MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

THIERRY MARTIN

La valeur objective du calcul des probabilités selon Cournot

Mathématiques et sciences humaines, tome 127 (1994), p. 5-17
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1994__127__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (32e année, n° 127, *1994*, pp.5-17)

LA VALEUR OBJECTIVE DU CALCUL DES PROBABILITÉS SELON COURNOT

Thierry MARTIN[1]

RÉSUMÉ — *Dans les années 1930-1950, le débat opposant partisans de l'interprétation objectiviste et tenants de l'interprétation subjectiviste des probabilités mobilise un principe des probabilités négligeables, identifié par les auteurs comme «principe de Cournot», afin d'assurer la valeur objective du calcul des probabilités. Le but de l'article est de montrer que le principe tel qu'il est formulé par Cournot lui-même, et qu'on peut dénommer principe de l'impossibilité physique, ne se confond pas avec ce que les auteurs appelleront plus tard «principe de Cournot», puis d'en interroger le fondement et le statut, afin de mieux comprendre la façon originale dont Cournot confère au calcul des probabilités sa valeur objective.*

ABSTRACT — Objective meaning of the calculus of probabilities according to Cournot
During the years 1930-1950, the argument opposing the partisans of the objectivistic interpretation of the probabilities and the supporters of its subjectivistic interpretation implies a principle of negligible probabilities (described by the authors as the principle of Cournot) in order to emphasize the objective meaning of the probabilities theory. The article first aims to demonstrate that, in fact, the principle identified by Cournot himself and which can be described as the principle of physical impossibility doesn't merge with what the authors will later call «principle of Cournot» ; and then to question its foundation and status in order to understand better the original manner in which Cournot endows the probability theory with its objective meaning.

I. L'œuvre probabiliste de Cournot n'a pas engendré de bouleversements ni de remaniements profonds d'un point de vue strictement mathématique. L'apport de Cournot au calcul des probabilités tient davantage à sa réflexion sur ses fondements et la valeur objective du concept de probabilité. Il s'en explique dès les premières lignes de son *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*[2] publiée en 1843 : son but est de «rectifier des erreurs, lever des équivoques, dissiper des obscurités» [1843 ; 1984, p. 3] qui subsistent au sein de la théorie classique des probabilités, et en compromettent la valeur objective. De fait, le calcul des probabilités subit, dans les années 1840, une série d'attaques, contestant ou bien la cohérence interne de la théorie, ou bien, et plus généralement, son applicabilité, attaques provenant aussi bien de philosophes[3] que des mathématiciens

[1] Maître de conférences à l'Université de Franche-Comté, 30, rue Mégevand, 25030 BESANÇON Cedex

[2] L'ouvrage a été réédité en 1984, excellemment annoté par Bernard Bru, tome I des *Œuvres complètes* de Cournot aux éditions Vrin sous la direction de J. Robinet. Toutes les références renvoient à cette édition.

[3] Ainsi Jean-Baptiste Bordas-Demoulin estime que «l'application du calcul des probabilités aux phénomènes de l'univers, aux événements de la vie et des sociétés [...] conduit toujours à des résultats faux, ou illusoires, et qu'elle est une des plus grandes extravagances qui soient tombées dans l'esprit humain», [t. II, pp.418-419]. Auguste Comte n'est pas plus tendre qui juge «la notion fondamentale de la probabilité évaluée [...] directement irrationnelle et même sophistique» et rejette ses applications éventuelles par une perfidie dirigée contre Laplace : «les applications utiles qui semblent lui être dues, le simple bon sens dont cette doctrine a souvent faussé les aperçus, les avait toujours clairement indiquées d'avance», [1830-1842 ; 1975, t.I, p.435].

eux-mêmes[4]. Ces équivoques que dénonce Cournot résultent notamment de l'absence d'une distinction clairement établie entre les significations objective et subjective dont est susceptible le concept de probabilité. Afin d'asseoir la théorie des probabilités sur des fondements solides et d'assurer la légitimité de ses applications, il convient donc, selon Cournot, de faire le partage entre les sens du concept de probabilité qui «tantôt se rapporte à une certaine mesure de nos connaissances, et tantôt à une mesure de la possibilité des choses, indépendamment de la connaissance que nous en avons» [1843 ; 1984, p. 4]. Ce projet est d'autant plus nécessaire que le calcul des probabilités jouit, dans son application au réel, d'une extension privilégiée, constituant, dit Cournot, «l'application la plus vaste de la science des nombres» [1843, §45 ; 1984, p.60], puisqu'il dépasse même les domaines de la géométrie et de la mécanique, étendant l'emprise des mathématiques «aux faits de la nature vivante, à ceux du monde intellectuel et du monde moral, comme aux phénomènes produits par les mouvements de la matière inerte», [1843, §45 ; 1984, p.61].

Mais, pour distinguer parmi les usages du calcul des probabilités, ceux pour lesquels le concept de probabilité peut recevoir une valeur objective, il faut déjà que cette signification objective soit construite, *id est* que soient assignées les conditions permettant de conférer au concept de probabilité une significaion objective. Tel est le projet qui anime le chapitre IV de l'*Exposition* : il s'agit de savoir, écrit Cournot, si la théorie des probabilités «n'est qu'un jeu d'esprit, une spéculation curieuse, ou si elle a au contraire pour objet des lois très-importantes et très-générales, qui régissent le monde réel», [1843, §38 ; 1984, p.53].

Mener à bien ce projet de fondation de la théorie des probabilités et de légitimation de ses applications requiert une double démarche : d'une part, et du côté de l'objet de connaissance, s'assurer que le réel offre une structure adéquate à cette objectivité de la probabilité, ce que rend possible l'affirmation de la réalité du hasard, c'est-à-dire, pour Cournot, l'existence effective de séries causales indépendantes, et, de l'autre, du côté de l'activité de connaissance, établir la possibilité pour le concept de probabilité de recevoir une valeur objective, *id est* de désigner non pas l'évaluation de notre degré de croyance en la réalisation possible d'un événement, mais la mesure de la possibilité effective de cet événement. C'est à quoi répond le principe de l'impossibilité physique, sur lequel Cournot fonde la «consistance objective» du concept de probabilité, et selon lequel «*l'événement physiquement impossible est celui dont la probabilité mathématique est infiniment petite*», [1843, §43 ; 1984, p.58].

