

ALBERT TROESCH

**Droites discrètes et calendriers**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 141 (1998), p. 11-41

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1998\\_\\_141\\_\\_11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1998__141__11_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DROITES DISCRÈTES ET CALENDRIERS

Albert TROESCH<sup>1</sup>

RÉSUMÉ. — *La structure d'un calendrier peut être décrite par une suite de formes quasi-affines. Une telle suite, que j'appellerai base quasi-affine, généralise la notion de base de numération. Le problème de la conversion de dates est ainsi ramené à l'écriture du Jour Julien dans une telle base. Un algorithme de reconnaissance de droites discrètes permet d'obtenir la bonne base quasi-affine. À titre d'exemples sont traités les calendriers julien, grégorien, musulman et judaïque.*

SUMMARY. — Discrete straight lines and calendars.<sup>2</sup>

*The structure of a calendar can be described by a sequence of quasi-affine forms. Such a sequence, that will be called quasi-affine basis, generalizes the notion of numeration basis. The problem of the date conversion is therefore reduced to the writing of the Julian Day in such a basis. A discrete straight line recognizing algorithm enables us to obtain the good quasi-affine basis. As examples are given the julian, gregorian, islamic, and judaic calendars.*

À la mémoire de  
Georges REEB  
et Jean-Louis CALLOT

## 1. INTRODUCTION

Depuis les temps les plus anciens, l'homme a utilisé le mouvement des astres qui rythment son existence, pour fixer le passé et planifier son avenir. L'alternance des jours et des nuits, les phases de la lune, la périodicité des saisons constituent une sorte de calendrier naturel lui permettant de se repérer dans le temps, et dont nos calendriers actuels gardent plus ou moins l'empreinte. Ainsi sont nées les principales unités de mesure du temps : le jour, la semaine (durée approximative d'une phase lunaire), le mois (durée approximative de la lunaison), l'année (période du cycle des saisons).

Le rôle d'un calendrier est de fournir des jalons permettant de se repérer dans le temps. Il doit donc comporter une origine et une graduation. La graduation la plus simple est la graduation en jours. Cette unité étant trop petite pour les longues durées, ce système ne permet pas de situer facilement un événement par rapport aux saisons ou aux lunaisons. Mais, étant donné sa simplicité, il est utilisé comme un intermédiaire extrêmement précieux dans les conversions de dates entre calendriers. Le système de référence utilisé communément à cet effet est ce qu'on appelle le *Jour Julien*, dont l'origine a été fixée au *Lundi 1<sup>er</sup> janvier -4712*<sup>3</sup> dans le calendrier julien (origine de la période de Scaliger).

La plupart des calendriers gardent un lien étroit soit avec le cycle des saisons, soit avec le cycle lunaire, soit avec les deux à la fois. Ainsi, en plus du jour, d'autres unités doivent

<sup>1</sup>IRMA, 7, rue René-Descartes F-67084 STRASBOURG CEDEX, troesch@math.u-strasbg.fr

<sup>2</sup>A.M.S. Subject classification : 68 U 05 (68 R 99 - 68 T 10). Mots clés : Droite discrète, formes quasi-affines, bases quasi-affines, algorithme de reconnaissance, calendriers.

<sup>3</sup>J'utilise ici, et dans toute la suite, la notation algébrique adoptée en astronomie, incluant des années négatives et une année 0. L'année indiquée est donc l'année 4713 av. J.-C.

être utilisées : l'année et le mois. Mais avec ces nouvelles unités arrivent aussi les principales difficultés apparaissant dans les problèmes de conversion. Le mois lunaire moyen n'ayant pas un nombre entier de jours, ni l'année solaire moyenne un nombre entier de jours ou de mois, on est amené à procéder à des arrondis. Afin d'éviter une trop grande dérive de l'année par rapport aux saisons ou aux lunaisons, les calendriers doivent comporter des mois et des années de longueurs inégales. Ces irrégularités sont alors distribuées de manière à approcher la lunaison ou l'année solaire en moyenne. Lorsque ces irrégularités sont distribuées avec suffisamment d'uniformité les approximations réalisées sont analogues aux approximations qu'on fait pour déterminer les coordonnées des points d'une droite discrète.

Une date dans un calendrier est la donnée du rang  $A$  de l'année, du rang  $m$  du mois dans l'année et du rang  $j$  du jour dans le mois. En général toutes les numérotations commencent en 1 (il y a cependant des exceptions comme le calendrier Maya qui utilise une numérotation des jours commençant par 0 (cf. [2])). Ainsi la date de l'origine du calendrier est généralement le 1/1/1. Le problème de la concordance entre deux calendriers est résolu si on dispose pour chacun d'eux d'un algorithme permettant de déterminer le Jour Julien à partir de la date, et réciproquement la date à partir du Jour Julien. Les algorithmes donnés dans la littérature sont en général assez complexes et dépendent des calendriers.

Il y a une grande analogie entre la donnée d'une date  $(A, m, j)$  et une numération de position du Jour Julien. Cependant deux différences essentielles distinguent une date de l'écriture du Jour Julien dans une base généralisée :

- Comme je l'ai mentionné plus haut, en général les numérotations commencent en 1, ainsi le chiffre 0 n'est pas utilisé.
- Comme les mois ou les années ont des durées inégales, l'intervalle dans lequel varient les chiffres d'un rang donné n'est pas toujours le même.

Dans cet article, je montre qu'on peut généraliser la notion de base de numération de telle manière que, pour la plupart des calendriers, la donnée d'une date se déduise de manière immédiate de l'écriture du Jour Julien dans une telle base. Pour cela j'introduirai tout d'abord les formes quasi-affines

$$y(x) = \lfloor (ax + r)/b \rfloor$$

$a, b, r$  et  $x$  étant des entiers et  $\lfloor u \rfloor$  désignant la partie entière de  $u$ . Le code en  $x$  d'une telle forme sera le nombre entier

$$c(x) = y(x + 1) - y(x).$$

Je donnerai un algorithme de reconnaissance permettant de décider si une suite d'entiers est le code d'une forme quasi-affine et de déterminer les coefficients  $a, b, r$  de celle-ci. Appliqué à la suite des longueurs des mois, ou à la suite des longueurs des années, cet algorithme permettra de donner une base solide aux formules empiriques utilisées usuellement dans les conversions de dates. Lorsqu'on applique, par exemple, cet algorithme à la suite des longueurs des mois à partir du mois de mars (ce mois étant pris pour mois 0) et en terminant par le mois de janvier, il nous indique que cette suite est le code de la forme quasi-affine

$$y(x) = \lfloor (153x + 2)/5 \rfloor.$$

On peut alors retrouver l'algorithme usuel donnant le nombre de jours écoulés entre une date donnée et le 1<sup>er</sup> mars précédent :

$$n = \lfloor 30, 6(M + 1) \rfloor - 122 + j.$$

Dans cette formule  $M$  est défini à partir du mois  $m$  par

$$\begin{aligned} M &= m + 12 && \text{si } m < 3 \\ M &= m && \text{si } m \geq 3. \end{aligned}$$

C'est une remarquable série d'articles de J. Lefort [6] intitulée "*La Grande Saga des Calendriers*" qui a éveillé mon intérêt pour les calendriers, en particulier la phrase suivante relevée dans le n°54 p.31, m'a incité à faire mes premiers essais :

*"Tous les termes de la formule se comprennent bien sauf peut-être le  $\lfloor 30.6(M + 1) \rfloor$ .  
Il s'agit ici d'une formule empirique ..."*

Le procédé utilisé ici a l'avantage de nous éviter le tâtonnement dans la recherche des formes quasi-affines susceptibles de décrire la structure d'un calendrier, et, dans certains cas désespérés, de nous indiquer qu'il est vain d'espérer en obtenir.

Les bases quasi-affines, que je définis ensuite, sont des suites de formes quasi-affines particulières. Elles permettent de développer un nombre entier en une suite de chiffres d'une manière analogue aux bases de numération usuelles. Les chiffres des développements obtenus dans ces bases ont des plages de variation variables, reproduisant ainsi les variations des longueurs des mois et des années dans les calendriers. L'utilisation conjointe des bases quasi-affines et de l'algorithme de reconnaissance pour le calcul de leurs coefficients, offre une très grande sécurité dans l'élaboration des formules de conversion.

Dans la suite, je me suis intéressé exclusivement aux quatre calendriers principaux : les calendriers julien, grégorien, musulman et judaïque. Mais la méthode est générale. Les algorithmes ainsi obtenus ont été implémentés dans un programme en Pascal établissant les concordances entre les quatre calendriers étudiés.

Pour terminer je citerai les articles de D.A. Hatcher ([4] et [5]) complétés par J.-P. Parisot [8], [2] et [9]), qui sont les travaux les plus proches du mien. Les articles de D.A. Hatcher et J.-P. Parisot contiennent des formules analogues à celles que je donne ici. Cependant les leurs sont déterminées empiriquement et présentent parfois le défaut de contenir des nombres décimaux (l'utilisation de ces derniers n'est pas seulement un défaut esthétique, mais pourrait conduire à des erreurs d'arrondis gênantes). Leur but est de caractériser chaque calendrier par un certain nombre de constantes. Certaines d'entre elles sont les coefficients de deux formes quasi-affines caractérisant les mois et les années, mais l'absence de la notion de base quasi-affine dans ces travaux ne leur donne pas toute la souplesse et la généralité nécessaire, et de ce fait leur traitement du calendrier grégorien ne me satisfait pas entièrement.

## 2. DROITES DISCRÈTES ET FORMES QUASI-AFFINES

Dans ce paragraphe, je donne les définitions des ingrédients nécessaires : droites discrètes, formes quasi-affines, codes et paliers. Le lecteur pourra se référer aux travaux suivants : [10], [11], [13].

En algorithmique graphique, pour tracer un segment de droite d'origine  $(0, 0)$  et d'extrémité  $(a, b)$  avec  $a \leq b$ , on utilise généralement l'algorithme de Bresenham qui trace l'ensemble des points

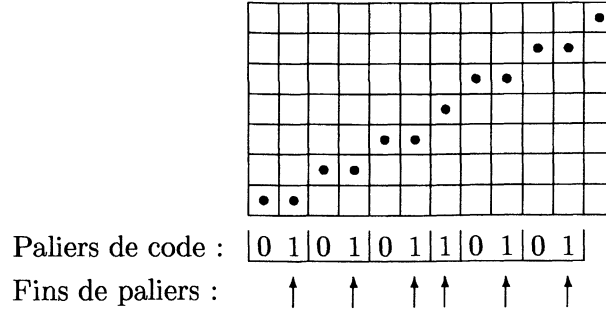
$$s = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax - by + \lfloor b/2 \rfloor \in [0, b]\}$$

(où  $\lfloor u \rfloor$  désigne la partie entière de  $u$ ). C'est l'ensemble des points à coordonnées entières dont les ordonnées sont les plus proches des ordonnées des points de la droite réelle d'équation  $ax - by = 0$ .

**DÉFINITION 1.** *Étant donné un entier  $a$ , des entiers positifs  $r$  et  $e$ , un entier  $b > 0$ , j'appellerai droite discrète  $D(a, b, e, r)$  de vecteur directeur  $(b, a)$ , d'épaisseur  $e$  et de reste initial  $r$  l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{Z}^2$  défini par l'"équation"*

$$ax - by + r \in [0, e] \tag{1}$$

*Les nombres  $a$ ,  $b$ ,  $e$  et  $r$  seront appelés les caractéristiques de la droite discrète et (1) sera appelée l'équation de la droite discrète.*

FIG. 1: Droite :  $7x - 12y \in [0, 12[$ 

REMARQUE. — Lorsque  $e$  est égal à  $b$ , la définition exprime que si  $(x, y)$  est un point de la droite discrète  $D(a, b, b, r)$ ,  $y$  est le quotient euclidien de  $ax + r$  par  $b$ . Par conséquent, il existe pour chaque  $x$  un unique  $y$  tel que  $(x, y)$  soit un point de  $D(a, b, b, r)$  :

$$y_x = \lfloor (ax + r)/b \rfloor.$$

Cette droite peut donc être considérée comme un graphe de fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Je les appellerai droites discrètes fonctionnelles.

