

ANNE BERRY

JEAN-PAUL BORDAT

Orthotrellis et séparabilité dans un graphe non orienté

Mathématiques et sciences humaines, tome 146 (1999), p. 5-17

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1999__146__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ORTHOTREILLIS ET SÉPARABILITÉ DANS UN GRAPHE NON ORIENTÉ

Anne BERRY¹ et Jean-Paul BORDAT¹

RÉSUMÉ — *Nous présentons une généralisation de la notion de séparateur minimal dans un graphe non orienté, et nous montrons que ces séparateurs sont représentés par les rectangles maximaux de la matrice d'adjacence, structurés en un orthotreillis, que nous appelons treillis de séparabilité. Réciproquement, étant donné un orthotreillis, nous montrons qu'il n'existe pas en général un unique graphe minimal dont il serait treillis de séparabilité. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière propriété soit vérifiée. Le dernier paragraphe de l'article contient des considérations algorithmiques relatives aux treillis orthocomplémentés.*

MOTS-CLÉS — Treillis de Galois, Orthotreillis, Graphe, Séparateur, Treillis de séparabilité.

SUMMARY — Ortholattices and separability in undirected graphs

We present a generalization of minimal separation in an undirected graph, and show how the maximal rectangles of the adjacency matrix describe such separators, and form an ortholattice, which we call the Separability Lattice. Furthermore, for any given ortholattice L , we show that there does not exist a unique minimal graph of which L is the Separability Lattice. We establish a necessary and sufficient condition for the existence of such a graph. The end of the paper deals with algorithmic considerations on the class of orthocomplemented lattices.

KEY WORDS — Galois Lattice, Ortholattice, Graph, Separator, Separability Lattice.

1. INTRODUCTION

Nous explorons une extension de la notion de séparateur minimal d'un graphe non orienté (cf. [8]) en considérant la séparation d'un stable quelconque. Ceci conduit à la mise en évidence d'un treillis de séparateurs minimaux que nous nommerons treillis de séparabilité, et qui n'est autre que le treillis de Galois associé à la matrice d'adjacence du graphe complémentaire (voir par exemple [1], Chap.V, et [6], [10]). D'autres auteurs ont abordé des treillis différents associés à la séparation dans un graphe, (cf. [9], [11]). Par ailleurs, on trouve dans [14], [15] cette relation entre graphes et treillis orthocomplémentés sans référence à la notion de séparation. Notre approche permet de visualiser et d'extraire des propriétés purement graphiques à partir du treillis de séparabilité (voir [2]).

¹ LIRMM, CNRS, URA n° 9928, 161 rue Ada, 34392 Montpellier, e-mail : aberry@lirmm.fr, bordat@lirmm.fr.

Ce treillis est, de façon évidente, orthocomplémenté (cf. [7], [12]). Il est donc logique de se poser la question suivante : tout treillis orthocomplémenté est-il treillis de séparabilité d'un graphe non orienté ?

La réponse est positive, mais contrairement à ce qui se passe dans le cas des graphes bipartis orientés (cf. [1], Chap.V, et [13]), il n'est pas possible en général de définir un unique graphe minimal représentant la classe de graphes associée à un même treillis, ceci parce qu'un treillis orthocomplémenté peut admettre plusieurs orthocomplémentations.

Nous donnons en conclusion une caractérisation des treillis admettant un unique représentant minimal.

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Graphes

$G=(V,E)$ est un graphe non orienté connexe avec V pour ensemble de sommets et E pour ensemble d'arêtes. Sa matrice d'adjacence est $\mathcal{Q}(G)$. Tout graphe sera considéré comme réflexif. $N(x)=\{y \in V \mid y \neq x, y \text{ adjacent à } x\}$. $N[x]=N(x) \cup \{x\}$. Si $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset V$, $N(A)=(N(a_1) \cup \dots \cup N(a_k)) - A$. On dit qu'un sommet x voit un sommet y si $y \in N(x)$. Un *module* est une partie A de V telle que $|A| > 1$ et $(\forall a_i, a_j \in A, N(a_i) \cap N(A) = N(a_j) \cap N(A))$. A est un *module complet* si $\forall a_i, a_j \in A (a_i, a_j) \in E$. $f : V \rightarrow V$ est un automorphisme de G si et seulement si f est bijective et $(\forall (x,y) \in E, (f(x), f(y)) \in E)$. Le sous-graphe de G induit par une partie A de V sera noté $G(A)$.