Loin de s'imposer avec évidence, ce principe est plutôt un nœud de difficultés, que le présent exposé a pour but d'explorer et d'éclairer, au moins partiellement. Ces difficultés d'interprétation tiennent déjà à son mode d'intervention dans le discours de Cournot et aux prolongements historiques qu'il a subis.

A. D'une part, Cournot introduit le principe de l'impossibilité physique, non pas grâce à une élaboration conceptuelle, mais à partir d'une série d'exemples, et sans se préoccuper ni d'en établir la légitimité, ni d'en expliciter le contenu. Bien plus, son énoncé intervient

---

[4] Outre les nombreuses objections dirigées contre la probabilité des jugements, c'est l'application du calcul des probabilités aux phénomènes sociaux qui fait l'objet des critiques les plus vives. Ainsi, lors de la discussion qui suivit la «Note sur le calcul des probabilités» présentée par Poisson à l'Académie des sciences en 1836, Poinsot, tout en reconnaissant que le calcul des probabilités, en tant que théorie mathématique, constitue une science aussi exacte que les autres branches des mathématiques, dénonce son application aux sciences sociales comme «une sorte d'aberration de l'esprit, une fausse application de la science et qui ne serait propre qu'à la discréditer», [Poisson, 1836, p. 399].

brutalement, sans autre lien avec ce qui précède qu'un rapport d'extériorité[5]. Qui veut comprendre le sens de l'analyse de Cournot est alors contraint de reconstruire, à partir des éléments que fournissent aussi bien l'*Exposition* que les autres ouvrages de Cournot, le mouvement de sa pensée, en faisant apparaître les questions sous-jacentes et les chaînons d'une argumentation qui demeure, dans le texte, implicite.

Cournot propose une série d'exemples d'événements qu'il considère comme physiquement impossibles, ainsi, l'équilibre d'un cône pesant sur sa pointe, l'application d'une force selon une droite passant exactement au centre d'une sphère de manière à ne lui imprimer aucun mouvement de rotation, le fait qu'une mesure ou un instrument de mesure soient rigoureusement exacts, etc.. Son analyse se développe à propos d'un exemple particulier, celui de la détermination du centre d'un cercle. Le centre véritable du cercle est défini idéalement par un rapport géométrique. Mais, le traçage effectif du point central mobilise également d'autres causes tenant à la précision de l'instrument utilisé et à l'adresse de l'utilisateur, causes qui sont sans rapport avec les conditions géométriques déterminant le centre du cercle. Et, en raison de la précision limitée de ces causes physiques, le traçage du centre du cercle ne coïncidera pas exactement avec le centre véritable, mais se situera dans un espace dont l'étendue est définie par leur degré de précision. Ceci posé, Cournot note deux choses. D'une part, l'espace à l'intérieur duquel s'effectue le traçage du point central offre une infinité de points susceptibles de recevoir la pointe de l'instrument de traçage. De l'autre, l'indépendance entre les conditions géométriques et les causes physiques signifie qu'il n'y a aucune raison proprement géométrique pour que tel ou tel de ces points soit pris comme centre du cercle, ce qui revient à dire que la fixation du point central comporte une part de fortuité. Si l'on voulait mesurer la probabilité pour que la pointe de l'instrument se place exactement sur le centre véritable du cercle, il faudrait donc dire que cet événement constitue l'unique cas favorable sur une infinité de cas possibles. Il est alors comparable, précise Cournot, à l'extraction au hasard d'une boule blanche hors d'une urne contenant une infinité de boules noires et une seule boule blanche. Le principe de l'impossibilité physique énonce alors qu'un événement dont la probabilité est infiniment petite ne peut se réaliser physiquement en un nombre fini d'épreuves.[6] Et c'est ainsi la disproportion entre la finitude des conditions physiques de l'événement et l'infinité des cas mathématiquement possibles qui engendre l'impossibilité physique de cet événement.

Ayant construit le concept d'impossibilité physique, grâce auquel la probabilité mathématique reçoit «une valeur objective et phénoménale», Cournot [1843, §43 ; 1984, p.58], dans un second moment, montre comment le calcul des probabilités peut alors mesurer non pas seulement notre degré de connaissance du réel, mais celui de la possibilité d'existence des phénomènes eux-mêmes. Le théorème de Bernoulli établit que si le nombre d'épreuves croit indéfiniment, l'écart entre les fréquences observées et les probabilités correspondantes tend, avec une probabilité indéfiniment croissante, à diminuer au dessous de toute valeur assignable, si bien que pour un nombre infini d'épreuves, on aurait une probabilité infiniment petite que les fréquences et les probabilités s'écartent d'une grandeur aussi petite que l'on voudra. Autrement dit, précise Cournot, pour un nombre infini d'épreuves, il devient physiquement impossible que les probabilités divergent sensiblement des fréquences. Le théorème de Bernoulli permet alors de construire la seconde arche de ce

---

[5] A la notion de hasard, écrit Cournot, «s'en rattache une autre qui est de grande conséquence pour la théorie comme pour la pratique : nous voulons parler de *l'impossibilité physique*», [1843, §43 ; 1984, p.57].

[6] C'est ce que dit, plus explicitement que l'*Exposition*, l'*Essai* de 1851, définissant l'événement physiquement impossible comme celui «sur l'apparition duquel il serait déraisonnable de compter tant qu'on n'embrasse qu'un nombre fini d'épreuves ou d'essais, c'est-à-dire tant qu'on reste dans les conditions de la pratique et de l'expérience possible», [1851, §34 ; 1975, p.39].

«pont de Cournot»[7], grâce auquel la théorie mathématique des probabilités vient rejoindre le réel.

Les difficultés se concentrent ici sur la première arche de l'édifice, que la seconde ne fait que prolonger, car c'est la correspondance entre probabilité infiniment petite et impossibilité physique, *id est* entre un concept mathématique et une propriété objective, qui doit être explicitée.

