— *e*. Sur les fonctions entières de genre fini (*Bull. Sciences math.*, 1922).

— *f*. Sur les familles quasi normales de fonctions méromorphes (*Mémoires Acad. roy. Belgique*, 1922).

— *g*. Sur les familles quasi normales de fonctions analytiques (*Bull. Soc. math.*, 1924).

34. NEVANLINNA (F. et R.). — Ueber die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 50).

35. NEVANLINNA (F.). — *a*. Ueber die Beizehungen zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole (*Ve Congrès des Mathématiciens scandinaves*, Helsingfors, 1923).

— *b*. Bemerkung zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung (*Soc. sc. Fennicæ, Com. Phys. math.*, 1923).

36. NEVANLINNA (R.). — *a* Ueber die Anwendung des Poisson'schen Integral

zur Untersuchung der Singularitäten analytischer Funktionen (*V^e^ Congrès des Mathématiciens scandinaves*, Helsingfors, 1923).

— *b*. Untersuchungen über den Picard' schen Satz (*Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. 50).

— *c*. Sur les fonctions méromorphes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178).

37. Picard (E.). — *a*. Mémoire sur les fonctions entières (*Ann. École Norm.*, 1880).

— *b*. Sur une proposition concernant les fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Bull. Sciences math.*, 1883).

— *c*. Démonstration d'un théorème général sur les fonctions uniformes liées par une relation algébrique (*Acta math.*, t. 11).

— *d*. Sur un théorème général relatif aux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*C. R. Acad. Sc.*, t. 154).

— *e*. Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique (*Bull. Soc. math.*, t. 40).

— *f*. Sur les couples de fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33).

38. Phragmén (E.). — Sur une extension d'un théorème classique dans la théorie des fonctions (*Acta math.*, t. 28).

— *b*. *Voir* Lindelof (28, *e*).

39. Poincaré (H.). — Sur les fonctions entières (*Bull. Soc. math.*, t. 11).

40. Pólya (G.). — *a*. Sur une question concernant les fonctions entières (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158).

— *b*. Ueber zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen (en collaboration avec I. Schur) (*J. fur Math.*, t. 144).

— *c*. Algebraische Untersunchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Nul und Eins (*Ibid.*, t. 145).

— *d*. Ueber das Anwachsen von ganzen Funktionen, die einer Differentialgleichung genügen (*Viertelj. naturf. Ges.*, Zurich, 1916).

— *e*. Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrag einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe (*Acta math.*, t. 37).

— *f*. Neuer Beweis für die Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen endlicher Ordnung (*Sitzb. Bayerl. Akad.*, 1921).

— *g*. Bemerkung über unendliche Folgen und ganze Funktionen (*Math. Ann.*, t. 88).

41. Pringsheim (A.). — Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung (*Math. Ann.*, t. 58).

42. Rémoundos (G.). — *a*. Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1906).

— *b*. Sur le module et les zéros des fonctions analytiques (*C. R. Congrès des Math.*, Strasbourg, 1920).

43. Saxer (W.). — Ueber die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten (*Math. Zeitsch.*, t. 17).

44. Schottky (F.). — *a*. Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen (*Sitz. Kg. Akad.*, Berlin, 1904).

— *b*. Ueber zwei Beweise des allgemein Picardschen Satz (*Sitz. Kg. Akad.*, Berlin, 1907).

45. SIRE (J.). — *a* Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 31).

— *b*. Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières (*Bull. Soc. math.*, t. 41).

— *c*. Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière (*J. de Math.*, 1913).

46. VALIRON (G.). — *a*. Sur les fonctions entières d'ordre nul (*Math. Ann.*, t. 70).

— *b*. Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières (*Nouv. Ann. Math.*, 1911).

— *c*. Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondance régulière (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1913).

— *d*. Sur quelques théorèmes de M. Borel (*Bull. Soc. math.*, t. 42).

— *e*. Sur le calcul approché de certaines fonctions entières (*Ibid.*, t. 42).

— *f*. Sur l'interpolation des fonctions entières (*Ibid.*, t. 44).

— *g*. Sur la croissance du module maximum des séries entières (*Ibid.*, t. 44).

— *h*. Sur les chemins de détermination des fonctions entières (*Ibid.*, t. 45).

— *i*. Démonstration de l'existence pour les fonctions entières des chemins de détermination infinie (*C. R. Acad. Sc.*, t. 166).

— *j*. Les théorèmes généraux de M Borel dans la théorie des fonctions entières (*Ann. École Norm.*, 1920).

— *k* Recherches sur le théorème de M. Picard (*Ann. École Norm.*, 1921).

— *l*. Sur les zéros des fonctions entières d'ordre fini (*Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 43 et 44).

— *m*. Remarques sur le théorème de M. Picard (*Bull. Sciences math.*, 1920).

— *n* Sur les fonctions entières de deux variables et les ensembles de mesure, nulle (*Ibid.*, 1920).

— *o*. Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini (*C. R. Acad. Sc.*, t. 172).

— *p*. Sur les fonctions entières d'ordre fini (*Bull. Sciences math.*, 1921).

— *q*. Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières (*Ann. École Norm.*, 1922).

— *r*. Sur un théorème de M. Fatou (*Bull. Sciences math.*, 1922).

— *s*. Sur les fonctions entières d'ordre entier (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174).

— *t*. Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières (*Bull. Sciences math.*, 1922).

— *u*. Sur un théorème de M. Hadamard (*Ibid.*, 1923).

— *v*. Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles (*Bull. Soc. math.*, 1923).

— *w*. Remarques sur un théorème de M. Carleman (*C. R. Acad. Sc.*, t. 176).

— *x*. Sur le théorème de Picard-Borel (*Ibid.*, t. 177).

— *y*. A propos d'un Mémoire de M. Pólya (*Bull. Sciences math.*, 1924).

— *z*. *Lectures on the general Theory of integral functions* (Deighton, Bell and C°, Cambridge).

47. Wiman (A.). — *a.* Ueber die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen (*Arkiv för Math.*, t. 1).

— *b.* Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières (*Ibid.*, t. 1).

— *c.* Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard (*Ibid.*, t. 2).

— *d.* Ueber die Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null (*Math. Ann.*, t. 76).

— *e.* Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe (*Acta math.*, t. 37).

— *f.* Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion (*Acta math.*, t. 41).

48. Zoretti (L.). — *Leçons sur le prolongement analytique* (Paris, Gauthier-Villars, 1911).

TABLE DES MATIÈRES.

I. — Introduction.

II. — Les inégalités de Borel. La fonction M(r) et la suite des coefficients.

III. — Le théorème de Picard.

IV. — Les fonctions entières et méromorphes d'ordre fini.

V. — Le théorème de Borel.