Si a et b sont deux sommets non adjacents, une partie S de V est un *séparateur* pour a et b si, dans $G(V-S)$, a et b appartiennent à deux composantes connexes distinctes. S est dit *ab-minimal* s'il ne contient proprement aucun autre séparateur de ces deux sommets.

$\mathcal{T}(S)$ désignera l'ensemble des composantes connexes de $G(V-S)$.

Treillis

Un treillis (fini) L est un ensemble ordonné dans lequel tout couple (x,y) d'éléments admet une borne inférieure (notée $x \wedge y$) et une borne supérieure (notée $x \vee y$). Un treillis fini possède un élément minimum et un élément maximum (notés respectivement 0 et 1). Un élément est sup-irréductible (resp. inf-irréductible) si $a = x \vee y$ (resp. $a = x \wedge y$) $\Rightarrow a = x$ ou $a = y$. Un automorphisme de treillis est une application bijective φ de L telle que $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ et $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

L est un *orthotreillis* s'il admet une *orthocomplémentation*, c'est-à-dire une application φ de L dans L possédant les trois propriétés :

- a) $\forall x \in L \quad x \wedge \varphi(x) = 0$ et $x \vee \varphi(x) = 1$
- b) $\forall x, y \in L \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ (D'où $x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$)

c) $\forall x \in L \varphi(\varphi(x)) = x$

Si X et Y sont deux ensembles finis, et R est une relation binaire entre E et F , le treillis de Galois de R a pour éléments les produits cartésiens (ou rectangles maximaux) $A \times B$, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ et $\forall a \in A, \forall b \in B R(a,b)$, avec $A \times B$ maximal pour l'inclusion. La relation d'ordre strict sur ce treillis est la suivante : $A \times B < A' \times B' \Leftrightarrow A \subset A'$ et $B \supset B'$.

De façon équivalente, on peut définir le treillis associé à la relation complémentaire, obtenu en remplaçant $R(a,b)$ par $\neg R(a,b)$ dans la définition des rectangles.

C'est ce dernier treillis qui sera considéré lorsque R est la matrice d'adjacence $\mathcal{U}(G)$ d'un graphe G , et sera appelé treillis de séparabilité de G . Remarquons qu'avec la convention choisie sur les graphes, tout sommet x vérifie $R(x,x)$.

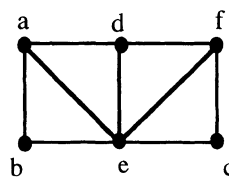
3. LES SÉPARATEURS MINIMAUX GÉNÉRALISÉS

DÉFINITION 1. Soit $G=(V,E)$ un graphe non orienté connexe, S un séparateur de G . Nous dirons que S est un k -séparateur, $k \geq 2$, s'il existe a_1, a_2, \dots, a_k dans $V-S$ tels que chaque a_i appartienne à une composante différente parmi celles constituant $\mathcal{C}(S)$. S sera dit k -séparateur minimal pour a_1, a_2, \dots, a_k si aucun sous-ensemble propre de S n'est aussi séparateur pour a_1, a_2, \dots, a_k .

REMARQUE 1. Cette définition généralise la notion classique de séparateur minimal pour deux sommets (voir [8]), que nous nommerons dans la suite 2-séparateur minimal.

DÉFINITION 2. Soit $G=(V,E)$ un graphe non orienté connexe, S un séparateur de G . Nous dirons que S est un séparateur minimal généralisé (en abrégé smg) s'il existe $k, k \geq 2$, tel que S soit k -séparateur minimal pour k sommets a_1, a_2, \dots, a_k .

EXEMPLE 1.



2-séparateurs minimaux : $S_1 = \{d,e\}$, $S_2 = \{a,e\}$, $S_3 = \{e,f\}$

3-séparateur minimal : $S_4 = \{a,e,f\}$

THÉORÈME 1. Soit S un séparateur de G . S est un k -séparateur minimal si et seulement s'il existe k éléments de $\mathcal{C}(S)$ tels que tout sommet de S voit au moins deux de ces éléments.

Preuve.

\Rightarrow Soit S un k -séparateur minimal, $|\mathcal{C}(S)| \geq k$. Supposons qu'il existe s dans S voyant au plus un élément de $\mathcal{C}(S)$. Alors $|\mathcal{C}(S - \{s\})| = |\mathcal{C}(S)|$, ce qui contredit la définition 1.

\Leftarrow Supposons que tout sommet de S voie au moins 2 composantes parmi k éléments de $\mathfrak{C}(S)$, $|\mathfrak{C}(S)| \geq k$. Supposons S k -séparateur non minimal, et soit S' inclus strictement dans S , S' séparant ces k composantes. Si $s \in S - S'$, s voit a_i dans C_i et a_j dans C_j . Il existe une chaîne $a_i s a_j$, donc S' ne peut séparer a_i de a_j .