B. D'autre part, lorsque, dans les années 1930-1950, la question du statut objectif ou subjectif de la probabilité sera de nouveau posée et discutée[8], les protagonistes du débat sur les probabilités négligeables invoqueront «le principe de Cournot» comme instrument permettant d'opérer le passage de la théorie à son application au réel, mais en plaçant sous cette expression un énoncé qui ne se trouve pas en fait chez Cournot. La difficulté est ici accrue par le fait que les divers auteurs ne placent pas sous ce qu'ils appellent «le principe de Cournot» le même contenu. Selon Oskar Anderson [p. 106], le «principe de Cournot» énonce que «les événements dont les probabilités sont très petites se réalisent très rarement». Il est suivi en cela par H. Jecklin pour qui «les événements de très petites probabilités ne se produisent habituellement que très rarement» [p.13] et par L. Féraud énonçant que «les événements ayant une petite probabilité se réalisent rarement» [p.150]. Comme le note Maurice Fréchet [1951, p.6 ; 1955, p.209], c'est également ce qu'affirme Paul Lévy [1949, p.56], qui toutefois ne reprend pas l'expression de «principe de Cournot». De cette première forme du «principe de Cournot», associant (très) petites probabilités et rareté, et qu'on peut considérer comme sa forme faible, se distingue une forme forte posant la non-réalisation des événements de très petites probabilités. On la rencontre chez de Finetti («des événements pratiquement impossibles ne se vérifient jamais» [1951, p.80] [1970 ; 1974, p.81], où «pratiquement impossibles» signifie «très peu probables»), formulant ce principe pour mieux le contester, ou, plus récemment, chez Maurice Boudot («un événement dont la probabilité est très faible ne se produira pas» [p.115]). Mais, c'est Émile Borel qui lui avait donné auparavant sa forme la plus accomplie, quoique, comme Lévy, sans faire référence à Cournot, puisqu'il fournit une estimation numérique[9] [1939, pp.4-7] de la «loi fondamentale et unique du hasard» selon laquelle «les phénomènes extrêmement improbables ne se produisent jamais», [1941, p.98].[10]

II. Afin de comprendre ce qui fait la spécificité du principe cournotien de l'impossibilité physique et le distingue du «principe de Cournot», il convient de rappeler brièvement la fonction que joue dans le calcul des probabilités un principe des probabilités négligeables, sans pour autant épuiser l'examen des difficultés qu'il soulève. Pour effectuer cette analyse sans risque de confusion, nous prendrons soin de désigner par ***principe de l'impossibilité physique*** le principe que formule explicitement Cournot, réservant l'expression de «principe

[7] Selon l'expression d'Oskar Anderson.

[8] L'année 1949 est, à cet égard, particulièrement riche, marquée par la publication des articles d'Oskar Anderson, Émile Borel, Bruno de Finetti et Paul Lévy dans le n° 9/10, volume 3, de la revue *Dialectica*, et la tenue à Paris du XVIII^{e} Congrès international de philosophie des sciences où s'opposent notamment Bruno de Finetti et Maurice Fréchet.

[9] Cette estimation doit tenir compte de l'échelle du phénomène considéré. Selon Borel, une probabilité pourra être considérée comme négligeable au niveau de la pratique ordinaire, dès qu'elle sera inférieure à 10^{-6}, elle le sera à l'échelle terrestre quand elle tombera au-dessous de 10^{-15}, et à l'échelle cosmique pour un seuil inférieur à 10^{-50}.

[10] Ou encore, «les événements dont la probabilité est suffisamment faible ne se produisent jamais», [1943, p.8].

de Cournot» au principe des probabilités négligeables tel qu'il intervient dans la tradition probabiliste.

Le calcul des probabilités présente ce caractère distinctif que les énoncés auxquels il conduit ne s'appliquent au réel que de façon probable. La question de la valeur objective de ses résultats se trouve alors nécessairement posée, et de façon problématique. Ainsi, le théorème de Bernoulli, énonçant la convergence probable des fréquences vers les probabilités, met en rapport la théorie et les données observées et peut donc conférer au calcul des probabilités une signification objective. Mais, celle-ci demeure à la fois asymptotique et seulement probable. D'une part, la correspondance entre les fréquences et les probabilités n'est jamais pleinement assurée ; elle ne le serait qu'à la limite, c'est-à-dire pour un nombre infini d'épreuves, qu'il est bien sûr impossible d'obtenir dans la pratique. D'autre part, si, de façon générale, l'on peut s'attendre à voir se réaliser le cas favorable, puisqu'il bénéficie d'une probabilité plus élevée que le cas défavorable, son avènement n'est jamais nécessaire, et l'affirmation que la convergence observée antérieurement se poursuivra dans l'avenir n'a donc que le statut d'une probabilité. On peut supposer — mais seulement supposer, puisque Cournot n'explicite pas sa démarche — que ce sont précisément ces raisons qui rendent nécessaire, aux yeux de Cournot, le recours au principe de l'impossibilité physique. C'est cette particularité du calcul des probabilités que signale Borel [1939, pp. 4-5], remarquant que «la théorie des probabilités se distingue au premier abord des autres branches des mathématiques et même des autres sciences, en ce que, par sa nature même, elle ne peut jamais prétendre nous donner une certitude. Sans doute, poursuit Borel, peut-on dire, lorsqu'on se place au point de vue abstrait et axiomatique, que les déductions y sont aussi rigoureuses que dans les autres sciences et que les valeurs obtenues pour des probabilités bien définies, lorsque l'on admet certains postulats, sont rigoureusement exactes : mais, lorsque l'on passe dans le domaine des applications pratiques, on est bien obligé de constater que même si la valeur d'une probabilité était connue avec certitude, cette connaissance ne pourrait jamais entraîner comme conséquence pratique une certitude, mais, au contraire, une incertitude, puisque précisément l'objet même des déductions et des calculs est simplement une probabilité [...]. Les vérifications sont par suite toujours sujettes à caution, puisque, même si le cas favorable est de beaucoup le plus probable, le cas défavorable peut cependant se produire, sans que pour cela la théorie et le calcul puissent être regardés comme étant en défaut».