Dans la suite, je m'intéresserai surtout à ces dernières. Dans la littérature on les appelle aussi *suites de Beatty généralisées*. J'utilise ici une terminologie venant de la géométrie discrète, qui me paraît plus parlante. Ces formes sont canoniquement associées aux formes quasi-affines, dont elles constituent les graphes :

DÉFINITION 2. *J'appellerai forme quasi-affine une fonction  $f$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par :*

$$y = \lfloor (ax + r)/b \rfloor$$

où  $a$  et  $r$  sont deux entiers et  $b$  un entier strictement positif. La forme quasi-affine  $f$  sera encore notée  $(a, b, r)$ .

DÉFINITION 3. *J'appellerai code de la droite  $D(a, b, b, r)$  (ou de la forme quasi-affine associée) la suite des différences premières de  $y$  :*

$$c_x = y_{x+1} - y_x.$$

REMARQUE. — Comme  $(a(x+1) - by_{x+1}) - (ax - by_x) = a - bc_x$  appartient à  $] -b, b[$ , le code  $c_x$  ne peut prendre que l'une des deux valeurs  $\lfloor a/b \rfloor$  ou  $\lfloor a/b \rfloor + 1$ . En particulier si  $a \leq b$  le code est formé uniquement des éléments 0 et 1.

DÉFINITION 4. *Lorsque  $a < b$ , on appelle palier de la droite  $D(a, b, e, r)$  l'ensemble  $P$  de tous les points de la droite ayant la même ordonnée. Lorsque  $e = b$ , et  $a < b$ , ils correspondent aux segments de code de longueur maximale se terminant par un code 1 et ne contenant pas d'autre code 1. Ces segments de code seront appelés paliers de code. On appellera début de palier la borne gauche, et fin de palier la borne droite d'un palier.*

## REMARQUES

1. Puisque, pour  $y$  constant,  $ax - by + r$  augmente de  $a$  chaque fois que  $x$  augmente d'une unité, les *débuts de paliers* de  $D(a, b, e, r)$  (avec  $a \leq b$ ) sont les points  $(x, y)$  vérifiant

$$ax - by + r \in [0, a[.$$

Ils forment donc la droite discrète  $D(a, b, a, r)$ . Il est clair que pour chaque  $y$  cette droite a un unique point d'ordonnée  $y$ . Pour les mêmes raisons, si  $(x, y)$  est une *fin de palier*,  $ax - by + r$  appartient à  $[e - a, e[$ , ou encore  $ax - by - e + a + r$  appartient à  $[0, a[$ . L'ensemble des *fins de paliers* de la droite discrète  $D(a, b, e, r)$  est donc la droite discrète  $D(a, b, a, -e + a + r)$ .

2. Les coefficients  $a, b, r$  ne sont pas en correspondance bijective avec les formes  $f$ . Par contre  $a$  et  $b$  étant donnés, et premiers entre eux, alors  $r$  est unique.

Si  $n > 0$  et  $0 \leq n_1 < n$ ,  $(na, nb, nr + n_1)$  définit la même forme que  $(a, b, r)$ . C'est évident pour  $n_1 = 0$ . En outre, si  $ax - by$  appartient à  $[b - a, b[$  alors pour  $n > 0$ ,  $nax - nby$  appartient à  $[n(b - a), n(b - 1) + 1[$  et par suite  $nax - nby + n_1$  appartient à  $[nb - na, nb[$  pour  $0 \leq n_1 < n$ . Les abscisses des fins de paliers de la première droite sont donc les abscisses de fins de paliers pour la seconde. De même les débuts de paliers des deux droites coïncident. Il en résulte que les deux droites sont identiques.

## 3. CARACTÉRISATION DES DROITES DISCRÈTES FONCTIONNELLES

À présent, voici quelques opérations sur les codes de droites discrètes et une caractérisation de ces codes, qui serviront à justifier l'algorithme de reconnaissance de segments de droites du paragraphe suivant (pour de plus amples renseignements sur les droites discrètes, le lecteur pourra se référer à [13]).

## 3.1. Opérations sur les droites et les codes

PROPOSITION 1. :

1. La transvection  $x' = x, y' = y - px$ , où  $p$  est un entier, transforme la droite discrète  $D(a, b, b, r)$  en la droite discrète  $D(a - pb, b, b, r)$ . On obtient le code de  $D(a - pb, b, b, r)$  en retranchant à tous les éléments du code de  $D(a, b, b, r)$  l'entier  $p$ .
2. Lorsque  $a < b$ , la symétrie oblique  $x' = y, y' = x - y$ , transforme la droite discrète  $D(a, b, b, r)$  en la droite discrète  $D(b - a, b, b, b - 1 - r)$ . On obtient le code de  $D(b - a, b, b, b - 1 - r)$  en échangeant les éléments de code 0 et 1 dans le code de  $D(a, b, b, r)$ .
3. Lorsque  $a < b$ , la symétrie  $x' = y, y' = x$  transforme les débuts de paliers de la droite discrète  $D(a, b, b, r)$  en la droite discrète  $D(b, a, a, a - 1 - r)$ . On obtient le code de  $D(b, a, a, a - 1 - r)$  en remplaçant dans le code de  $D(a, b, b, r)$  chaque palier de code par sa longueur.

## DÉMONSTRATION

1. Le point  $(x, y_x)$  de la droite  $D(a, b, b, r)$  vérifie

$$ax - by_x + r \in [0, b[ \quad (2)$$

Mais ceci équivaut à

$$(a - pb)x + b(y_x - px) + r \in [0, b[$$

ce qui signifie que  $(x, y_x - px)$  est le point d'abscisse  $x$  de la droite discrète  $D(a - pb, b, b, r)$ . Le code de cette dernière est relié à celui de la précédente par la relation

$$c'_x = (y_{x+1} - p(x + 1)) - (y_x - px) = y_{x+1} - y_x - p = c_x - p.$$

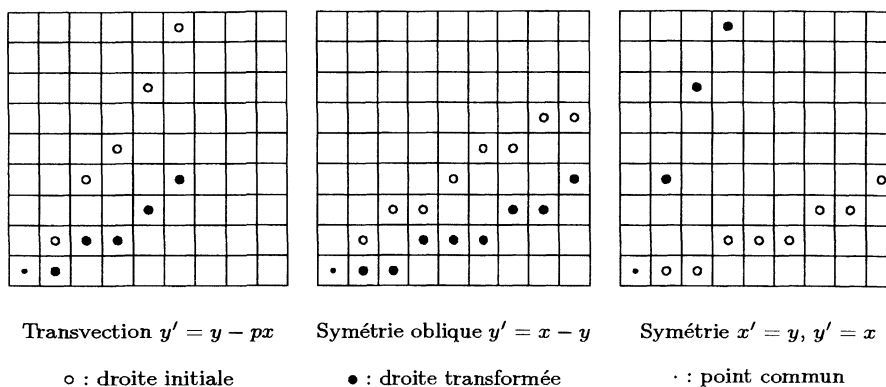


FIG. 2: Transformations

2. Si le nombre  $r_x = ax - by_x + r$  appartient à  $[0, b[$  pour tout  $x$ , il en est de même pour  $b - 1 - r_x$ . Ainsi la relation (2) équivaut aussi à

$$(b - a)x - b(x - y_x) + b - 1 - r \in [0, b[.$$

Il en résulte que si  $(x, y_x)$  est un point de la droite  $D(a, b, b, r)$ , le point  $(x, x - y_x)$  est un point de la droite  $D(b - a, b, b, b - 1 - r)$ . Le code de cette dernière vérifie donc

$$c'_x = (x + 1 - y_{x+1}) - (x - y_x) = 1 - c_x.$$

Si  $c$  est formé uniquement de 0 et 1 la relation précédente correspond à l'échange de ces éléments de code.

3. Les débuts de palier de  $D(a, b, b, r)$ , avec  $a < b$ , sont les points de la droite discrète  $D(a, b, a, r)$ . Si  $(x, y)$  est un tel point,  $ax - by + r$  appartient à  $[0, a[$ .  
Ce qui équivaut à

$$a - 1 - (ax - by + r) = by - ax + a - 1 - r \in [0, a[.$$

Ainsi la symétrie par rapport à la diagonale  $y = x$  transforme l'ensemble des débuts de paliers de la droite  $D(a, b, b, r)$  en la droite discrète  $D(b, a, a, a - 1 - r)$ . Le code de cette droite en  $x$  est donc égal à la longueur du palier d'ordonnée  $x$  de  $D(a, b, b, r)$ .  $\square$

REMARQUE. — À une translation d'une unité près, le code obtenu en 3) peut être considéré aussi comme le code la droite discrète  $D(b, a, a, b - 1 - r)$  : il suffit de faire le même raisonnement en remplaçant les débuts de paliers par les fins de paliers

COROLLAIRE 1. (FORMULES D'INVERSION) Soient  $a, b$  des entiers strictement positifs, et  $y$  un entier. Le plus petit entier  $x$  tel que  $\lfloor (ax + r)/b \rfloor \geq y$  est donné par la formule  $x = \lfloor (by + a - 1 - r)/a \rfloor$ .

Le plus grand entier  $x$  tel que  $\lfloor (ax + r)/b \rfloor \leq y$  est donné par la formule  $x = \lfloor (by + b - 1 - r)/a \rfloor$ .

La première partie de ce corollaire est une conséquence immédiate du point 3) de la PROPOSITION 1. La deuxième partie s'obtient d'une manière analogue d'après la remarque précédente.

### 3.2. Propriétés caractéristiques des codes de droites discrètes fonctionnelles

PROPOSITION 2. Les codes de droites discrètes fonctionnelles sont caractérisés par les propriétés suivantes :

a) toute application des opérations suivantes donne un code formé de deux entiers consécutifs :

1. soustraire à tous les éléments de code l'élément le plus petit (on obtient alors un code formé de 1 et de 0) ;
2. si l'élément 1 n'est pas isolé dans le code obtenu, échanger les 1 et les 0 ;
3. remplacer dans le code obtenu en 2) les paliers de code par leur longueur.

b) Une application répétée de ces opérations aboutit à un code constant.

DÉMONSTRATION. — D'après la PROPOSITION 1. il est clair que a) est vérifié pour tout code de droite discrète. D'autre part une application de l'ensemble des trois opérations donne, d'après cette même proposition, le code d'une droite discrète dont la pente a un dénominateur strictement plus petit que celui de la pente de la droite initiale. Par conséquent, une application répétée de ces opérations conduira finalement à un code de droite de pente entière, c'est-à-dire à un code constant.

Inversement, si un code vérifie a) et b), on peut retrouver l'équation de la droite en remontant en sens inverse cette suite d'opérations et en utilisant la PROPOSITION 1. (Nous verrons plus loin, au § 5., sur des exemples de segments de droites discrètes, comment cela fonctionne dans la pratique).  $\square$

REMARQUE. — Les trois opérations effectuées sur le code correspondent à des transformations géométriques sur les droites discrètes, et la répétition de ces opérations se traduit sur la pente de ces droites par un algorithme équivalent à l'algorithme d'Euclide (cf. [13]).

#### 4. RECONNAISSANCE DE SEGMENTS

Dans ce paragraphe je donne un algorithme de reconnaissance de segments de droites discrètes que j'appliquerai plus loin à divers calendriers (l'algorithme de reconnaissance est publié dans [13]).

##### 4.1. Segments

Comme je travaillerai exclusivement sur le code, je ne considérerai que des segments d'origine  $(0, 0)$ .

DÉFINITION 5. *Le segment de droite discrète  $S(a, b, e, r, l)$ , de pente  $a/b$ , d'épaisseur  $e$ , de reste initial  $r$  et de longueur  $l$ , est l'ensemble des couples  $(x, y)$  de  $D(a, b, e, r)$  vérifiant  $0 \leq x \leq l$ .*

*Le code du segment  $S(a, b, b, r, l)$  est la restriction à l'intervalle  $[0, l[$  du code de la droite  $D(a, b, b, r)$ .*

DÉFINITION 6. *Les éléments  $(a, b, r, l)$  seront appelés caractéristiques du segment  $S(a, b, b, r, l)$ ,  $a/b$  étant la pente du segment (c'est-à-dire de la droite qui le porte),  $r$  le reste initial et  $l$  la longueur de la projection du segment sur l'axe des  $x$ .*

REMARQUES. — Comme dans le cas des droites discrètes, un segment de droite discrète et un code de segment de pente  $a/b$  inférieure à 1 peuvent être découpés en paliers.

J'appellerai *palier terminal* le palier formé uniquement de codes 0 (terminant le code à droite) ; il peut être éventuellement vide. Nous conviendrons que sa longueur est sa longueur réelle augmentée de 1, pour tenir compte du code 1 qui devrait normalement le terminer.