Ce théorème généralise le théorème classique suivant : S est un 2-séparateur minimal si et seulement s'il possède deux composantes vues par tout sommet de S (Ces composantes sont alors qualifiées de *pleines*).

COROLLAIRE 1. Soit S un séparateur de G . S est un smg si et seulement si tout sommet de S voit au moins deux composantes connexes de $\mathfrak{C}(S)$.

Preuve. S est un smg $\Leftrightarrow S$ est β -séparateur minimal, avec $|\mathfrak{C}(S)| = \beta \Leftrightarrow$ tout sommet de S voit au moins 2 éléments de $\mathfrak{C}(S)$ d'après le Théorème 1.

REMARQUE 2. Soit S un smg, $\alpha = \min\{k \mid S \text{ est un } k\text{-séparateur minimal}\}$ et $\beta = |\mathfrak{C}(S)|$. S est un k -séparateur minimal pour tout k , $\alpha \leq k \leq \beta$.

4. LE TREILLIS DE SÉPARABILITÉ D'UN GRAPHE

Notation. Soit S un séparateur quelconque. On désigne par $\mathfrak{B}(G, S) = (V', E')$ le graphe biparti tel que :

$$V' = S \cup \{q_1, q_2, \dots, q_\beta\} \text{ avec } \mathfrak{C}(S) = \{C_1, C_2, \dots, C_\beta\}$$

$$E' = \{q_i s_j \mid s_j \in N(C_i)\}$$

DÉFINITION 3. $\mathfrak{B}(G, S)$ est dit *bicolorable selon les arêtes* s'il admet une coloration des arêtes respectant

- i) toutes les arêtes incidentes à un même sommet q_i possèdent la même couleur,
- ii) chaque sommet s_j est extrémité d'au moins 2 arêtes de couleurs différentes.

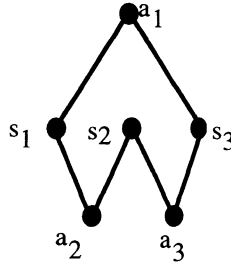
THÉORÈME 2. Si $\mathfrak{B}(G, S)$ est bicolorable selon les arêtes, alors S est un smg.

Preuve. Tout sommet de S voit dans G deux composantes de couleurs différentes, donc, d'après le Corollaire 1, S est un smg.

On peut montrer que si S est 2-séparateur minimal, alors $\mathfrak{B}(G, S)$ est bicolorable selon les arêtes.

Certains séparateurs minimaux généralisés sont tels que le graphe biparti associé n'est pas bicolorable selon les arêtes, comme le montre le contre-exemple suivant :

EXEMPLE 2.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ est 3-séparateur minimal et $\mathfrak{B}(G, S)$ n'est pas bicolorable selon les arêtes

Nous établissons maintenant la relation entre la notion de rectangle maximal de zéros de $\mathcal{Q}(G)$ et la notion de smg de G .

DÉFINITION 4. On appelle treillis de séparabilité de G , noté $\mathfrak{B}(G)$, le treillis des rectangles maximaux de zéros de la matrice $\mathcal{Q}(G)$.

DÉFINITION 5. Un rectangle de zéros $A \times B$ de $\mathcal{Q}(G)$ est dit représenter l'ensemble de sommets $S = V - (A \cup B)$.

THÉORÈME 3. Si un ensemble S de sommets est représenté par un rectangle maximal $A \times B$, alors S est un smg et $S = N(A) = N(B)$.

Preuve. Soit $a \in A$, $b \in B$. G est connexe, et $A \times B$ est un rectangle de zéros. Toute chaîne de G reliant a à b passe par S , et S sépare a de b .

Supposons S non minimal, et soit $s \in S$ qui voit au plus une composante connexe, incluse dans A par exemple. s ne voit pas B , et donc $A \times B$ n'est pas maximal.

Tout sommet de S voit donc A et B , et $N(A) = N(B) = S$.

THÉORÈME 4. Un smg S de G est représenté par un rectangle maximal $A \times B$ si et seulement si $\mathfrak{B}(G, S)$ est bicolorable selon les arêtes.

En particulier, chaque 2-séparateur minimal est représenté.

Preuve.

\Rightarrow Soit S représenté par $A \times B$: il est clair que A et B induisent une partition de $\mathfrak{C}(S)$. $\mathfrak{B}(G, S)$ peut être colorié en utilisant une couleur pour chaque élément de $\mathfrak{C}(S)$ inclus dans A , et l'autre pour chaque élément de $\mathfrak{C}(S)$ inclus dans B .