On peut sans doute accepter comme tel ce statut particulier du calcul des probabilités, d'autant que, pratiquement, il n'interdit pas son application au réel, dès lors qu'on prend soin d'accompagner l'évaluation de probabilité de la mesure du risque d'erreur qui lui est associé. Mais on peut également vouloir se débarrasser de ce qui peut apparaître comme une imperfection de la théorie. Un principe des probabilités négligeables, tel que le «principe de Cournot», vise justement à offrir aux résultats des applications du calcul des probabilités la certitude qui leur fait initialement défaut[11] . Il opère une sorte de passage à la limite grâce à un double mouvement : on pose d'abord comme négligeable les probabilités très petites, en affirmant ou bien dans la version forte que les événements correspondants ne peuvent se réaliser, ou bien, dans la version faible, qu'ils sont suffisamment rares pour qu'on puisse considérer que pratiquement ils ne se réaliseront pas. On distingue alors ce qui vaut théoriquement ou absolument et ce qui vaut pratiquement, pour passer de ce qui est théoriquement probable à ce qui est pratiquement certain, reconnaissant que, théoriquement, il est toujours possible qu'un événement de très petite probabilité se réalise, mais qu'on peut pratiquement le considérer comme impossible. (Borel va même plus loin, définissant, à partir

[11] Il vise, écrit Émile Borel [1906 ; 1972, t.II, p.1003] à répondre à la question suivante : «à partir de quelle limite la probabilité peut-elle être confondue avec la certitude ?», et permet d'avancer [1949 ; 1972 , t.IV, p.2187] «qu'une probabilité assez voisine de l'unité (...) doit être regardée comme rigoureusement équivalente à la certitude».

de son estimation numérique des probabilités négligeables, des probabilités universellement négligeables, et, partant, des événements *absolument* impossibles[12]).

On peut se demander pourquoi la tradition probabiliste a substitué au principe de l'impossibilité physique ce qu'elle désigne comme «principe de Cournot», d'autant que ce dernier n'est pas exempt de difficultés. Dans sa version forte, le principe des probabilités négligeables engendre une difficulté, car il conduit à considérer comme nulles des probabilités très petites, ce qui revient à tenir pour impossibles des événements, certes exceptionnels, mais en toute rigueur susceptibles d'avoir lieu, tels que des catastrophes naturelles. La version faible du principe des probabilités négligeables évite cette difficulté, mais en se réduisant à un énoncé trivial et indéterminé : à partir de quel seuil une probabilité doit-elle être considérée comme très petite ? Comment mesurer de façon non-arbitraire la rareté d'un événement ?

Mais il ne s'agit pas ici d'interroger les difficultés soulevées par le recours à un principe des probabilités négligeables, mais de comprendre ce qui fait l'originalité de la position de Cournot, et la distingue de celle de ses successeurs.

Or, ce qui distingue radicalement le principe cournotien de l'impossibilité physique du «principe de Cournot», c'est la référence à la notion de probabilité infiniment petite. La question qui se trouve ainsi posée est de comprendre la signification de cette différence. On peut formuler cette question de deux façons différentes, selon qu'on cherche à savoir pourquoi la tradition probabiliste substitue à la notion de probabilité infiniment petite celle, apparemment plus floue, de probabilité très petite, ou pourquoi Cournot mobilise au contraire le concept d'infiniment petit.

A la première question, il est aisé de répondre déjà que cela permet d'éviter les difficultés engendrées par le principe de l'impossibilité physique. D'une part, la notion de probabilité infiniment petite, utilisée ainsi sans précision d'ordre de grandeur, demeure une abstraction indéterminée, en toute rigueur dépourvue de sens mathématique. D'autre part, Cournot établit son principe par la combinaison de deux modèles, celui du traçage du centre d'un cercle et celui de l'urne contenant une infinité de boules, lesquels mobilisent deux types distincts d'infini. Certes, Cournot ne pouvait apercevoir cette difficulté, la distinction entre un ensemble infini ayant la puissance du continu et un ensemble dénombrable et discret étant postérieure à 1843. Mais, il est une difficulté plus profonde, car la différence de formulation des deux principes est surtout l'indice d'une distinction de statut. Le «principe de Cournot» énonçant qu'un événement de probabilité très petite est suffisamment rare pour qu'on puisse considérer qu'il ne se réalisera pas est un principe empirique, qui peut être admis tel quel, à titre de principe auxiliaire[13] dans l'application du calcul des probabilités aux données de l'observation. Ce n'est pas le cas, en revanche, du principe de l'impossibilité physique tel que le pense Cournot. Sans doute, il n'appartient pas à la théorie mathématique elle-même, mais concerne bien son application au réel. L'impossibilité dont traite ici Cournot est seulement physique. Cournot le note explicitement, précisant que «la notion de l'impossibilité physique diffère essentiellement de celle de l'impossibilité mathématique ou métaphysique, et il n'y a aucun moyen d'établir la transition de l'une à l'autre», [1843, §43 ; 1984, p. 58]. Le concept

[12] Les probabilités qui s'expriment par un nombre inférieur à 10^{-1000} sont non seulement négligeables dans la pratique courante de la vie, mais universellement négligeables, c'est-à-dire doivent être traitées comme *rigoureusement égales à zéro* dans toutes les questions qui concernent notre univers [...] et les phénomènes auxquels elles se rapportent sont absolument *impossibles*», [1939, p.156] ; (cf. également Borel, 1930).

[13] Ainsi que le fait remarquer Fréchet [1951, p.6 ; 1955, p.209], l'expression «lemme de Cournot» utilisée par O. Anderson (qui pourtant le définit comme un principe empirique), est ici inadéquate, puisque le «principe de Cournot» n'appartient pas au corps des axiomes du calcul des probabilités, mais concerne son application au réel.

de probabilité infiniment petite n'englobe donc par lui-même, et mathématiquement, aucune impossibilité. C'est seulement lorsqu'il vient s'appliquer aux conditions de l'expérience qu'il implique l'impossibilité de l'événement correspondant. Mais, en même temps, son énoncé le situe hors du domaine de l'observable, puisqu'il fait référence à une probabilité infiniment petite. Il ne peut alors être admis simplement comme un principe empirique, mais doit être établi, et donc fondé.