J'appellerai *palier initial* le palier de gauche. Les autres paliers seront appelés *paliers internes*.

La difficulté de la reconnaissance de codes de segments de droites discrètes vient des extrémités : le palier initial et le palier terminal peuvent être incomplets : en tenir compte alors qu'ils sont trop courts conduirait à rejeter des codes qui pourraient tout de même être des codes de



segments de droite discrète (ces paliers peuvent être prolongés en des paliers plus longs). Les négliger alors qu'ils sont trop longs conduirait à accepter des codes qui ne sont pas des codes de segments. Il faut donc affiner le procédé de choix des paliers qu'on conserve.

Définissons maintenant les paliers externes complets, c'est-à-dire ceux dont on tiendra compte, ceux qui ne sont pas susceptibles d'être prolongés ; les autres seront négligés.

**DÉFINITION 7.** *S'il existe des paliers internes, un palier externe sera complet si sa longueur est strictement supérieure à la longueur du palier interne le plus court.*

*S'il n'existe pas de palier interne, le palier externe le plus long sera complet.*

*(D'après la convention introduite plus haut, la longueur du palier terminal est sa longueur réelle augmentée de 1).*

#### 4.2. Algorithme de reconnaissance de segments

Pour tester si un segment de code fini est le code d'un segment de droite discrète, j'utiliserai l'algorithme de la PROPOSITION 2., mais en ne tenant compte que des paliers internes et des paliers externes complets. Étant donné que le code diminue au moins de moitié à chaque itération, on a l'alternative suivante :

1. L'algorithme détecte des éléments de codes différant de plus de 1 : le code n'est pas le code d'un segment de droite discrète.
2. Il aboutit à un code constant éventuellement réduit à un seul élément : dans ce cas c'est le code d'une droite discrète dont on calculera les caractéristiques.

Dans la suite je noterai  $a \bmod b$  le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ . L'élément 1 sera dit *isolé* dans un segment de code formé uniquement de 0 et de 1, si ce segment de code ne contient pas le segment de code 11.

ALGORITHME :

##### début

$c$  : code (de longueur finie);

**Si**  $c$  contient au plus deux entiers consécutifs

**alors**  $droite := vrai$

**sinon**  $droite := faux$ ;

$n := 0$ ;

**tant que** ( $droite = vrai$ ) **et** ( $c$  non constant) **faire**

**début**  $n := n + 1$ ;

$p_n :=$  plus petit élément de code de  $c$ ;

        Retrancher  $p_n$  à tous les éléments de  $c$  (Opération 1)

        (on obtient ainsi un code formé uniquement d'entiers 0 et 1);

**Si** l'élément 1 n'est pas isolé **alors**

**début**  $n := n + 1$ ;

            Échanger les 0 et les 1; (Opération 2)

$E_n := vrai$ ;

**fin**;

**sinon**  $E_n := faux$ ;

$n := n + 1$ ;

        Remplacer les paliers de code internes et les paliers de code complets par leur longueur;

(Opération 3)

$g_n :=$  nombre d'éléments de code négligés;

        (=longueur du palier initial s'il n'est pas complet, 0 sinon).

**Si**  $c$  contient au plus deux entiers consécutifs  
**alors**  $droite := vrai$   
**sinon**  $droite := faux$ ;  
**fin**;  
**Si**  $droite = vrai$  **alors**  
**début**  
(c est un code de segment de droite discrète.  
Détermination des caractéristiques  $(a, b, r)$  :)  
 $a_n := c$ ; ( $c$  est le code constant obtenu à la fin de la boucle précédente);  
 $b_n := 1$ ;  
 $r_n := 0$ ;  
**tant que**  $n \geq 0$   
**début**  $n := n - 1$ ;  
 $a_n := b_{n+1}$ ;  $b_n := a_{n+1}$ ;  
 $r_n := a_n - 1 - r_{n+1}$ ; (Opération 3 : PROPOSITION 2.a)3))  
 $r_n := (r_n - g_{n+1}a_n) \bmod b_n$ ; (Correction pour tenir compte des  
éléments de code négligés : on déplace  
l'origine au début du segment de code)  
  
**Si**  $E_n = vrai$  **alors**  
**début**  $n := n - 1$ ;  
 $b_n := b_{n+1}$ ;  
 $a_n := b_{n+1} - a_{n+1}$ ; (Opération 2 : PROPOSITION 2.a)2))  
 $r_n := b_n - 1 - r_{n+1}$ ;  
**fin**;  
 $n := n - 1$  ;  
 $b_n := b_{n+1}$ ;  
 $a_n := a_{n+1} + p_{n+1}b_{n+1}$ ; (Opération 1 : PROPOSITION 2.a)1))  
 $r_n := r_{n+1}$ ;  
**fin**;  
**fin**;  
**sinon**  $c$  n'est pas un code de segment de droite discrète;  
**fin**;  
**fin**;

## 5. APPLICATIONS À DIVERS CALENDRIERS

Dans ce paragraphe j'applique l'algorithme de reconnaissance à divers calendriers. Les formes quasi-affines ainsi obtenues serviront par la suite à donner des bases quasi-affines pour ces calendriers.

### 5.1. Les mois des calendriers julien et grégorien

Appliquons l'algorithme de reconnaissance à la suite des longueurs des mois dans les calendriers grégorien et julien. Je les numérotai à partir de mars (= 0) et je terminerai par janvier (= 10). Dans le tableau qui suit

- la colonne Op. contient le numéro de l'opération effectuée pour obtenir la ligne,
- la colonne  $g_n$  le nombre d'éléments de codes négligés dans la ligne précédente en appliquant l'opération 3, du fait des paliers non complets,
- la colonne  $p_n$  le nombre retranché aux éléments de codes dans l'opération 1.

Ligne $n$	Code												Op.	$g_n$	$p_n$
1	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31				
2	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1		30	
3	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2			
4				2	3			2		3		3	2		
5				0	1			0		1		1		2	
6							2			3		2			

Nous voyons donc que la suite des longueurs des mois est le code d'un segment de droite discrète. Déterminons à présent ses caractéristiques. Dans le tableau suivant, le numéro de ligne désigne la ligne correspondante du tableau précédent. Les équations indiquées sont celles des formes quasi-affines, associées aux droites discrètes passant par l'origine et ayant pour code le code de cette ligne.

Ligne $n$	$a_n$	$b_n$	$r_n$	Observations	$g_n$	$p_n$	Équation
6	2	1	0		2		$y = 2x$
5	1	2	0	$r_5 = a_5 - 1 - r_6 - g_6 a_5 \text{ mod } b_5$		2	$y = \lfloor x/2 \rfloor$
4	5	2	0	$a_4 = a_5 + p_5 b_5, b_4 = b_5$	2		$y = \lfloor 5x/2 \rfloor$
3	2	5	2	$r_3 = a_3 - 1 - r_4 - g_4 a_3 \text{ mod } b_3$			$y = \lfloor (2x + 2)/5 \rfloor$
2	3	5	2	$r_2 = b_2 - 1 - r_3 \text{ mod } b_2$		30	$y = \lfloor (3x + 2)/5 \rfloor$
1	153	5	2	$a_1 = a_2 + p_2 b_2, b_1 = b_2$			$y = \lfloor (153x + 2)/5 \rfloor$

COMMENTAIRES. — Dans la ligne 5, l'entier  $g_6 a_5$  est retranché du reste  $r_5$  afin que le premier élément de code de cette ligne corresponde à  $x = 0$ . Les autres formules et résultats du tableau sont des applications directes de la PROPOSITION 1.

CONCLUSION. — La suite des longueurs des mois depuis le mois 1<sup>er</sup> mars à 0h est le code de la droite discrète de pente  $153/5$  et de reste initial 2 :

$$y = \lfloor (153x + 2)/5 \rfloor$$

et par suite à la date  $(j, m)$  il s'est écoulé

$$y = \lfloor (153M' + 2)/5 \rfloor + j - 1$$

jours entiers depuis le 1<sup>er</sup> mars précédent, à 0h,  $M'$  étant défini par

$$M' = m - 3 \quad \text{si} \quad m \geq 3,$$

$$M' = m + 9 \quad \text{si} \quad m < 3.$$

(Cette formule est donnée par D.A. Hatcher [5]).

## VÉRIFICATION

	<i>mar</i>	<i>avr</i>	<i>mai</i>	<i>jun jul</i>	<i>aoû</i>	<i>sep</i>	<i>oct</i>	<i>nov</i>	<i>déc</i>	<i>jan</i>	<i>fév</i>	
$M'$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y$	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
$c$	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Si nous appliquons cette formule à  $M' = 12$  nous aurions un mois de février de 30 jours. Cela est sans importance car nous n'aurons jamais à l'utiliser sur une période supérieure à une année. Comme février est entièrement contenu dans ce "mois" de 30 jours puisqu'il a 28 ou 29 jours, la formule est valable, que l'année soit bissextile ou non (cette remarque deviendra plus claire après la lecture du § 6.2.

*Comment en déduit-on la formule citée dans l'introduction ?*

Dans cette formule  $J = \lfloor 30,6(M+1) \rfloor - 122$ ,  $M = m$  si  $m \geq 3$  et  $M = m + 12$  si  $m < 3$ , donc  $M' = M - 3$ .

D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} J &= \lfloor (153(M-3) + 2)/5 \rfloor = \lfloor (153(M+1) - 4 \times 153 + 2)/5 \rfloor \\ &= \lfloor (153(M+1) - 610)/5 \rfloor \\ &= \lfloor 30,6(M+1) \rfloor - 122. \end{aligned}$$

Il n'y a aucune raison a priori pour que la suite des longueurs des mois soit le code d'une droite discrète, étant donné les modifications successives subies par le calendrier. Le fait de pouvoir les décrire par une telle formule est-il donc un heureux accident de l'Histoire, ou serait-il tout de même dû au souci des réformateurs du calendrier de répartir les jours de l'année le plus uniformément possible sur les différents mois ?

### 5.2. La suite des années dans le calendrier julien

La suite des longueurs des années de ce calendrier a une période fondamentale de 4 ans. Si le 1<sup>er</sup> mars est pris origine des mois de l'année et l'année 0 pour origine des années, les longueurs des années sont

$$365 \ 365 \ 365 \ 366$$

(comme l'origine des années est fixée au 1<sup>er</sup> mars, le jour bissextile de l'année 0 est en fait compté dans l'année -1).

Une application de l'algorithme de reconnaissance à cette suite montre qu'elle est le code de

$$y = \lfloor 1461x/4 \rfloor.$$

Cette formule donne le rang du 1<sup>er</sup> mars de l'année  $x$ , le 1<sup>er</sup> mars 0 ayant le rang 0. Elle est valable également pour le calendrier grégorien à condition de rester à l'intérieur d'un siècle. Pour nous, un tel siècle commencera le 1<sup>er</sup> mars d'une année dont le millésime est divisible par 100.

### 5.3. La longueur des siècles du calendrier grégorien

La suite des longueurs des siècles de ce calendrier a une période fondamentale de 4 siècles. L'origine d'un tel cycle sera fixée au 1<sup>er</sup> mars d'une année dont le millésime est divisible par 400. La suite des longueurs des siècles à l'intérieur d'un cycle est alors

$$36524 \ 36524 \ 36524 \ 36525.$$

Cette suite est le code de la forme quasi-affine

$$y = \lfloor 146097x/4 \rfloor.$$

Cette formule donne le rang du 1<sup>er</sup> mars de l'année 0 du siècle  $x$ , le rang du 1<sup>er</sup> mars 0 étant 0.