\Leftarrow Si $\mathfrak{B}(G, S)$ est bicolorable, il suffit de considérer la bipartition de V formée par les composantes de chaque couleur, ce qui décrit un rectangle maximal $A \times B$.

Il s'ensuit que chaque élément du treillis de séparabilité $\mathfrak{B}(G)$ représente un smg de G . Le lecteur remarquera qu'un même smg peut avoir plusieurs représentants distincts.

De manière évidente, le treillis de séparabilité d'un graphe est orthocomplémenté, avec l'opérateur ϕ tel que $\phi(A \times B) = (B \times A)$. Les opérations de borne inférieure et de borne supérieure seront définies selon [1] (Tome 2, p.21), à savoir :

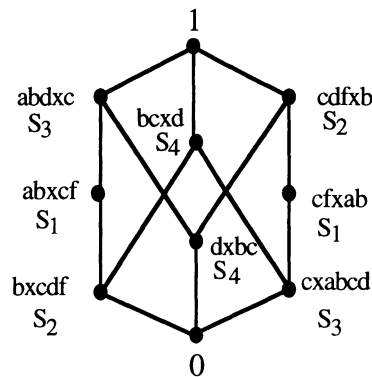
$$(A \times B) \wedge (A' \times B') = (A \cap A') \times h(A \cap A')$$

$$(A \times B) \vee (A' \times B') = h(B \cap B') \times (B \cap B')$$

avec $h(A) = \{y \in V \mid \forall x \in A \quad \mathcal{Q}(G)(x,y) = \mathcal{Q}(G)(y,x) = 0\}$

REMARQUE 3. $\mathfrak{S}(G)$ peut être défini de la même façon si G est non connexe. Dans ce dernier cas, un rectangle maximal $A \times B$ représente soit l'ensemble vide, soit un smg d'une composante connexe de G .

EXEMPLE 3. Treillis de séparabilité du graphe de l'exemple 1.



5. ORTHOTREILLIS ET GRAPHES

Nous considérons maintenant un treillis orthocomplémenté L quelconque et caractérisons la classe de graphes connexes admettant L comme treillis de séparabilité.

Dans le cas général, tout treillis est treillis des rectangles maximaux de zéros d'une relation binaire (cf. [1], Chap.V). Ce résultat s'étend à un orthotreillis, comme le montre le Théorème 6.

DÉFINITION 5. Soit G un graphe. Considérons la suite d'opérations suivante : tant qu'il existe un sommet a , et x_1, x_2, \dots, x_k , $k \geq 1$, différents de a tels que $N[a] = N[x_1] \cup N[x_2] \cup \dots \cup N[x_k]$, supprimer a . Quand ce n'est plus possible, le sous-graphe $Red(G)$ obtenu est dit irréductible.

Notons qu'un graphe G est irréductible si $Red(G) = G$.

Cette définition est cohérente car $Red(G)$ est unique à un isomorphisme près : il suffit de noter que le résultat obtenu est indépendant de l'ordre dans lequel on effectue la suite de suppressions, l'élimination d'un sommet ne modifiant pas les autres suppressions possibles.

REMARQUE 4. Il est aisé de s'apercevoir que l'opération de contraction d'un module complet A en un sommet a , avec $N(A)=N(a)$, est un cas particulier de l'opération de suppression. Ces modules sont intéressants, car ils se comportent vis-à-vis des rectangles comme un sommet unique, et ceux dont le voisinage est un 2-séparateur minimal conduisent à la notion d'extrémité d'un graphe, tout graphe non complet possédant au moins deux extrémités (cf. [2]).

REMARQUE 5. Pour le graphe de l'exemple 1, $\text{Red}(G)=G(V-\{e\})$.

THÉORÈME 5. $\mathfrak{L}(G)$ est isomorphe à $\mathfrak{L}(\text{Red}(G))$.

Preuve. D'après [1], Chap.V, le treillis de séparabilité $\mathfrak{L}(G)$ est conservé à chaque opération de réduction, celle-ci supprimant dans la matrice des lignes et des colonnes non significatives.

DÉFINITION 6. Soit L un orthotreillis, φ une orthocomplémentation de L . On dénote par $J_\varphi(L)$ le graphe $(J(L),E)$, où $J(L)$ est l'ensemble des sup-irréductibles de L , et $ij \in E$ ssi $i \leq \varphi(j)$, ce qui est encore équivalent à $j \leq \varphi(i)$.