Ni principe empirique, ni axiome de la théorie mathématique pure, il relève de ce que Cournot appelle la critique philosophique.[14] Mais cela ne signifie pas exactement qu'il appartienne à la philosophie *des* mathématiques, il est plus juste de dire qu'il constitue un principe de philosophie mathématique. En effet, précise Cournot, si les mathématiques, et plus généralement, les sciences, jouissent d'une autonomie par rapport à la philosophie, leur permettant de se constituer et de produire des énoncés valides indépendamment de toute interrogation sur le sens et la portée de ces résultats, cette indépendance entre ce que Cournot appelle l'élément positif et l'élément philosophique n'interdit pas, et même au contraire exige, une «intervention» de la philosophie dans les sciences. Sans doute, reconnaît Cournot, «tous les géomètres appliqueront aux symboles des valeurs négatives, imaginaires, infinitésimales, les mêmes règles de calcul, obtiendront les mêmes formules, quelque opinion philosophique qu'ils se soient faite sur l'origine et sur l'interprétation de ces symboles» [1851, p. 196], mais, dès lors qu'on ne réduit pas une théorie mathématique à un pur jeu d'esprit, à une construction abstraite, on doit réfléchir sur le sens de ses concepts et leur fonction explicative. Cependant, il ne s'agit pas, pour Cournot, de compléter les sciences par une réflexion philosophique interrogeant leurs buts et leurs limites, il s'agit d'en construire de l'intérieur la signification et d'en mesurer la portée. Or, cette «pénétration» de l'élément philosophique dans les sciences est, tout autant que le travail d'élaboration des connaissances scientifiques, l'œuvre de la raison. Par conséquent, le principe de l'impossibilité physique ne peut intervenir dans le discours de Cournot que comme un principe rationnellement construit, posant une relation essentielle entre le concept de probabilité infiniment petite et celui d'impossibilité physique. Et la difficulté est alors de comprendre comment cette relation peut être rationnellement établie, difficulté redoublée pour le lecteur par le caractère elliptique de la démarche de Cournot.

Comment, en effet, comprendre que l'événement de probabilité infiniment petite soit physiquement impossible ? Si l'événement jouit d'une probabilité infiniment petite, c'est, nous dit Cournot, qu'il n'a pour lui qu'une chance contre une infinité de chances contraires. Mais il possède bien cette chance favorable. On pourrait alors être tenté d'opposer à Cournot qu'il est certes extrêmement peu probable, mais non pas rigoureusement impossible. Cependant, à proprement parler, l'événement n'est pas très peu probable, mais infiniment peu probable. Il faut alors admettre que c'est cette valeur infiniment petite de sa probabilité qui engendre l'impossibilité physique de l'événement. Mais on se heurte alors à une seconde difficulté, car cette relation s'accompagne d'un changement de plan. Affirmer l'impossibilité physique de l'événement de probabilité infiniment petite, c'est, en effet, dériver une propriété de fait, l'inexistence, d'une détermination abstraite. Comment alors peut-on ainsi passer du plan du concept à celui du réel ? La question se pose d'autant plus que Cournot a préalablement construit le concept de probabilité mathématique à partir de la combinatoire définie comme théorie mathématique pure, conformément à l'orientation rationaliste de sa philosophie posant le champ mathématique comme ce domaine où «tout s'y démontre par le raisonnement seul, sans qu'on ait besoin de faire aucun emprunt à l'expérience», [1861, §5; 1982, p.12].

[14] «Pour opérer ce passage, de l'idée d'un rapport abstrait à celle d'une loi efficace dans l'ordre des réalités et des phénomènes, les raisonnements mathématiques, appuyés sur une série d'identités, sont évidemment insuffisants. Il faut recourir à d'autres notions, à d'autres principes de connaissance ; en un mot, il faut faire de la critique philosophique», [1843,, §38 ; 1984, p.53].

On voit mal comment effectuer ce passage, sauf à considérer la probabilité infiniment petite non comme une abstraction mathématique, mais comme possédant de surcroît un sens physique. Il faudrait dire ainsi qu'appliqué aux conditions finies de l'expérience, le concept de probabilité infiniment petite désigne une chance[15] nulle, autrement dit que ce qui est théoriquement infiniment petit est, dans le champ fini de l'expérience, physiquement nul. Or, c'est là exactement ce que dit Cournot.

Ainsi, écrit-il, si un aérolithe pénètre dans l'atmosphère, son mouvement se trouve ralenti, et une part de son énergie se transforme en chaleur. Cet accroissement de température va se dissiper dans l'espace céleste, mais la disproportion entre la finitude de cet accroissement et l'infinité de l'espace céleste a pour conséquence qu'il n'en résulte aucun échauffement, ou, plus exactement, dit Cournot, [1875, I, 6 ; 1979, p.39], celui-ci est «théoriquement infiniment petit et physiquement nul».

C'est alors finalement la conception réaliste de l'infiniment petit qui, nous semble-t-il, rend compte chez Cournot du principe de l'impossibilité physique, conception que Cournot partage avec Poisson[16]. On comprend alors que Cournot insiste sur le fait que son principe n'a de sens qu'à la condition de considérer un événement jouissant d'une seule chance favorable non pas sur un très grand nombre, mais rigoureusement sur une infinité de chances contraires, l'événement physiquement impossible étant comparable, écrit-il dans les *Considérations*, à l'extraction de l'unique boule blanche «qui se trouve mêlée, non pas à un million, non pas à un milliard ou à une myriade de milliards, mais à une *infinité* de boules noires», [1872, III, I ; 1973, pp.182-183].[17] (Et l'on peut ici mesurer la distance qui sépare le principe de l'impossibilité physique du «principe de Cournot», la formule précédente prenant par avance le contre-pied de celle d'Anderson, pour qui [p.106] le «principe de Cournot» peut être illustré par le «tirage d'une boule repérée par un signe distinctif dans une urne contenant — disons — 1000 ou 100 000 ou 10 millions de boules identiques bien mélangées»).