#### 5.4. La suite des années abondantes du calendrier musulman

Le calendrier musulman est un calendrier lunaire comportant des années (communes) de 354 jours, et des années (abondantes) de 355 jours, et ayant une périodicité de 30 ans. L'origine d'un tel cycle sera fixé au 1/1 d'une année de l'Hégire divisible par 30. Les années abondantes sont réparties dans le cycle de la manière suivante :

Année : 2 5 7 10 13 16 18 21 24 26 29 (32)  
Code : 3 2 3 3 3 2 3 3 2 3 3

Pour que la formule obtenue tienne compte de la périodicité de 30 ans, j'utiliserai deux périodes. Analysons le code de cette suite de nombres :

Ligne $n$	Code																				Op.	$g_n$	$p_n$		
1	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3			
2	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1		2
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2		
4				4				3				4				4				3			3	2	
5				1				0				1				1				0			1		3
6				0				1				0				0				1			2		
7																3							3	2	

Ligne $n$	$a_n$	$b_n$	$r_n$	Observations	$g_n$	$p_n$	Équation
7	3	1	0		2		$y = 3x$
6	1	3	1	$r_6 = a_6 - 1 - r_7 - g_7 a_6 \bmod b_6$			$y = \lfloor (x+1)/3 \rfloor$
5	2	3	1	$r_5 = b_5 - 1 - r_6 \bmod b_5$		3	$y = \lfloor (2x+1)/3 \rfloor$
4	11	3	1	$a_4 = a_5 + p_5 b_5, b_4 = b_5$	2		$y = \lfloor (11x+1)/3 \rfloor$
3	3	11	6	$r_3 = a_3 - 1 - r_4 - g_4 a_3 \bmod b_3$			$y = \lfloor (3x+6)/11 \rfloor$
2	8	11	4	$r_2 = b_2 - 1 - r_3 \bmod b_2$		2	$y = \lfloor (8x+4)/11 \rfloor$
1	30	11	4	$a_1 = a_2 + p_2 b_2, b_1 = b_2$			$y = \lfloor (30x+4)/11 \rfloor$

L'équation obtenue est celle de la droite discrète *passant par l'origine* et ayant pour code le code donné. Pour obtenir le rang des années abondantes, il faut encore ajouter l'ordonnée à l'origine 2 (ainsi on aura  $y(0) = 2$ ) :

$$y = \lfloor (30x+4)/11 \rfloor + 2 = \lfloor (30x+26)/11 \rfloor.$$

## VÉRIFICATION

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	2	5	7	10	13	16	18	21	24	26	29
$c$	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	

Si l'analyse avait porté sur la suite des longueurs des années abondantes au lieu du code de la suite de leurs rangs, le résultat aurait été le suivant :

Ligne $n$	Code											Op.	$g_n$	$p_n$	
-1	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...			
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	...	1		354
1				3			2		3			...	3	3	

La ligne 1 de ce tableau est le code de la suite des rangs des années abondantes. (Ici le premier palier est complet. Mais comme nous savons déjà que la ligne 1 est le code d'une droite discrète nous profiterons des calculs faits précédemment en négligeant ce palier, cependant nous en tiendrons compte dans  $g$ ). Pour déterminer les caractéristiques de la nouvelle droite, nous pouvons donc partir des caractéristiques de la droite de la ligne 1 :

Ligne $n$	$a_n$	$b_n$	$r_n$	Observations	$g_n$	$p_n$	Équation
1	30	11	4		3		$y = \lfloor (30x + 4)/11 \rfloor$
0	11	30	3	$r_0 = a_0 - 1 - r_1 - g_1 a_0 \bmod b_0$		354	$y = \lfloor (11x + 3)/30 \rfloor$
-1	10631	30	3	$r_{-1} = a_0 + p_0 b_0, b_{-1} = b_0$			$y = \lfloor (10631x + 3)/30 \rfloor$

Étant donné l'année  $a$  de l'Hégire et le rang  $j$  du jour dans l'année, (toutes les numérotations étant supposées partir de 0), le rang du jour dans le cycle sera donné par

$$n = \lfloor (10631a + 3)/30 \rfloor + j.$$

Dans la vérification qui suit  $j = 0$  (1<sup>er</sup> jour de l'année) :

$a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$n$	0	354	708	1063	1417	1771	2126	2480	2835	3189	3543	3898	...
$c$	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...	...

### 5.5. La suite des longueurs des mois de l'année musulmane abondante

Les longueurs des mois d'une année abondante du calendrier musulman sont alternativement 30 et 29 jours sauf pour le 12<sup>ième</sup> mois qui a 30 jours :

Ligne $n$	Code												Op.	$g_n$	$p_n$
1	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30			
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1		29
3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	2	2		
4			2	2		2		2		3		3	2		
5			0	0		0		0		1		1		2	
6			5									3	0		

C'est donc le code d'une droite discrète. Déterminons ses caractéristiques.

Ligne $n$	$a_n$	$b_n$	$r_n$	Observations	$g_n$	$p_n$	Équation
6	5	1	0		0		$y = 5x$
5	1	5	0	$r_5 = a_5 - 1 - r_6 - g_6 a_5 \bmod b_5$		2	$y = \lfloor x/5 \rfloor$
4	11	5	0	$b_4 = b_5, a_4 = a_5 + p_5 b_4$	2		$y = \lfloor 11x/5 \rfloor$
3	5	11	5	$r_3 = a_3 - 1 - r_4 - g_4 a_3 \bmod b_3$			$y = \lfloor (5x + 5)/11 \rfloor$
2	6	11	5	$r_2 = b_2 - 1 - r_3 \bmod b_2$		29	$y = \lfloor (6x + 5)/11 \rfloor$
1	325	11	5	$b_1 = b_2, a_1 = a_2 + p_2 b_1$			$y = \lfloor (325x + 5)/11 \rfloor$

Avec des numérotations à partir de 0, le rang  $n$  d'un jour dans l'année s'obtient à partir du rang  $m$  du mois dans l'année et du rang  $j$  du jour dans le mois par la formule

$$n = \lfloor (325m + 5)/11 \rfloor + j$$

que l'année soit abondante ou non. (Si l'analyse avait porté sur la suite des longueurs des mois d'une année commune, le résultat aurait été  $y = \lfloor (59x + 1)/2 \rfloor + j$ , le 12<sup>ième</sup> mois aurait alors 29 jours. Cette dernière formule ne s'appliquerait donc pas aux années abondantes).

COMMENTAIRES. — D.A. Hatcher donne dans [5] la formule suivante

$$y = \lfloor (59.2x + 1.02)/2 \rfloor + j$$

les coefficients étant déterminés empiriquement. En multipliant les coefficients de cette formule par 5.5, nous trouvons bien le dénominateur  $a = 11$ , mais  $b = 325.6$  et  $r = 5.61$ . En fait dans un calcul en nombres réels, le reste adéquat n'est pas unique et peut être choisi dans un intervalle, tandis que l'algorithme de reconnaissance fournit des entiers  $a$  et  $b$  les plus petits possibles et un reste  $r$  unique.

### 5.6. La suite des années embolismiques du calendrier judaïque

Le calendrier judaïque est basé sur le cycle de *Méton* (période de 19 années solaires correspondant, avec une assez bonne approximation, à 235 lunaisons). Un cycle de *Méton* est formé d'une suite d'années de 12 mois (années communes) ou 13 mois (années embolismiques). Les années embolismiques correspondent aux rangs suivants dans le cycle

$$0 \ 3 \ 6 \ 8 \ 11 \ 14 \ 17 \ (19)$$

Ce qui nous donne le code 3 3 2 3 3 3 2

(le dernier 2 vient du fait que 19 est congru à 0 modulo 19 et doit donc être embolismique).

Analysons ce code en prenant deux périodes :

Ligne $n$	Code														Op.	$g_n$	$p_n$
1	3	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	3	3	2			
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1		2
3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	2		
4				4			3			4			3	3			
4				1			0			1			1		3		
5							2						3	1			

Ce qui nous donne les caractéristiques :

Ligne $n$	$a_n$	$b_n$	$r_n$	Observations	$g_n$	$p_n$	Équation
6	2	1	0		1		$y = 2x$
5	1	2	1	$r_5 = a_5 - 1 - r_6 - g_6 a_5 \pmod{b_5}$		3	$y = \lfloor (x + 1)/2 \rfloor$
4	7	2	1	$b_4 = b_5, a_4 = a_5 + p_5 b_4$	3		$y = \lfloor (7x + 1)/2 \rfloor$
3	2	7	1	$r_3 = a_3 - 1 - r_4 - g_4 a_3 \pmod{b_3}$			$y = \lfloor (2x + 1)/7 \rfloor$
2	5	7	5	$r_2 = b_2 - 1 - r_3 \pmod{b_2}$		2	$y = \lfloor (5x + 5)/7 \rfloor$
1	19	7	5	$b_1 = b_2, a_1 = a_2 + p_2 b_1$			$y = \lfloor (19x + 5)/7 \rfloor$

En partant de la suite des longueurs des années exprimées en mois on obtient

Ligne $n$	Code																		Op.	$g_n$	$p_n$		
-1	13	12	12	13	12	12	13	12	13	12	12	13	12	12	13	12	12	13	12	13			
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1		12
1	3			3			2			3			3			3			2		3	1	

La ligne 1 est le code de la suite des rangs des années embolismiques.

En continuant notre analyse nous trouvons pour

- la ligne 0 :  $y = \lfloor (7x + 13)/19 \rfloor$
- la ligne -1 :  $y = \lfloor (235x + 13)/19 \rfloor$ .

Toutes les numérotations partant de 0, on obtient ainsi le rang  $n$  du mois dans le cycle à partir du rang  $a$  de l'année et du rang  $m$  du mois dans l'année par

$$n = \lfloor (235a + 13)/19 \rfloor + m.$$

REMARQUE. — Le tableau précédent montre que les années embolismiques correspondent aux fins de palier de la ligne 0. L'année  $x$  est donc embolismique lorsque le code de  $\lfloor (7x + 13)/19 \rfloor$  est égal à 1, donc lorsque le reste de la division euclidienne de  $7x + 13$  par 19 est supérieur à  $19 - 7 = 12$ .



### 5.7. La suite des longueurs des mois du calendrier judaïque

Suite aux règles fixant le premier jour de l'année, l'année embolismique peut avoir 383 (année déficiente), 384 (année régulière) ou 385 jours (année abondante), tandis que l'année commune peut avoir 353 (année déficiente), 354 (année régulière) ou 355 jours (année abondante). La figure 3 donne la répartition de ces jours dans les différents mois selon l'espèce de l'année.

Nom du mois	Années					
	Communes			Embolismiques		
	D	R	A	D	R	A
Tisri	30	30	30	30	30	30
Heswan	29	29	30	29	29	30
Kislev	29	30	30	29	30	30
Tebeth	29	29	29	29	29	29
Schebat	30	30	30	30	30	30
Adar	29	29	29	30	30	30
Veadar	0	0	0	29	29	29
Nissan	30	30	30	30	30	30
Iyar	29	29	29	29	29	29
Sivan	30	30	30	30	30	30
Tamouz	29	29	29	29	29	29
Ab	30	30	30	30	30	30
Elloul	29	29	29	29	29	29
	353	354	355	383	384	385

FIG. 3: Longueurs des mois

Considérons pour commencer les années régulières. On voit tout d'abord qu'il est préférable de numérotter les mois à partir de Nissan afin de rejeter en fin de cycle le mois supplémentaire : ainsi, une même formule conviendra pour l'année commune et l'année embolismique. La succession des longueurs des mois de l'année embolismique régulière coïncide alors avec la succession des longueurs des mois de l'année musulmane abondante si on ne compte pas le mois supplémentaire. Mais comme celui-ci a 29 jours, les formules trouvées pour l'année musulmane s'appliquent encore (cette remarque deviendra plus claire après la lecture du § 6.2.).

Le rang  $n$  du jour  $j$  du mois  $m$  dans l'année (le rang de Nissan étant supposé égal à 0) est donc :

$$n = \lfloor (325m + 5)/11 \rfloor + j.$$

Pour les années déficientes, il est préférable de numérotter les mois à partir de Tebeth et, pour les années abondantes, à partir de Kislev ; de cette manière la formule sera valable pour l'année entière. Une application de l'algorithme de reconnaissance donnera les formules suivantes pour

le rang du jour  $j$  du mois  $m$  (le 1<sup>er</sup> Tebeth, resp. Kislev, ayant le rang 0) :

Année déficiente commune :	$n = \lfloor (324m + 5)/11 \rfloor + j$	( $m = 0$ : <i>Tebeth</i> )
Année abondante commune :	$n = \lfloor (325m + 5)/11 \rfloor + j$	( $m = 0$ : <i>Kislev</i> )
Année déficiente embolismique :	$n = \lfloor (325m + 4)/11 \rfloor + j$	( $m = 0$ : <i>Tebeth</i> )
Année abondante embolismique :	$n = \lfloor (266m + 7)/9 \rfloor + j$	( $m = 0$ : <i>Kislev</i> ).

### 5.8. Comput ecclésiastique

Certains éléments du comput ecclésiastique peuvent être déterminés de manière analogue en appliquant l'algorithme de reconnaissance.