THÉORÈME 6. Soit L un orthotreillis, φ une orthocomplémentation de L . L est isomorphe à $\mathfrak{L}(J_\varphi(L))$.

Preuve. Soit $x \in L$. Posons $A_x = \{i \in J(L) \mid i \leq x\}$ et $B_x = \{j \in J(L) \mid j \leq \varphi(x)\}$.

$A_x \times B_x$ est un élément de $\mathfrak{L}(J_\varphi(L))$: en effet, c'est un rectangle de zéros de la matrice associée au graphe, car pour tout i dans A_x et tout j dans B_x , $i \leq x$ et $j \leq \varphi(x)$, donc $\varphi(j) \geq x$, et $i \leq \varphi(j)$. Ce rectangle est maximal, car $i \leq \varphi(j)$ pour tout j dans B_x implique $j \leq \varphi(i)$, donc $\varphi(x) \leq \varphi(i)$ et $x \geq i$. De même, $j \leq \varphi(i)$ pour tout i dans A_x implique $j \leq \varphi(x)$.

Comme chaque élément de L est égal à la borne supérieure des sup-irréductibles qu'il majore, l'application qui à x fait correspondre $A_x \times B_x$ est bien une bijection de L dans $\mathfrak{L}(J_\varphi(L))$. La bi-isotonie : $x \leq y \Leftrightarrow A_x \times B_x \leq A_y \times B_y$ est évidente.

Un séparateur représenté dans $\mathfrak{L}(J_\varphi(L))$, de la forme $J(L) - (A_x \cup B_x)$, correspond donc à un ensemble de sup-irréductibles du treillis qui n'est majoré ni par x , ni par $\varphi(x)$, alors que ces deux éléments sont complémentaires.

THÉORÈME 7. Soit L un orthotreillis, φ une orthocomplémentation de L . $J_\varphi(L)$ est irréductible.

Preuve. Le voisinage $N[x]$ d'un sommet dans $J_\varphi(L)$ n'est autre que le complémentaire dans $J(L)$ de l'ensemble des sup-irréductibles majorés par $\varphi(x)$. Si l'on suppose l'existence de sommets a, x_1, x_2, \dots, x_k , $k \geq 1$, tels que $N[a] = N[x_1] \cup N[x_2] \cup \dots \cup N[x_k]$, on obtient, par passage au complémentaire, $\varphi(a)$ comme borne inférieure de $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_k)$. En effet, la borne inférieure de deux éléments est obtenue par

intersection des ensembles de sup-irréductibles majorés par ces deux éléments (cf. IV, définition de \wedge). $\varphi(a)$ étant inf-irréductible, on aboutit ainsi à une contradiction.

$J_\varphi(L)$ peut ne pas être connexe. Comme la notion de séparateur n'est définie que sur des graphes connexes, nous définirons $G_\varphi(L)$ comme étant égal à $J_\varphi(L)$ si ce dernier est connexe. Sinon, $G_\varphi(L)$ sera obtenu à partir de $J_\varphi(L)$ en lui adjoignant un sommet universel.

Soit $\mathcal{G}(L)$ la classe des graphes connexes possédant L comme treillis de séparabilité. Si $G_\varphi(L)$ est un représentant de $\mathcal{G}(L)$ possédant un nombre minimum de sommets, on ne peut garantir son unicité dans la mesure où, si φ_1 et φ_2 sont deux orthocomplémentations, $G_{\varphi_1}(L)$ et $G_{\varphi_2}(L)$ ne sont pas en général isomorphes. C'est le cas si l'on considère G_1 constitué par le complémentaire d'un cycle de longueur 6 et G_2 constitué par le complémentaire de deux cycles disjoints de longueur 3 : ces deux graphes sont irréductibles et admettent le même treillis de séparabilité (cf. [14]).

Le théorème suivant donne une caractérisation des treillis admettant un représentant unique :

THÉORÈME 8. Soit L un orthotreillis possédant au moins deux orthocomplémentations φ_1 et φ_2 . $G_{\varphi_1}(L)$ et $G_{\varphi_2}(L)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un automorphisme β de L tel que $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \beta$. Dans ce cas, β est un automorphisme de $G_{\varphi_1}(L)$, ainsi que de $G_{\varphi_2}(L)$.

Preuve.

\Leftarrow S'il existe un automorphisme β de L tel que $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \beta$, sa restriction à $J(L)$ est un automorphisme de $J(L)$.