Ainsi, le passage du concept à l'objet effectué grâce au principe de l'impossibilité physique exige un double réquisit : 1° que l'infiniment petit ait un sens objectif, 2° qu'une quantité infiniment petite soit, prise isolément, physiquement nulle.

La réalité de l'infiniment petit n'est certes pas vérifiable empiriquement. Elle est cependant exigée, aux yeux de Cournot, pour rendre compte des variations finies observées, dans la mesure où celles-ci doivent être pensées comme «l'effet composé» des variations infinitésimales de grandeurs croissant ou décroissant de manière continue. Le calcul infinitésimal n'est donc pas un instrument forgé artificiellement pour se rendre intelligible la continuité ; il correspond, du moins lorsqu'il prend la forme de la méthode leibnizienne que Cournot oppose à la méthode lagrangienne des limites, au mode de variation des grandeurs continues, ou comme le dit Cournot, il en rend raison. Par cette expression, il faut entendre non pas seulement qu'il fournit une explication ou une représentation rationnelle des changements observés dans les phénomènes, mais qu'il correspond à cet accord de la raison subjective et de la raison objective, grâce auquel la raison, prise comme faculté de connaître, non pas introduit dans le réel un ordre rendant possible son intelligibilité, mais met à jour l'ordre par lequel ils se déterminent les uns les autres, *id est* la raison des choses :

---

[15] Nous nous conformons ici à la distinction terminologique formulée par Poisson [1837, p.31] et Cournot entre la *chance*, comme degré de possibilité de l'événement, et la *probabilité*, comme mesure de cette possibilité.

[16] Cournot [1841, §49 ; 1984, p.86] renvoie implicitement à la formule de Poisson, selon laquelle «les infiniment petits ont une existence réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres», [Poisson, 1833, t.I, p.14].

[17] Souligné par Cournot.

«L'infiniment petit, écrit Cournot, tient effectivement à la nature des choses ou, pour parler encore plus exactement, tient à la raison des choses, indépendamment des articles logiques à l'aide desquels notre esprit les conçoit et les soumet à ses raisonnements et à ses calculs. [En effet], il est selon la nature des choses que les relations entre les grandeurs «à l'état naissant», ou entre leurs variations infiniment petites, soient le fondement et la raison des relations que nos mesures constatent entre des grandeurs «à l'état fini», ou entre leurs différences finies et mesurables», [1872, III, I ; 1973, pp.177-178]. La méthode infinitésimale est alors la reproduction du mouvement d'engendrement des phénomènes et en fournit tout à la fois l'image et la clé.

Mais, pour que les variations infiniment petites des grandeurs physiques engendrent effectivement une modification finie, il est nécessaire qu'elles soient composées, comme les infiniment petits doivent être intégrés. En l'absence d'une telle intégration, la grandeur physique infinitésimale, impuissante à produire une modification finie, est «physiquement nulle».

Si alors, le principe de l'impossibilité physique repose bien sur la thèse de la réalité de l'infiniment petit, on doit concevoir la probabilité infiniment petite comme la mesure mathématique de la chance infiniment petite de l'événement. Et, de même qu'une variation infiniment petite demeure physiquement nulle tant qu'elle n'est pas intégrée, la chance infiniment petite de l'événement est, par elle seule, impuissante à rendre possible son existence.

Or, l'intégration est cette opération par laquelle les infiniment petits d'ordre supérieur s'évanouissent pour ne laisser subsister que les infiniment petits d'ordre inférieur. L'analogie entre le calcul des probabilités et le calcul infinitésimal invite alors à distinguer des ordres de probabilités infiniment petites, l'impossibilité physique recevant des formes différentes selon l'échelle considérée. De fait, afin d'illustrer le «lien intime» qui unit le calcul des probabilités au calcul infinitésimal, Cournot, dans les *Considérations*, imagine un billard parfaitement horizontal sur lequel on fait glisser une bille parfaitement sphérique. On peut considérer comme physiquement impossible l'événement de probabilité infiniment petite de premier ordre tel que «la bille lancée au hasard ou dirigée par le joueur le plus habile, aille précisément toucher la bande au point mathématique où elle se divise en deux parties rigoureusement égales. Ce serait un coup infiniment plus improbable que la sortie du quine à la loterie. Il serait dans le même sens tout aussi impossible que la bille s'arrêtât précisément sur la ligne mathématique qui joint les deux points milieux des deux bandes parallèles», [1872, III, I ; 1973, p.183]. Mais, comme on l'a vu, le principe cournotien établit la correspondance entre impossibilité physique et probabilité infiniment petite en vertu de l'incommensurabilité du fini à l'infini. En conséquence, dans l'hypothèse où l'on répéterait indéfiniment l'événement, il n'y aurait plus disproportion entre la possibilité de l'événement et ses conditions d'existence, l'intégration des possibilités infiniment petites indéfiniment répétées tendrait à rendre probable la réalisation de l'événement. Ainsi que l'écrit Cournot [1872, III, I ; 1973, pp.183-184], si «dans l'hypothèse où il s'agit de frapper juste au milieu la bande du billard, le coup se répète à chaque minute durant un temps infini, il devient probable que l'unique chance favorable sortira tôt ou tard, dans le nombre infini de minutes que la pensée embrasse».