#### 5.8.1. L'Épacte

Les fêtes mobiles (Pâques, Ascension, Pentecôte ...) dans les calendriers grégorien et julien sont déterminées à partir de la date de Pâques. Cette dernière est calculée en appliquant la règle suivante :

*“Pâques est le dimanche qui suit le 14<sup>ième</sup> jour de la lune qui atteint cet âge au 21 mars ou immédiatement après”.*

Le calcul de la date de Pâques fait intervenir une lune théorique dont l'âge au 1<sup>er</sup> janvier diminué de 1 est appelé l'Épacte. Dans le calendrier julien l'Épacte est liée au nombre d'or  $N$  par

$$E_j = (11N - 3) \bmod 30 = (11(A \bmod 19) + 8) \bmod 30$$

(11 est l'excédent de l'année solaire sur l'année lunaire ; de plus le mois lunaire se terminant en janvier a 30 jours par convention ).

Le nombre d'or  $N$  est le rang de l'année  $A$  dans le cycle de Méton courant (par définition on compte à partir de 1 et le nombre d'or de l'année 1 est 2) :

$$N = (A \bmod 19) + 1.$$

EXEMPLE. — L'Épacte julienne de 1582 est 3.

Dans le calendrier grégorien cette Épacte est corrigée par les règles suivantes :

- chaque année séculaire non bissextile on retranche 1 à l'Épacte (Équation solaire : répercussion sur l'Épacte de la suppression des jours bissextes séculaires).
- Sur un cycle de 25 siècles, on ajoute 1 unité à l'Épacte les siècles suivants 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Le début du cycle est fixé au 1<sup>er</sup> janvier 1800 (Équation lunaire : c'est une correction apportée au cycle de MÉTON).

ÉQUATION SOLAIRE. — Pour chaque année séculaire, le nombre de jours retranchés depuis l'année séculaire 1600 est

$$1 \ 2 \ 3 \ 3$$

$$\text{D'où le code} \quad 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

Il est facile de voir que cette suite est le code de la droite discrète

$$y = \lfloor (3x + 3)/4 \rfloor.$$

L'Équation Solaire est donc  $e_S = \lfloor (3(s - 16) + 3)/4 \rfloor$ , c'est-à-dire

$$e_S = \lfloor (3s - 45)/4 \rfloor$$

avec  $s = \lfloor A/100 \rfloor$ .

ÉQUATION LUNAIRE. — Le nombre de jours ajoutés chaque année séculaire depuis l'année 1800 (début du cycle) est

1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8 8 8 8 9

D'où le code 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1

En utilisant l'algorithme de reconnaissance, on montre que ce code est le code de la droite discrète

$$y = \lfloor (8x + 7)/25 \rfloor$$

ce qui fait que l'Équation Lunaire est  $e_L = \lfloor (8(s - 18) + 7)/25 \rfloor + 1$ , ou encore

$$e_L = \lfloor (8s - 112)/25 \rfloor$$

ÉPACTE. — En 1582 l'Épacte julienne était 3. Lors de la réforme du calendrier, l'année a été raccourcie de 10 jours, et on a ajouté 3 jours à l'Épacte, pour corriger la dérive du cycle de MÉTON par rapport à la lune moyenne. L'Épacte grégorienne est donc  $E_g = (E_j - 10 + 3 - e_S + e_L) \bmod 30$ , c'est-à-dire

$$E_g = (E_j + 23 - e_S + e_L) \bmod 30$$

ou encore

$$E_g = (1 + 11(A \bmod 19) - \lfloor (3s - 45)/4 \rfloor + \lfloor (8s - 112)/25 \rfloor) \bmod 30$$

L'Épacte est calculée modulo 30, car la lunaison théorique qui se termine en janvier a 30 jours par convention, ainsi que celle qui se termine en mars.

RETARD JULIEN. — Le retard julien est le nombre de jours dont le calendrier julien retarde sur le calendrier grégorien. Il est donné par

$$r_j = e_S + 10 = \lfloor (3s - 5)/4 \rfloor.$$

### 5.8.2. La Lettre Dominicale

Le calcul de la date de Pâques nécessite d'autre part la connaissance des jours de la semaine. Pour cela on fait correspondre à chaque jour de l'année une des lettres **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, en commençant par **A** au 1<sup>er</sup> janvier et en recommençant chaque fois que la série est épuisée. Les jours affectés de la même lettre ont alors la même position dans la semaine. La lettre correspondant au dimanche est la lettre dominicale. Pour les années bissextiles, la lettre du jour bissext<sup>e</sup> <sup>4</sup> est la même que celle du jour précédent, mais on change alors de lettre dominicale. Pour cette raison, les années bissextiles ont deux lettres dominicales, l'une valable avant le jour bissext<sup>e</sup>, l'autre à partir de celui-ci. Dans le calendrier julien le calcul de cette lettre peut se faire de la manière suivante (dans ce calcul la lettre dominicale désignera toujours celle qui est valable pour les 10 derniers mois de l'année) :

<sup>4</sup>À l'origine, le jour bissext<sup>e</sup> s'intercalait entre le 23 et le 24 février, de sorte que l'année bissextile comportait un second "sixième jour avant les Calendes de mars" – c'est l'origine des termes bissext<sup>e</sup> et bissextile.

Donnons à **A** la valeur 0, à **B** la valeur 1 et ainsi de suite. Comme  $365 \bmod 7 = 1$ , pour une année commune la lettre dominicale s'obtient à partir de celle de l'année précédente par

$$L' = (L - 1) \bmod 7$$

pour une année bissextile par

$$L' = (L - 2) \bmod 7$$

Soit  $L_0$  la lettre dominicale de l'année 0. On obtient alors la lettre dominicale des années 0, 1, 2, ... en retranchant modulo 7 les quantités suivantes de  $L_0$  :

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 10 \ \dots$$

D'où le code

$$1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ \dots$$

On vérifie que c'est le code de  $y = \lfloor 5x/4 \rfloor$ . Dans le calendrier julien la lettre dominicale de l'année  $A$  est donc

$$L_j = (L_0 - \lfloor 5A/4 \rfloor) \bmod 7.$$

En appliquant cette formule à l'année bissextile -4712 qui a commencé un lundi (première lettre dominicale **G**, deuxième lettre dominicale **F**), on obtient

$$5 \equiv (L_0 + 3) \pmod{7}, \text{ d'où } L_0 = 2.$$

On a donc

$$L_j = (2 - \lfloor 5A/4 \rfloor) \bmod 7.$$

Soit  $\alpha_j$  le jour de la semaine correspondant au Jour de l'An du calendrier julien, et  $\alpha_g$  celui qui correspond au Jour de l'An du calendrier grégorien. On a  $\alpha_j = (\alpha_g + r_j) \bmod 7$ . Mais  $L_j = 6 - \alpha_j$  et  $L_g = 6 - \alpha_g$ . Il en résulte que  $L_g = (L_j + r_j) \bmod 7$  et par conséquent

$$\begin{aligned} L_g &= (2 - \lfloor 5A/4 \rfloor + \lfloor (3s - 45)/4 \rfloor + 10) \bmod 7 \\ &= (\lfloor (3s + 3)/4 \rfloor - \lfloor 5A/4 \rfloor) \bmod 7, \end{aligned}$$

et finalement, en posant  $A = 100s + a$

$$L_g = (\lfloor (7s + 3)/4 \rfloor - \lfloor 5a/4 \rfloor) \bmod 7$$

### 5.8.3. Date de Pâques (cf. [2] et [9])

La date de Pâques se détermine par l'algorithme

$$D = 45 - E_g + (E_g + L_g + 2) \bmod 7$$

avec :

si $E_g = 25$	et $N > 11$	alors $E_g := 26$
si $E_g = 24$		alors $E_g := 25$
si $E_g \geq 23$		alors $E_g := E_g - 30$ .

$D$  étant le nombre de jours séparant la date de Pâques de la veille du 1<sup>er</sup> mars. Si  $D \leq 31$ , Pâques est le  $D$  mars, sinon le  $(D - 30)$  avril.

COMMENTAIRES. — Les deux premières conditions sur l'Épacte ont été introduites afin d'éviter que la date de Pâques ne tombe en dehors des limites astronomiquement possibles. Elles ont pour effet d'avancer alors la date de Pâques d'une semaine lorsque la nouvelle lune pascale est un dimanche.

L'âge de la lune la veille du 1<sup>er</sup> mars est le même que la veille du 1<sup>er</sup> janvier, c'est-à-dire l'Épacte. Le 21 mars il est donc :  $E_g + 21 - 30 = E_g - 9$ . C'est la pleine lune pascale si  $E_g - 9 < 14$  ou encore si  $E_g < 23$ . La date de la pleine lune pascale est alors  $P = 21 - (E_g - 9) + 14 = 44 - E_g$ . Si  $E_g \geq 23$ ,  $P = 21 + 14 + 30 - (E_g - 9) = 44 - (E_g - 30)$  (on remplace dans la formule précédente  $E_g$  par  $(E_g - 30)$ ). Le jour de la semaine de la veille du 1<sup>er</sup> mars est  $(6 - L_g + 58) \bmod 7 = (1 - L_g) \bmod 7$ . Le jour de la semaine correspondant au lendemain de la pleine lune pascale est ainsi  $(1 - L_g + 45 - E_g) \bmod 7 = (-3 - L_g - E_g) \bmod 7$ . Le dimanche suivant est donc  $D = 45 - E_g + [6 - (-3 - L_g - E_g)] \bmod 7$ , soit

$$D = 45 - E_g + (E_g + L_g + 2) \bmod 7.$$

## 6. FORMES QUASI-AFFINES ET BASES DE NUMÉRATION QUASI-AFFINES

Dans le paragraphe précédent, de nombreux exemples mettant en jeu des formes quasi-affines sont apparus. Dans ce paragraphe, ces formes seront étudiées de façon plus précise. En particulier je définirai la décomposition d'un entier selon une forme quasi-affine, qui généralise la division euclidienne. Je parlerai ensuite de la notion de base quasi-affine, une généralisation de la notion de base de numération, qui sera appliquée à l'étude de la concordance calendriers.

### 6.1. Quotient d'un entier par une forme quasi-affine

La division euclidienne par un entier  $a$  partitionne  $\mathbb{Z}$  en intervalles égaux de longueur  $a$  : pour chaque entier  $n$ , il existe un unique entier  $x$  tel que

$$ax \leq n < a(x + 1).$$

Le présent paragraphe a pour but de réaliser des partitions irrégulières.

Soit  $f(x) = \lfloor (ax + r)/b \rfloor$  une forme quasi-affine telle que  $a \geq b > 0$ . La forme  $f$  est injective et tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , et vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . Pour chaque entier  $n$  il existe donc un unique entier  $x$  tel que

$$f(x) \leq n < f(x + 1).$$

DÉFINITION 8. Soit  $n$  un entier et  $f$  une forme quasi-affine telle que  $a \geq b$ . J'appellerai quotient de  $n$  par  $f$  l'unique entier  $x$  tel que

$$f(x) \leq n < f(x + 1).$$

L'entier  $R = n - f(x)$  sera appelé le reste.

PROPOSITION 3. Soit  $f(x) = \lfloor (ax + r)/b \rfloor$  une forme quasi-affine telle que  $a \geq b > 0$ . La fonction  $f^{-1}$  qui associe à  $y$  le quotient de  $y$  par  $f$ , est la forme quasi-affine définie par

$$f^{-1}(y) = \lfloor (by + b - 1 - r)/a \rfloor.$$

REMARQUE. — Le reste  $R$  est positif et strictement inférieur à la longueur du palier de  $f^{-1}$  contenant  $n$ .

DÉMONSTRATION. — D'après la PROPOSITION 1. 3) la droite des débuts de paliers de la droite discrète  $D(b, a, a, b - 1 - r)$  est transformée par la symétrie  $x' = y, y' = x$  en la droite discrète  $D(a, b, b, r)$ . La droite  $D(b, a, a, b - 1 - r)$  est fonctionnelle et correspond à la forme quasi-affine  $\lfloor (by + b - 1 - r)/a \rfloor$ . De plus, la condition  $f(x) \leq y < f(x+1)$  équivaut à dire que  $(y, x)$  appartient au palier d'ordonnée  $x$  de cette droite, et donc que  $x = f^{-1}(y) = \lfloor (by + b - 1 - r)/a \rfloor$ .  $\square$

D'après la définition de  $f^{-1}$  on a

PROPOSITION 4.  $f^{-1}$  est un inverse à gauche de  $f$  :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f^{-1} \circ f(x) = x.$$

EXEMPLES

1. si  $f(x) = ax$  alors  $f^{-1}(y) = \lfloor y/a \rfloor$  :  $f^{-1}(y)$  est le quotient de la division euclidienne de  $y$  par  $a$ .
2. si  $f(x) = x - r$  alors  $f^{-1}(y) = y + r$ .
3. si  $f(x) = \lfloor ax/b \rfloor$  alors  $f^{-1}(y) = \lfloor by + b - 1 \rfloor / a$ .