$i \leq \varphi_1(j) \Leftrightarrow \beta(i) \leq \beta(\varphi_1(j)) \Leftrightarrow \beta(i) \leq \varphi_2(\beta(j))$, donc β est un isomorphisme de graphes de $G_{\varphi_1}(L)$ sur $G_{\varphi_2}(L)$, et un automorphisme pour chacun d'entre eux.

\Rightarrow Soit β isomorphisme de graphes défini sur $J(L)$, tel que $i \leq \varphi_1(j) \Leftrightarrow \beta(i) \leq \varphi_2(\beta(j))$. Cette dernière propriété s'écrit encore $\forall j \in J(L), \beta(\varphi_1(j)) = \varphi_2(\beta(j))$.

Montrons que β est une application bi-isotone sur $J(L)$: Soient $i, j \in J(L)$.

$$\begin{aligned} i \leq j &\Leftrightarrow \varphi_1(i) \geq \varphi_1(j) \\ &\Leftrightarrow \{k \in J(L) \mid k \leq \varphi_1(i)\} \supseteq \{k \in J(L) \mid k \leq \varphi_1(j)\} \end{aligned}$$

En prenant l'image par β de chaque ensemble :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \{k \in J(L) \mid k \leq \varphi_2(\beta(i))\} \supseteq \{k \in J(L) \mid k \leq \varphi_2(\beta(j))\} \\ &\Leftrightarrow \varphi_2(\beta(i)) \geq \varphi_2(\beta(j)) \\ &\Leftrightarrow \beta(i) \leq \beta(j) \end{aligned}$$

On étend maintenant β à L par : $i \leq x \Leftrightarrow \beta(i) \leq \beta(x) \forall i \in J(L), \forall x \in L$

Cette extension est cohérente, car les deux applications coïncident sur $J(L)$. De plus, β est une bijection, car tout élément de L est défini par l'ensemble des sup-irréductibles qu'il majore.

Montrons la bi-isotonie de β :

$$x \leq y \Leftrightarrow \{k \in J(L) \mid k \leq x\} \subseteq \{k \in J(L) \mid k \leq y\}$$

En prenant l'image par β de chaque ensemble :

$$\Leftrightarrow \{k \in J(L) \mid k \leq \beta(x)\} \subseteq \{k \in J(L) \mid k \leq \beta(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \beta(x) \leq \beta(y)$$

Montrons maintenant que $\forall x \in L \beta(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\beta(x))$

Cette propriété est vraie par hypothèse sur $J(L)$.

$$\begin{aligned} \beta(\varphi_1(x)) &= \beta(\varphi_1(\bigwedge_{i \in J(L) \mid i \leq x} i)) = \beta(\bigwedge_{i \in J(L) \mid i \leq x} \beta(i)) = \bigwedge_{i \in J(L) \mid i \leq x} \beta(\beta(i)) \\ &= \bigwedge_{i \in J(L) \mid i \leq x} \varphi_2(\beta(i)) = \varphi_2(\bigwedge_{i \in J(L) \mid i \leq x} \beta(i)) = \varphi_2(\beta(x)) \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2. Soit L un orthotreillis possédant une orthocomplémentation φ . $\mathfrak{G}(L)$ admet un représentant irréductible unique si et seulement si toute orthocomplémentation de L est de la forme $\beta^{-1} \circ \varphi \circ \beta$, avec β automorphisme de L .

Preuve.

\Leftarrow Soient φ_1 et φ_2 deux orthocomplémentations. $\varphi_1 = \beta^{-1} \circ \varphi \circ \beta$ et $\varphi_2 = \gamma^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$.

Alors $\gamma^{-1} \circ \beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \gamma^{-1} \circ \beta$ et on conclut par le Théorème 8.

\Rightarrow Si $\mathfrak{G}(L)$ admet un représentant irréductible unique, toute orthocomplémentation φ_1 vérifie $\beta \circ \varphi_1 = \varphi \circ \beta$ et $\varphi_1 = \beta^{-1} \circ \varphi \circ \beta$

Il serait intéressant d'exhiber une caractérisation structurelle pour ce dernier cas, ainsi que d'expliciter les correspondances entre des classes particulières de graphes non orientés et les classes de leur treillis de séparabilité.

6. ASPECTS ALGORITHMIQUES

Nous donnons ci-dessous un algorithme qui, étant donné un treillis L muni de l'orthocomplémentation φ , produit $G\varphi(L)$. D'autre part, à la lumière de la théorie précédente, il est facile de prouver la difficulté du problème de reconnaissance sur la classe des treillis orthocomplémentés.

ALGORITHME 1.