En revanche, si l'on considère l'événement constitué par l'arrêt de la bille exactement au milieu de la bande médiane, il ne s'agit plus d'une probabilité infiniment petite du premier ordre, mais du second ; c'est, dit Cournot, «l'impossible dans l'impossible ; c'est une chance unique contre un nombre de chances qui est infini et de plus compris parmi les infinis du second ordre ; c'est une probabilité infiniment petite du second ordre ; et rien n'empêcherait de descendre autant qu'on le voudrait cette échelle des probabilités infiniment petites», [1872, III, I ; 1973, pp.183-184]. Supposons alors comme précédemment que l'on répète indéfiniment l'épreuve, pourra-t-on intégrer les probabilités infiniment petites jusqu'à rendre probable l'événement ? Certes, répond Cournot reprenant une formule due à Playfair, «le temps se charge d'intégrer les infiniment petits», mais, ajoute-t-il, c'est à une condition : «que l'élément qu'il s'agit d'intégrer soit du même ordre infinitésimal que l'élément du temps, dans l'ordre de phénomènes auquel doit se référer le calcul d'intégration», [1872, III, I ; 1973, pp.183-184]. En conséquence, ici, une série d'épreuves même infinie est incapable de conférer à l'événement une probabilité finie assignable, car «les deux infinis n'étant plus de même ordre, l'un ne peut plus équilibrer l'autre.» Ainsi, précise Cournot, reprenant l'exemple traditionnel des combinaisons fortuites de lettres pourvues de sens, si l'apparition une fois de l'*Iliade* épuise «le postulat du temps infini» [1872, III, I ; 1973, p.184], en revanche l'événement constitué par l'apparition d'une infinité d'*Iliades* ne possède qu'une probabilité infiniment petite du second ordre ; il est physiquement impossible, même au niveau d'un temps infini.

III. En définitive, Cournot ne saurait admettre qu'un événement de probabilité faible ou très faible soit considéré comme impossible, si l'on entend par là un événement dont la probabilité, quoique très petite, demeure assignable. Sans doute peut on dire que l'événement de très petite probabilité ne se réalise que très rarement. Mais, d'une part cela n'autorise pas, aux yeux de Cournot, à le considérer comme impossible, et d'autre part, c'est à la condition de donner un sens clair à cette notion de rareté. Dès lors qu'on admet, comme le fait Cournot, que l'événement fortuit est celui qui résulte de la combinaison accidentelle de causes indépendantes, c'est-à-dire telles qu'elles ne rendent pas raison les unes des autres, tout événement dont la réalisation n'est pas le produit de la nécessité d'une loi est entaché de fortuité. En ce sens, le réel offre en permanence une multitude de réalisation de combinaisons fortuites. La rareté ne saurait donc concerner l'existence de situations de fortuité. En revanche, toute production d'un événement fortuit est la réalisation d'une unique combinaison prise parmi un nombre de combinaisons possibles qui peut être fort grand. L'événement fortuit réalisé peut ainsi être dit rare relativement au nombre élevé des combinaisons possibles dont il est extrait, et non relativement à l'ensemble des événements produits. Cela signifie que se réalisent en permanence des événements résultant d'une combinaison singulière de causes indépendantes, qui, comme telles, sont susceptibles de se combiner d'une multitude de façons différentes. Des événements dont les probabilités sont très faibles ne sont donc par eux-mêmes aucunement impossibles.

Il reste qu'au §66 de l'*Exposition*, Cournot utilise le principe de l'impossibilité physique comme un principe de probabilités négligeables [1843 ; 1984, p.81], précisant que si la probabilité de vivre 110, 120 ou 130 ans n'est jamais rigoureusement nulle, puisqu'on dispose même d'exemples d'hommes ayant atteint cet âge, on peut, dans la pratique, «traiter comme nulle la probabilité de vivre 110 ans ou plus», et «regarder comme physiquement impossible» la réalisation des événements correspondants. Mais la formulation même utilisée par Cournot montre assez qu'il ne s'agit pas ici de poser comme effectivement impossible un événement de probabilité faible, mais seulement de le tenir pour tel dans l'application du calcul à la réalité physique.[18] C'est que l'analyse n'a plus pour fonction, dans ce chapitre, de résoudre un problème théorique, mais d'indiquer la façon dont, techniquement, la théorie peut s'appliquer au réel. Il ne s'agit donc pas ici de donner au concept d'impossibilité physique un sens rigoureux, permettant la mise en correspondance de la théorie et du réel, mais de montrer comment, le calcul des probabilités ayant reçu une valeur objective, le praticien peut ensuite l'utiliser dans les situations particulières auxquelles il est confronté.

---

18 C'est alors sous cette forme que le principe énoncé par Cournot correspond, non pas au «principe de Cournot» tel que nous l'avons vu formulé précédemment, mais à la version qu'en propose Fréchet — préférable par sa réserve et sa signification pratique aux deux versions précédemment distinguées — selon laquelle «*quand un événement est de probabilité extrêmement petite, il convient d'agir comme s'il ne devait pas se produire*», [1951, p.9 ; 1955, p.212].

IV. Au terme de cette analyse, nous sommes à même, nous semble-t-il, de mieux comprendre la signification de la pensée de Cournot, et cela d'un double point de vue.

- Nombre d'historiens ont vu dans l'œuvre de Cournot le triomphe d'une interprétation fréquentiste de la probabilité. Lorraine Daston, par exemple[19], estime qu'elle constitue «l'avènement d'une nouvelle interprétation de la probabilité mathématique exclusivement en termes de fréquences objectives», [p.224]. Or, outre que Cournot reconnaît une place, certes limitée, mais réelle, à la probabilité subjective, la seconde arche du «pont de Cournot», par laquelle la valeur objective de la probabilité est transportée, par l'intermédiaire du théorème de Bernoulli, à la limite vers laquelle tend la multiplication indéfinie des épreuves et où convergent probabilités et fréquences, n'est possible que si déjà la première a été construite. Et celle-ci, qui donne au concept d'impossibilité physique son sens, et rend par là possible la seconde arche, confère une valeur objective à une probabilité définie comme rapport de chances. On ne peut donc sans mutiler la pensée de Cournot la réduire à une interprétation objective de type fréquentiste. Cependant, si le concept de probabilité mathématique ne reçoit pas chez Cournot une détermination univoque, ce n'est pas en raison d'une hésitation sur la signification qu'il convient de lui reconnaître, mais, au contraire, parce qu'il s'agit, pour lui, d'ordonner ses diverses significations, afin d'apprécier la valeur des résultats auxquels aboutit le calcul. Les stratifications du concept de probabilité permettent, lorsqu'elles sont distinguées, et non plus confondues, d'éviter les «équivoques» que Cournot aperçoit chez ses prédécesseurs mêlant les significations objectives et subjectives des probabilités, et garantissent ainsi de l'illusion consistant à réduire le réel à notre représentation ou à y introduire un ordre qui ne tient qu'à notre manière de l'appréhender.