## 6.2. Bases quasi-affines

En base  $a \geq 2$ , les chiffres  $q_i$  du développement d'un entier  $n$  sont définis de manière unique par les deux propriétés suivantes

1.  $n = \sum_{i=0}^k q_i a^i$  ;
2. Pour tout  $i \geq 0$ ,  $q_i a^i \leq n - \sum_{j=i+1}^k q_j a^j < (q_i + 1) a^i$ .

Ce paragraphe a pour but la généralisation de ce résultat.

DÉFINITION 9. J'appellerai base de numération quasi-affine d'ordre  $k$  un  $(k+1)$ -uple de formes quasi-affines  $(f_i)_{i=0\dots k}$ , avec  $f_i = (a_i, b_i, r_i)$  vérifiant

1. Pour  $0 \leq i \leq k$ ,  $b_i > 0$ .
2.  $a_0 = 1, b_0 = 1$ .
3. Pour  $0 \leq i \leq k - 1$ ,  $\lfloor a_{i+1}/b_{i+1} \rfloor > \lfloor a_i/b_i \rfloor$ .

Soit  $(f_i)_{i=0\dots k}$  une base quasi-affine d'ordre  $k$  et  $(q_i)_{i=0\dots k}$  une suite finie d'entiers. On peut leur associer l'entier

$$n = \sum_{i=0}^k f_i(q_i).$$

La proposition suivante montre que tout entier  $n$  peut être obtenu ainsi, et, donne un procédé canonique pour associer à  $n$  une suite d'entiers  $(q_i)_{i=0\dots k}$  telle que  $n = \sum_{i=0}^k f_i(q_i)$ .

PROPOSITION 5. Si  $n$  est un entier et  $(f_i)_{i=0\dots k}$  une base quasi-affine, il existe une unique suite d'entiers  $(q_i)_{i=0\dots k}$  vérifiant les assertions suivantes

1.  $n = \sum_{i=0}^k f_i(q_i)$  ;
2. Pour  $i = 0$  à  $k$ ,  $f_i(q_i) \leq n - \sum_{j=i+1}^k f_j(q_j) < f_i(q_i + 1)$ .

La suite  $q_i$  est définie récursivement par les formules

1.  $R_k = n$  ;
2. Pour  $i = 0$  à  $k$ ,  $q_i = f_i^{-1}(R_i)$  et  $R_{i-1} = R_i - f_i(q_i)$ .

DÉMONSTRATION. — L'assertion 2) implique que  $q_i$  est le quotient de  $R_i = n - \sum_{j=i+1}^k f_j(q_j)$  par  $f_i$ . La suite  $q_i$  est donc obtenue en itérant la division d'un entier par une forme quasi-affine :

$$\begin{array}{ll} R_k & = n & q_k & = f_k^{-1}(R_k) \\ R_{k-1} & = R_k - f_k(q_k) & q_{k-1} & = f_{k-1}^{-1}(R_{k-1}) \\ \dots & & \dots & \\ R_1 & = R_2 - f_2(q_2) & q_1 & = f_1^{-1}(R_1) \\ R_0 & = R_1 - f_1(q_1) & q_0 & = f_0^{-1}(R_0) = R_0 - r \end{array}$$

À chaque étape, les entiers  $q_i$  et  $R_i$  existent et sont uniques. De plus

$$R_0 = n - f_k(q_k) - f_{k-1}(q_{k-1}) - \dots - f_1(q_1)$$

et  $f_0(q_0) = R_0 - r + r = R_0$ . Il en résulte que

$$n = f_k(q_k) + f_{k-1}(q_{k-1}) + \dots + f_1(q_1) + f_0(q_0). \quad \square$$

DÉFINITION 10. Si  $n$  est un entier, on appellera développement de  $n$  dans la base quasi-affine  $(f_i)_{i=0\dots k}$  l'unique suite finie  $(q_i)_{i=0\dots k}$  vérifiant les assertions 1) et 2) de la PROPOSITION 5.

EXEMPLES

1. si  $f_i(x) = b^i x$ , alors  $f_i^{-1}(x) = \lfloor x/b^i \rfloor$  et on retrouve le développement usuel d'un entier en base  $b$ .
2. si  $n_i$  est une suite d'entiers positifs, et si  $f_i(x) = n_0 n_1 \dots n_i x$  alors  $f_i^{-1}(x) = \lfloor x/n_0 n_1 \dots n_i \rfloor$  et on retrouve les développements dans des bases généralisées.

COMMENTAIRES

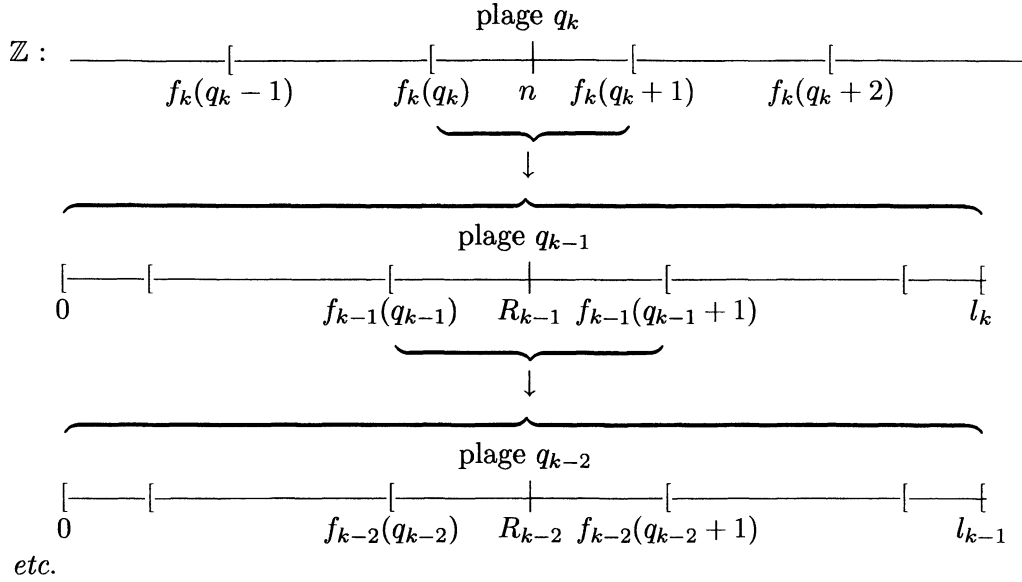
1. La forme  $f_k^{-1}$  partitionne  $\mathbb{Z}$  en plages d'ordre  $k$  correspondant aux paliers de la droite discrète associée. Ces plages sont indexées par les ordonnées des paliers. L'entier  $q_k$  est l'indice de la plage dans laquelle se trouve l'entier  $n$ . L'entier  $R_k$  indique la position de  $n$  par rapport au début de cette plage. Il est donc compris entre 0 et la longueur  $l_k = f_k(q_k + 1) - f_k(q_k)$  de la plage, c'est-à-dire selon les cas  $l_k = \lfloor a_k/b_k \rfloor$  ou  $l_k = \lfloor a_k/b_k \rfloor + 1$  (c'est le code de  $f_k$  en  $q_k$ ).
2. La forme  $f_{k-1}^{-1}$  partitionne l'intervalle  $[0, l_k[ \cap \mathbb{Z}$  contenant  $R_k$  en plages d'ordre  $k-1$ , correspondant aux paliers de la droite discrète associée. Ces plages sont indexées par les ordonnées de ces paliers. L'entier  $q_{k-1}$  est l'indice de la plage d'ordre  $k-1$  dans laquelle se trouve  $R_k$  :

$$q_{k-1} \in [f_{k-1}^{-1}(0), f_{k-1}^{-1}(l_k)[.$$

L'amplitude de l'intervalle que  $q_{k-1}$  est susceptible de parcourir peut varier d'une unité selon les valeurs de  $q_k$ . Les longueurs des plages d'ordre  $k-1$  sont encore égales aux longueurs des paliers correspondants de  $f_{k-1}^{-1}$ , sauf pour la première qui a pour longueur  $f_{k-1}(f_{k-1}^{-1}(0) + 1)$ , et pour la dernière qui a pour longueur  $l_k - f_{k-1}(f_{k-1}^{-1}(l_k) - 1)$ . C'est donc essentiellement la longueur du palier d'ordre  $k$  qui détermine cette dernière. La première peut être contrôlée par l'entier  $r_{k-1}$  de la forme  $f_{k-1}$ .

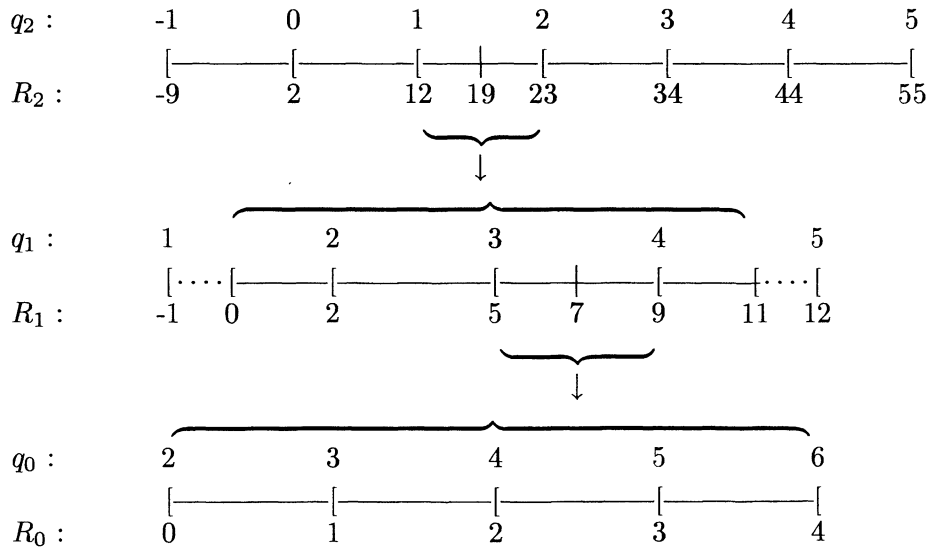
On retrouve une situation analogue pour les autres niveaux.

3. Schématiquement, on peut représenter un développement dans une base quasi-affine de la manière suivante



Les formes  $f_k, \dots, f_0$  définissent donc des graduations de plus en plus fines sur  $\mathbb{Z}$ . La graduation associée à  $f_k$  est globale. Les autres sont locales, c'est-à-dire que la graduation associée à  $f_i$  est restreinte à l'intervalle entre deux marques de la graduation associée à  $f_{i+1}$ .