Donnée : L orthotreillis muni de φ

Résultat : - Un étiquetage par rectangles de L
- $G\varphi(L)$

Commentaire : Si $x \in L$ est étiqueté par AxB , $A = \text{droite}(x)$ et $B = \text{gauche}(x)$

1) Déterminer $J(L)$, ensemble des sup-irréductibles de L.

2) Pour tout $x \in L$

$\text{droite}(x) \leftarrow \{j \in L \mid j \leq x\}$;

$\text{gauche}(x) \leftarrow \{j \in L \mid j \leq \varphi(x)\}$;

Si $\varphi(x) \in J(L)$ alors dans $G\varphi(L)$: $N[\varphi(x)] \leftarrow J(L) - \text{droite}(x)$;

3) Si $G\varphi(L)$ non connexe alors lui ajouter un sommet universel.

Complexité :

1) Si le treillis L est donné par les listes d'adjacence de son graphe de Hasse (n sommets, m arcs), les sup-irréductibles possèdent un seul prédécesseur et peuvent être déterminés par un parcours : $O(n+m)$.

2) Pour chaque x , l'ensemble des ascendants doit être calculé : $O(n^{3/2})$ (cf. [5]); $\text{droite}(x)$ peut être obtenu à cette étape, ainsi que $N[\varphi(x)]$; $\text{gauche}(x)$ sera obtenu lors du traitement de $\varphi(x)$. La construction des listes d'adjacence de $G\varphi(L)$ ne modifie pas la complexité.

3) Le test de connexité et l'ajout éventuel d'un sommet universel dans $G\varphi(L)$ sont en $O(|J(L)|^2)$, soit $O(n^2)$ puisque $|J(L)| \leq n$.

La complexité globale est donc celle de n étapes 2), soit $O(n^{5/2})$.

Reconnaissance. Nous considérons ici le problème de reconnaissance de la propriété d'orthocomplémentation, en réduisant ce dernier à un problème classique d'isomorphisme. Soient donc les deux problèmes de décision (Réponse oui-non) :

ISOTREILLIS (Treillis isomorphes)

Donnée : Deux treillis T et T'.

Question : T et T' sont-ils isomorphes ?

RECONNAISSANCE-ORTHO-TREILLIS

Donnée : Un treillis L.

Question : L est-il orthocomplémenté ?

Réduction : Étant donnés les graphes de Hasse de deux treillis T et T' , on construit le graphe de Hasse d'un treillis L de la façon suivante :

- Juxtaposer les graphes de T et du treillis T'^D défini par la relation d'ordre duale de celle de T' .
- Relier par un arc de couverture l'élément nul de T à l'élément nul de T'^D .
- Relier par un arc de couverture l'élément universel de T à l'élément universel de T'^D .

Il est clair que le treillis construit L est orthocomplémenté si et seulement si les treillis T et T' sont isomorphes, et que le nombre d'éléments de L est relié polynomialement aux nombres d'éléments de T et de T' .

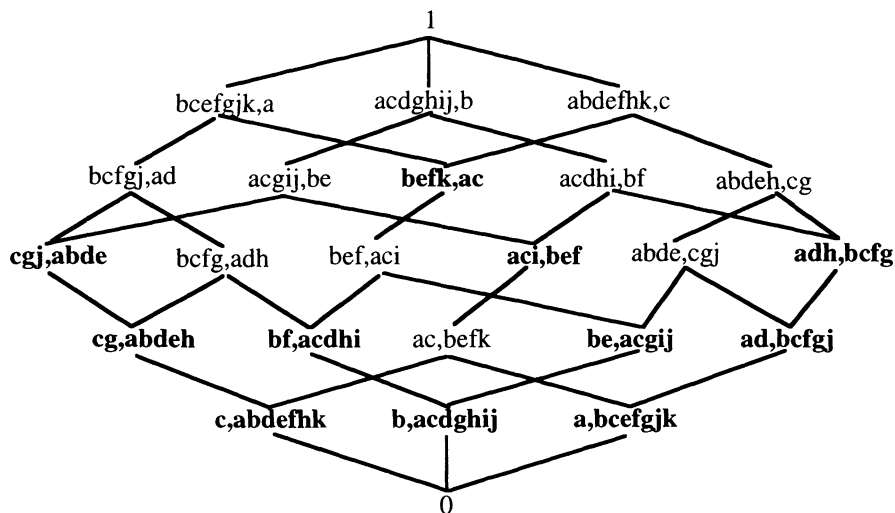
Il s'ensuit que l'existence d'un algorithme polynomial résolvant RECONNAISSANCE-ORTHO-TREILLIS entraînerait l'existence d'un algorithme polynomial résolvant ISO-TREILLIS.