EXEMPLE. — Considérons la base quasi-affine  $(f_2, f_1, f_0)$  où  $f_2 = (53, 5, 11)$ ,  $f_1 = (10, 3, -13)$ ,  $f_0 = (1, 1, -2)$ , et l'entier  $n = 19$ .



$$R_2 = 19$$

$$q_2 = \lfloor (5 \times R_2 - 7)/53 \rfloor = 1$$

$$R_1 = 19 - \lfloor (53 \times q_2 + 11)/5 \rfloor = 19 - 12 = 7 \quad q_1 = \lfloor (3 \times R_1 + 15)/10 \rfloor = 3$$

$$R_0 = 7 - \lfloor (10 \times q_1 - 13)/3 \rfloor = 7 - 5 = 2 \quad q_0 = \lfloor (1 \times R_0 + 2)/1 \rfloor = 4$$

Par conséquent l'entier 19 se décompose en

$$19 = f_2(1) + f_1(3) + f_0(4).$$



Voici le développement dans cette base de quelques autres entiers

$n$	$q_2$	$q_1$	$q_0$
12	1	1	3
13	1	1	4
14	1	2	2
15	1	2	3
16	1	2	4
17	1	3	2

$n$	$q_2$	$q_1$	$q_0$
18	1	3	3
19	1	3	4
20	1	3	5
21	1	4	2
22	1	4	3
23	2	1	3

#### REMARQUES CONCERNANT LES CHIFFRES DU DÉVELOPPEMENT

1. À chaque étape  $R_i$  est positif ou nul et inférieur à la longueur  $l_i$  du palier de la droite discrète définie par  $f_i$  contenant l'entier  $R_{i+1}$ .
2. Sauf éventuellement pour la première et la dernière plage, l'intervalle de variation du chiffre  $q_i$  est

$$[f_i^{-1}(0), f_i^{-1}(l_{i+1})[ \subset [\alpha_i, \beta_i[$$

où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont définis par

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \lfloor (b_i - 1 - r_i) / a_i \rfloor \\ \beta_i &= \lfloor (b_i \lfloor a_{i+1} / b_{i+1} \rfloor + 2b_i - 1 - r_i) / a_i \rfloor\end{aligned}$$

Ces intervalles sont donc de longueur variable. Leur longueur est majorée par

$$\lfloor b_i \lfloor a_{i+1} / b_{i+1} \rfloor / a_i \rfloor + 1.$$

3. Considérons la fonction définie par

$$g(x) = f_i^{-1}(x) + k = \lfloor (b_i x + b_i - 1 - r_i) / a_i \rfloor + k = \lfloor (b_i x + b_i - 1 - r_i + ka_i) / a_i \rfloor$$

On constate donc que  $g = f'^{-1}$  où  $f'$  est la forme quasi-affine définie par  $f'(x) = \lfloor (a_i x + r - ka_i) / b_i \rfloor$ . Ainsi, en retranchant  $ka_i$  à  $r_i$  on peut translater l'intervalle de variation des chiffres de  $k$ . Il sera fait usage de cette propriété à plusieurs reprises dans la suite.

## 7. CONCORDANCE DES CALENDRIERS

### 7.1. Le calendrier julien

Pour convertir une date d'un calendrier dans un autre, on se ramène généralement au *Jour Julien* que nous noterons  $\mathbf{J}$ , et qui est défini comme le rang du jour, compté à partir du *Lundi 1<sup>er</sup> janvier de l'an -4712 (Date julienne)*<sup>5</sup>, cette dernière date étant le jour 0. Contrairement à l'usage habituel, nous supposons que ce jour commence à 0h TU et non à 12h TU du jour précédent, afin de pouvoir faire un traitement entièrement arithmétique, c'est-à-dire ne comportant que des opérations sur des entiers.

<sup>5</sup>Rappelons que la notation utilisée ici pour les années est la notation algébrique, incluant des années négatives et une année 0.

Le problème de la concordance des calendriers est résolu si, pour chaque calendrier, on dispose de formules permettant de passer d'une date au Jour Julien et réciproquement.

Soit donc une date  $(A, m, j)$  du calendrier julien. J'adopterai ici cet ordre pour respecter l'ordre usuel de la numération de position où l'on écrit de gauche à droite les chiffres, dans l'ordre des poids décroissants. Mais dans la suite, je noterai souvent cette date  $j/m/A$ . Le calcul du Jour Julien correspondant se fait alors par

$$\begin{aligned} A' &= A & \text{et} & \quad m' = m & \quad \text{si} & \quad m \geq 3 \\ A' &= A - 1 & \text{et} & \quad m' = m + 12 & \quad \text{si} & \quad m < 3 \\ \mathbf{J} &= \lfloor (1461A' + 6884472)/4 \rfloor + \lfloor (153m' - 457)/5 \rfloor + j - 1 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= f_2(A') + f_1(m') + f_0(j) \\ \text{avec} \\ f_2 &= (1461, 4, 6884472) \\ f_1 &= (153, 5, -457) \\ f_0 &= (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Ainsi  $(A', m', j)$  est le développement de  $\mathbf{J}$  dans la base  $(f_2, f_1, f_0)$ . Inversement, de la donnée de  $\mathbf{J}$  on déduit donc d'après le § 6.2.  $(A', m', j)$  par l'algorithme de développement.

REMARQUE. — La forme  $f_0$  a pour rôle de déplacer l'origine de la numérotation des jours du mois de 0 à 1. La forme  $f_1$  découle de la formule du § 5. après un changement de numérotation des mois :

$$\lfloor (153(m' - 3) + 2)/5 \rfloor = \lfloor (153m' - 457)/5 \rfloor.$$

Au § 5., je n'avais pas tenu compte du mois de février : d'après le § 6.2., c'est sans importance pour le calcul de  $\mathbf{J}$  étant donné que les mois décrits par  $f_1$  ont tous soit 30 soit 31 jours ; février est donc entièrement contenu dans le 12<sup>ième</sup> mois décrit par  $f_1$ .

Nous avons vu au § 5., que la forme quasi-affine  $f'_2 = (1461, 4, 0)$  donnait le rang  $y$  du 1<sup>er</sup> mars de l'année  $x$

$$y = \lfloor 1461x/4 \rfloor.$$

On a donc  $f_2(x) = \mathbf{J}_0 + f'_2(x) = \lfloor (1461x + 4\mathbf{J}_0)/4 \rfloor$  où  $\mathbf{J}_0$  est le Jour Julien du 1/3/0, constante dépendant de l'origine du Jour Julien.

ÉTALONNAGE. — Dans le calendrier Julien, l'origine du Jour Julien est le 1/1/−4712 ; par conséquent, on a l'égalité

$$0 = \mathbf{J}_0 + f'_2(-4713) + f_1(13) + f_0(1) = \mathbf{J}_0 - 1721118,$$

d'où il résulte que  $\mathbf{J}_0 = 1721118$ , et  $f_2 = (1461, 4, 4 \times 1721118) = (1461, 4, 6884472)$ .

## 7.2. Le calendrier grégorien

Le Jour Julien de la date grégorienne  $(A, m, j)$  s'obtient par les formules :

si $m \geq 3$	$A'' = A$	
	$m' = m$	
si $m < 3$	$A'' = A - 1$	
	$m' = m + 12$	
$s = \lfloor A''/100 \rfloor$		(Nombre de siècles)
$A' = A'' - 100s$		(Nombre d'années dans le siècle)
$\mathbf{J} = \lfloor (146097s + 6884480)/4 \rfloor + \lfloor 1461A'/4 \rfloor + \lfloor (153m' - 457)/5 \rfloor + j - 1$		

ou encore

$\mathbf{J} = f_3(s) + f_2(A') + f_1(m') + f_0(j)$ <p>avec</p> $f_3 = (146097, 4, 6884480)$ $f_2 = (1461, 4, 0)$ $f_1 = (153, 5, -457)$ $f_0 = (1, 1, -1)$
--

Inversement, on obtient donc  $(s, A', m', j)$  à partir de  $\mathbf{J}$  par l'algorithme de développement du § 6.2.

REMARQUE. — La structure de ce calendrier se distingue de celle du calendrier julien par l'ajout d'une forme  $f_3$ , décrivant la structure des siècles. Les autres formes restent les mêmes (à une constante près : ici  $f_2$  est la forme  $f'_2$  du paragraphe précédent) étant donné qu'à l'intérieur d'un siècle la structure de ce calendrier est identique à celle du calendrier julien. Nous avons vu au § 5., que la forme  $f'_3 = (146097, 4, 0)$  donne le rang  $y$  du 1<sup>er</sup> mars de l'année 0 du siècle  $x$  par rapport au 1<sup>er</sup> mars de l'année 0

$$y = \lfloor 146097x/4 \rfloor.$$

On a donc

$$f_3(x) = \mathbf{J}_0 + f'_3(x) = \lfloor (146097x + 4\mathbf{J}_0)/4 \rfloor$$

où  $\mathbf{J}_0$  est le Jour Julien du 1/3/0 de ce calendrier, une constante à déterminer.

ÉTALONNAGE. — La date de référence du calendrier grégorien est le 15 octobre 1582 grégorien, jour de sa mise en application à Rome, date correspondant au 5 octobre 1582 julien. En calculant le Jour Julien du 15/10/1582 (date grégorienne), d'une part dans le calendrier grégorien

$$\mathbf{J}(15/10/1582) = \mathbf{J}_0 + f'_3(15) + f_2(82) + f_1(10) + f_0(15) = \mathbf{J}_0 + 578041$$

d'autre part dans le calendrier julien

$$\mathbf{J}(5/10/1582) = 2299171$$

on obtient  $\mathbf{J}_0 = 1721120$  et  $f_3 = (146097, 4, 6884480)$ .

### 7.3. Calendrier musulman

Le Jour Julien d'une date musulmane  $(A, m, j)$  s'obtient par la formule

$$\mathbf{J} = \lfloor (10631A + 58442583)/30 \rfloor + \lfloor (325m - 320)/11 \rfloor + j - 1$$

ou encore

$$\mathbf{J} = f_2(A) + f_1(m) + f_0(j)$$

avec

$$f_2 = (10631, 30, 58442583)$$

$$f_1 = (325, 11, -320)$$

$$f_0 = (1, 1, -1)$$

Inversement, à partir du Jour Julien, on retrouve la date musulmane directement par l'algorithme du § 6.2.

REMARQUE. — Au § 5., nous avons obtenu pratiquement tous les ingrédients nécessaires pour l'obtention de ces formules. Lorsqu'on numérote les mois à partir de 0, le rang  $y$  du 1<sup>er</sup> du mois  $m$  par rapport au 1/0 de la même année est

$$y = \lfloor (325m + 5)/11 \rfloor.$$

Par conséquent, avec une numérotation à partir de 1, le rang du 1/ $m$  par rapport au 1/1 est

$$y = \lfloor (325(m - 1) + 5)/11 \rfloor = \lfloor (325m - 320)/11 \rfloor.$$

Nous obtenons ainsi la forme  $f_1 = (325, 11, -320)$  donnant la structure des mois. Nous avons également montré que le rang du 1/1/ $a$  par rapport au 1/1/0 est donné par

$$y = \lfloor (10631x + 3)/30 \rfloor.$$

En notant cette forme  $f'_2$ , on a alors

$$f_2(x) = \mathbf{J}_0 + f'_2(x) = \lfloor (10631x + 30\mathbf{J}_0 + 3)/30 \rfloor$$

où  $\mathbf{J}_0$  est le Jour Julien du 1/1/0 de l'Hégire, une constante à déterminer.

ÉTALONNAGE. — La date de référence du calendrier musulman est le 16/7/622, date julienne de l'Hégire, et qui représente le 1/1/1 du calendrier musulman. En calculant le Jour Julien du 1/1/1 de l'Hégire, d'une part dans le calendrier musulman :

$$\mathbf{J}(1/1/1) = \mathbf{J}_0 + f'_2(1) + f_1(1) + f_0(1) = \mathbf{J}_0 + 354,$$

d'autre part dans le calendrier julien :

$$\mathbf{J}(16/7/622) = 1948440$$

on obtient  $\mathbf{J}_0 = 1948440 - 354 = 1948086$  et  $f_2 = (10631, 11, 58442583)$ .

#### 7.4. Le calendrier judaïque

Dans le cas du calendrier judaïque, étant donné la complexité du calcul du jour de l'an, il n'est pas possible de donner une formule unique valable en toutes circonstances. Que ce soit pour calculer le Jour Julien ou au contraire pour calculer la date, le premier travail consiste à déterminer le jour de l'an de l'année courante. L'origine du calendrier (encore appelée l'Ère de la Création) est la date julienne du *lundi 7 octobre -3760* (Jour Julien : 347998 : appliquer la formule du § 7.1.)

##### 7.4.1. Les Règles de Hillel

Les règles de Hillel constituent l'algorithme qui détermine le jour de l'an. Ces règles sont basées sur le calcul du *Moled*, c'est-à-dire l'instant de la conjonction moyenne Lune-Soleil (nouvelle lune). Chaque mois a donc un Moled, mais le plus important est le *Moled Tisri*, c'est-à-dire le premier de l'année. C'est à partir de celui-ci que se fait la détermination du début de l'année.

Avant de montrer comment se fait le calcul du Moled Tisri, indiquons quelles sont les divisions du temps (c'est-à-dire les unités) utilisées dans ce calcul. Le jour est partagé en 24 heures chacune constituée de 1080 parties ou *chalakim*. Le Moled est indiqué en donnant le jour de la semaine, l'heure et le nombre de chalakim. Les jours de la semaine sont numérotés de 1 à 7 en commençant par dimanche. Le temps utilisé est le temps du méridien de Jérusalem.