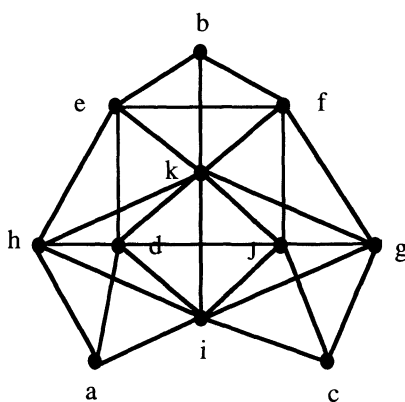
Rappelons qu'un problème est dit *isomorphisme-complet* (cf. [3]) s'il est polynomialement équivalent au problème d'isomorphisme de deux graphes quelconques. La technique de preuve consiste à montrer que l'existence d'un algorithme de résolution polynomial pour le premier entraîne l'existence d'un algorithme de résolution polynomial pour le second. RECONNAISSANCE-ORTHO-TREILLIS est donc lui aussi isomorphisme-complet.

7. ILLUSTRATION : LE PERMUTOÈDRE

Chaque treillis de permutations possède la propriété d'orthocomplémentation unique. Nous donnons ci-dessous à titre d'exemple le treillis S_4 étiqueté par l'algorithme 1, ainsi que $G\phi(S_4)$. Les sup-irréductibles sont étiquetés en caractères gras.

EXEMPLE 4. S_4 et $G\phi(S_4)$





8. CONCLUSION

Le double passage entre la classe des graphes non orientés et la classe des treillis orthocomplémentés semble avoir donné lieu à peu de travaux. Cependant, l'utilisation du séparateur minimal comme outil structural sur un graphe est une direction de recherche émergente et il paraît intéressant de poursuivre l'exploration des treillis orthocomplémentés dans ce sens. Déjà, le treillis de séparabilité nous a permis d'obtenir des résultats très prometteurs à la fois sur la définition des extrémités d'un graphe quelconque (voir [2]) et sur la définition d'un schéma inductif de construction de l'ensemble des 2-séparateurs minimaux d'un graphe (cf. [3]).

REMERCIEMENTS — Nous remercions Bruno Leclerc, Bernard Monjardet et Alain Guénoche pour leurs conseils amicaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT, M., MONJARDET, B., *Ordre et classification*, Paris, Classiques Hachette, 1970.
- [2] BERRY, A., BORDAT, J.-P., "Separability generalizes Dirac's theorem", *Discrete Applied Math.* 84, (1998), 43-53.
- [3] BERRY, A., BORDAT, J.-P., COGIS, O., "Generating all the minimal separators of a graph", soumis à WG'99.
- [4] BOOTH, K.S., COLBOURN, C.-J., "Problems polynomially equivalent to graph isomorphism", TR CS-77, D4, Dept. of Computer Science, Univ. of Waterloo, (1979).
- [5] BORDAT, J.-P., "Sur l'algorithmique combinatoire d'ordres finis", Thèse d'Etat, (1992).
- [6] BORDAT, J.P., "Construction du Treillis de Galois d'une relation binaire", *Math. et Sci. hum.* 96, (1986), 31-47.
- [7] CHAMENI-NEMBUA, C., MONJARDET, B., "Finite pseudocomplemented lattices and 'permutoedre'", *Discrete Math.* 111, (1993), 105-112.

- [8] DIRAC, G.A., "On rigid circuit graphs", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 25, (1961), 71-76.
- [9] ESCALANTE, F., "Schnittverbände in Graphen", *Abh. Math. Sem. Hamburg* 38, (1972), 199-220.
- [10] GUÉNOCHE, A., "Calcul pratique du treillis de Galois d'une correspondance", *Math. Inf. Sci. hum.* 121, (1990), 23-34.
- [11] HALIN, R., "Lattices of cuts in graphs", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 61, (1991), 217-230.
- [12] MAEDA, F., MAEDA, S., *Theory of Symmetric Lattices*, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag, 1970.
- [13] MORVAN, M., NOURINE, L., "Sur la distributivité du treillis des antichaînes maximales d'un ensemble ordonné", *C. R. Acad.Sci. Paris*, t. 317, Série I, (1993), 129-133.
- [14] WALKER, J.W., "From graphs to ortholattices and equivariant maps", *Journ. of Comb. Theory*, ser. B, 35, (1983), 171-192.
- [15] ZAPATRIN, R.R., "Graph representation of finite ortholattices", *Proc. 2nd Winter School on Measure Theory, Lipovsky*, (1990), 213-218.