Le Moled de l'Ère de la Création a été fixé à *2j 5h 204ch* (Temps du méridien de Jérusalem). Le Moled Tisri est calculé à partir du Moled de la Création en utilisant la durée moyenne d'une lunaison : *29j 12h 793ch*, ce qui fait une longueur moyenne de *354j 8h 876ch* pour les années communes (12 mois) et de *383j 21h 589ch* pour les années embolismiques (13 mois).

Les règles de Hillel sont les suivantes (cf. [7]) :

*Le premier Tisri sera le jour du Moled Tisri sauf dans les cas suivants :*

1. Règle **Yach** : *Si le Moled Tisri est à 18h – ou après – le premier Tisri est reporté d'un jour.*
2. Règle **Adou** : *Si le jour du Moled Tisri est 1, 4 ou 6, le premier Tisri est reporté d'un jour.*
3. Règle **Yach-Adou** : *Si le Moled Tisri est à 18h – ou après – les jours 7,3 ou 5, le premier Tisri est reporté de 2 jours. C'est la conjonction des deux règles précédentes.*
4. Règle **Gathrad** : *Si l'année est commune et si le Moled Tisri est à 9h 204ch – ou après – dans le jour 3, le premier Tisri est reporté de 2 jours.*
5. Règle **Bthou-Takpath** : *Si l'année qui précède est embolismique et si le Moled Tisri est à 15h 589ch – ou après – dans le jour 2, le premier Tisri est reporté d'un jour.*

##### 7.4.2. Détermination du Moled Tisri connaissant la Date j/m/A

On commence par déterminer le nombre  $m'$  de mois écoulés le 1/1/A depuis l'Ère de la Création en utilisant le cycle de Méton :

$$\begin{aligned} m' &= \lfloor (235A + 13)/19 \rfloor - 13 = \lfloor (235A - 234)/19 \rfloor \\ &= f_M(A) \text{ avec } f_M = (235, 19, -234) \end{aligned}$$

(je retranche 13, le nombre de mois de l'année 0, étant donné qu'ici l'année de référence est l'année 1).

Connaissant  $m'$ , on peut calculer le temps écoulé au Moled Tisri de l'année  $A$  depuis le Moled Tisri de l'année 1, en jours, heures et chalakim

$$M' = m'(29j 12h 793ch)$$

puis

$$M = M' + (2j \ 5h \ 204ch)$$

Le nombre de jours de  $M$ , diminué de 1 est le rang  $J_0$  du Moled Tisri par rapport au 1/1/1, cette dernière date ayant le rang 1. Le Moled Tisri  $M_T$  est obtenu ensuite à partir de  $M$  en remplaçant le nombre de jours de  $M$  par son reste modulo 7 augmenté de 1. En appliquant les règles de Hillel à  $M_T$  on obtient la valeur du report  $R$  du 1<sup>er</sup> Tisri par rapport au Moled. Le Jour Julien du 1<sup>er</sup> Tisri est alors

$$J = 347998 + J_0 - 1 + R.$$

(On détermine si  $A$  est embolismique en calculant  $r$  le reste modulo 19 de  $7A + 13$  : si  $r \in [0, 12[$ ,  $A$  est commune, si  $r \in [12, 19[$ ,  $A$  est embolismique (voir § 5.). Pour l'année  $A - 1$  il suffit de remarquer que la quantité correspondante est  $(r - 7) \bmod 19$ , par conséquent  $A - 1$  est commune si  $r \in [7, 19[$  et  $A - 1$  est embolismique si  $r \in [0, 7[$ ).

#### 7.4.3. Détermination du Jour Julien

Pour déterminer l'espèce de l'année  $A$  (espèce 1 : 353j, 2 : 354j, 3 : 355j, 4 : 383j, 5 : 384j, 6 : 385j), on calcule le 1<sup>er</sup> Tisri de l'année  $A + 1$ .

Les formules du § 5., permettent alors de déterminer le rang  $n$  de  $j/m/A$  par rapport au 1<sup>er</sup> Tisri. Ci-dessous, je donne en fonction de l'espèce de l'année  $A$ , le mois  $m_0$  de référence pour le calcul de  $n$ , les coefficients  $a, b, r$ , la longueur de l'année  $l$  et la valeur du décalage  $d$  (rang dans l'année, du 1/ $m_0$ ) :

Espèce de A	1	2	3	4	5	6
$m_0$	4	7	3	4	8	3
$r$	5	5	5	4	5	7
$a$	324	325	325	325	325	266
$b$	11	11	11	11	11	9
$l$	353	354	355	383	384	385
$d$	88	177	60	88	207	60

Les coefficients  $a, b, r$  ont été obtenus au § 5.

Posons de plus

$$\begin{aligned} A' &= 0 \text{ et } m' = m \text{ si } m \geq m_0 \\ A' &= -1 \text{ et } m' = m + n_a \text{ si } m' < m_0, \\ (n_a \text{ étant le nombre de mois de l'année } A) \\ f_0 &= (1, 1, -1) \\ f_1 &= (a, b, r - am_0) \\ f_2 &= (l, 1, d) \end{aligned}$$

(Dans  $f_1$ , je retranche  $am_0$  à  $r$  de façon à pouvoir utiliser  $m'$  à la place de  $m' - m_0$ ). Le rang  $n$  du jour par rapport au 1<sup>er</sup> Tisri admet alors comme développement

$$n = f_2(A') + f_1(m') + f_0(j)$$

dans la base quasi-affine  $(f_0, f_1, f_2)$ . On en déduit le Jour Julien  $\mathbf{J}$  par

$$\mathbf{J} = 347998 + J_0 - 1 + R + n.$$

Les constantes de décalage  $d$  sont déterminées de façon à ce que  $n = 0$  pour  $m = 1, j = 1$  ( $d$  est le rang dans l'année du  $1/m_0/A$ ) :

$$0 = f_2(-1) + f_1(1 + n_a) + f_0(1) = -l + d + [(a(1 + n_a) + r - am_0)/b],$$

d'où la formule donnant les coefficients  $d$  :

$$d = l - [(a(1 + n_a - m_0) + r)/b].$$

#### 7.4.4. Détermination de la Date connaissant le Jour Julien $\mathbf{J}$

Soit  $M_1$  le Moled Tisri de l'année 1. Alors  $M = \mathbf{J} - 347998 + 3 - M_1$  représente le temps écoulé à la fin du jour  $\mathbf{J}$  depuis le Moled Tisri de l'année 1 (l'application des règles de Hillel montre que le 1<sup>er</sup> Tisri de cette année est le jour du Moled Tisri).

En divisant  $M$  par la longueur moyenne du mois  $l_m = 29j\ 12h\ 793ch$  on obtient le nombre  $m$  de mois écoulés depuis le  $1/1/1$ . La formule du cycle de Méton permet ensuite de déterminer l'année  $A$  :

$$\begin{aligned} A &= \lfloor (19m + 252)/235 \rfloor \\ &= f_m^{-1}(m). \end{aligned}$$

À partir de  $A$  on détermine le Moled Tisri de  $A$ , l'espèce de  $A$  et le rang  $J_0$  du  $1/1/A$  par rapport au  $1/1/1$  comme précédemment. Lorsque le jour est proche du Moled Tisri, du fait du report du 1<sup>er</sup> Tisri, la valeur de  $A$  peut être incorrecte. Lorsque  $J_0 > \mathbf{J} - 347998$  la valeur de  $A$  doit être diminuée de 1 et la valeur de  $J_0$  recalculée. En développant le rang  $J_1$  du jour dans l'année,

$$J_1 = \mathbf{J} - 347998 - J_0,$$

dans la base  $(f_0, f_1, f_2)$ , on obtient les valeurs de  $A', m'$  et  $j$  telles que

$$J_1 = f_2(A') + f_1(m') + f_0(j)$$

d'où

$$\begin{aligned} m &= m' && \text{si } A' = 0 \\ m &= m' - n_a && \text{si } A' = -1. \end{aligned}$$

REMARQUE. — Les calculs de moleds peuvent être simplifiés en convertissant ceux-ci en chalakim (à condition d'avoir à sa disposition un langage permettant de manipuler de grands entiers). Il suffit pour cela d'introduire la base quasi-affine  $((24 \times 1080, 1, 0), (1080, 1, 0), (1, 1, 0))$ , et d'utiliser l'algorithme de développement du § 6.2. On peut éventuellement encore ajouter la forme  $(7 \times 24 \times 1080, 1, 0)$  si on veut avoir des développements en semaines, jours, heures et chalakim. Cet algorithme de développement une fois programmé peut donc avoir de multiples usages.

## 8. CONCLUSION

La méthode d'obtention de formules de concordance que je viens d'exposer repose sur deux outils principaux :

1. un algorithme de reconnaissance de droites discrètes qui permet de trouver les formes quasi-affines décrivant la structure des calendriers ;
2. la notion de base quasi-affine et de développement d'un nombre entier dans une telle base, permettant de passer de la date au Jour Julien et réciproquement.

Du fait de sa généralité et de sa nature algorithmique, cette méthode offre une très grande sécurité dans l'établissement des formules de concordance. À présent, le lecteur devrait être à même de l'appliquer à d'autres calendriers qui l'intéressent. La procédure à suivre est la suivante :

- On commence par appliquer l'algorithme de reconnaissance aux différents cycles qui décrivent le calendrier pour déterminer ses formes de structure. On obtient ainsi une base quasi affine qui donne le Jour Julien à une constante près.
- On détermine la constante par étalonnage en calculant le Jour Julien d'une date dont on connaît la date correspondante dans un calendrier déjà traité, ou dont on connaît le Jour Julien.

Cette procédure peut être automatisée par un programme informatique.

Il faut tout de même garder à l'esprit qu'un calendrier n'est pas un objet mathématique, mais un objet réel qu'on essaye de modéliser. Intégrant dans sa conception un facteur humain, il peut a priori présenter une complexité telle qu'une description de sa structure par des formes quasi-affines s'avère impossible. Les calendriers connus, dans leur grande majorité, sont cependant suffisamment réguliers. Nous avons vu dans le paragraphe précédent, que même un calendrier aussi complexe que le calendrier judaïque, pouvait être traité ainsi, en ajoutant un prétraitement adéquat. Ne devrait-on pas s'émerveiller de constater que là où les notions linéaires et affines échouent, les notions quasi-linéaires et quasi-affines, qui leur sont tout de même très proches, réussissent si bien, dans la quasi-totalité des cas ?

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] P COUDERC. *Le calendrier*, V. 203. Presses Universitaires de France, 1946.
- [2] C. DUMOULIN , J.-P. PARISOT. *Astronomie pratique et informatique*. Masson, 1987.
- [3] F.K. GINZEL. *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*. J.C. Hindrichs'sche Buchhandlung, Leipzig, 1911.
- [4] D.A. HATCHER. " Simple formulae for Julian Day Numbers and Calendar Dates ". *Q. Jl R. astr. Soc.*, 25 :53-55, 1984.
- [5] D.A. HATCHER. " Generalized Equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates ". *Q. Jl R. astr. Soc.*, 26 :151-155, 1985.
- [6] J. LEFORT. " La grande Saga des Calendriers ". *L'Ouvert, Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg*, 52, . . . , 57, 64, 67, 1988-1991.
- [7] M. MAHMOUD. " Mémoire sur les calendriers judaïque et musulman ". 26, Mémo. des sav. étrang. de l'Acad. roy. de Belgique, 1855.
- [8] J.-P. PARISOT. " Additif to the paper of D.A. HATCHER : "Generalized equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates" ". *Q. Jl R. astr. Soc.*, 27 :506-507, 1986.
- [9] J.-P. PARISOT , F. SUAGHER. " Les calendriers liturgiques et les irrégularités de la date de Pâques ". *Revue de l'Association Astronomique de Franche- Comté*, 13, 1988.
- [10] J.-P. REVEILLÈS. " Les paliers des droites de Bresenham ". *Pixim 88, Hermès*, pp. 81-101, 1988.
- [11] J.-P. REVEILLÈS. " Géométrie discrète. Calculs en nombres entiers et algorithmique ". Thèse d'état, U.F.R. d'informatique, Strasbourg, 1991.
- [12] L. TARTOIS. Le calendrier. in *Encyclopédie de la Pléiade : Astronomie*, pp. 294-326. Pléiade.
- [13] A. TROESCH. " Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments ". *Theoretical Computer Science*, 115 :291-319, 1993.

Albert TROESCH

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université Louis Pasteur et C.N.R.S.

7, rue René-Descartes

F-67084 STRASBOURG CEDEX

email : troesch.@math.u-strasbg.fr