- Ce nécessaire départ entre ce qui, dans la connaissance, tient à l'objet ou provient du sujet est l'œuvre de la raison mesurant la probabilité d'un accord de la théorie au réel. A ce titre, la démarche par laquelle Cournot s'efforce d'établir la valeur objective du calcul des probabilités illustre l'orientation de son rationalisme probabiliste. L'adéquation de la théorie au réel n'est pas le produit d'une observation empirique, car si l'impossibilité physique est bien une impossibilité de fait, elle est affirmée à partir d'un principe rationnel construit *a priori* : nous n'avons nul besoin de l'expérience, précise Cournot, pour déclarer l'événement physiquement impossible, «au contraire, l'esprit conçoit *a priori* la raison pour laquelle l'événement n'arrive pas, et l'expérience n'intervient que pour confirmer cette vue de l'esprit», [1851, §33 ; 1975, p.39].[20] Mais, en même temps, il ne s'agit pas pour Cournot d'affirmer cette correspondance de façon dogmatique, sous la forme d'un postulat, mais d'en évaluer la probabilité. L'équivalence entre la probabilité mathématique et la possibilité physique n'est possible que sous la condition de reconnaître préalablement une valeur objective au concept de probabilité infiniment petite, laquelle s'appuie sur la thèse de la réalité de l'infiniment petit. Or, celle-ci n'est elle-même possible qu'à la condition d'admettre la réalité du temps et de l'espace. Mais, précise Cournot, il n'est pas plus possible de démontrer formellement la réalité du temps ou de l'espace que celle des corps extérieurs. Tout jugement d'existence par lequel on cherche à évaluer le degré de conformité d'un concept ou d'un énoncé au réel demeure un jugement probable. Cependant, tout jugement de probabilité n'est pas, pour autant, un jugement douteux, car il peut reposer sur un faisceau de probabilités concordantes qui lui confère le statut d'une certitude rationnelle, c'est-à-dire non pas établie par voie de démonstration, mais jouissant d'une probabilité suffisamment forte pour exclure tout doute raisonnable. Telle est la probabilité dont jouit l'affirmation de valeur objective de la probabilité mathématique.

---

19 Mais déjà Czuber [pp.1-2], J. de La Harpe [p.103] ou Montessus de Ballore [p.174].

20 Reichenbach ne s'y est pas trompé, remarquant que, pour Cournot, «la correspondance entre le calcul des probabilités et les phénomènes naturels n'est qu'un cas particulier de la correspondance générale entre raison et réalité», [p.272].

BIBLIOGRAPHIE

ANDERSON O., *Probleme der statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften*, Würzburg, Physica Verlag, 1963.

BORDAS-DEMOULIN, J.-B., *Le cartésianisme ou la véritable rénovation des sciences*, Paris, J. Hetzel, 1843.

BOREL É., «La valeur pratique du calcul des probabilités», *La Revue du Mois*, t. I, 1906, 424-437 ; in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. II, 991-1004.

BOREL É., «Sur les probabilités universellement négligeables», *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 190, 1930, 537-540 ; repris in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. II, 1139-1142.

BOREL É., *Valeur pratique et philosophie des probabilités,* t. IV, fasc. III du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1939.

BOREL É., *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, Paris, Gallimard, 1941.

BOREL É., *Les probabilités et la vie*, Paris, 1943.

BOREL É., «Probabilité et certitude», *Dialectica*, vol. 3, n° 9/10, mars-juin 1949, 24-27 ; in *Œuvres de Émile Borel*, Paris, C.N.R.S., 1972, t. IV, 2185-2188.

BOUDOT M., *Logique inductive et probabilité*, Paris, A. Colin, 1972.

COMTE A., *Cours de philosophie positive*, Paris, Bachelier, 1830-1842 ; rééd. Paris, Hermann, 1975.

COURNOT A.A., *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, Paris, Hachette, 1841 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1984.

COURNOT A.A., *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, Hachette, 1843 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1984.

COURNOT A.A., *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Paris, Hachette, 1851 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1975.

COURNOT A.A., *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, Paris, Hachette, 1861 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1982.

COURNOT A.A., *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, Paris, Hachette, 1872 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1973.

COURNOT A.A., *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*, Paris, Hachette, 1875 ; *Œuvres complètes*, Paris, Vrin, 1979.

CZUBER E., «Calcul des probabilités», (exposé d'après l'article allemand par J. LE ROUX), in MOLK J. (dir.), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, t. I, vol. 4, fasc. 1, 1-46.

DASTON L., *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press, 1988.

FERAUD L., «Induction amplifiante et inférence statistique», *Dialectica*, vol. 3, n° 9/10, mars-juin 1949, 127-152.

FINETTI B. de, «Rôle et domaine d'application du théorème de Bayes selon les différents points de vue sur les probabilités», *XVIII*[e] *Congrès international de philosophie des sciences*, Paris, 1949, Actualités scientifiques et industrielles, n°1146, Paris, Hermann, 1951, 67-82.

FINETTI B. de, *Theory of Probability*, Torino, Giulio Einodi, 1970 ; London, New York, John Wiley and Sons, 1974.

FRÉCHET M., «Rapport général sur les travaux de la section de calcul des probabilités», *XVIII*[e] *Congrès international de philosophie des sciences*, Paris, 1949, Actualités scientifiques et industrielles, n° 1146, Paris, Hermann, 1951, 3-21 ; *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955, 205-230.

JECKLIN H., «Historisches zur Wahrscheinlichkeitsdefinition», *Dialectica*, vol.3, n° 9/10, mars-juin 1949, 5-13.

LA HARPE J., *De l'ordre et du hasard, le réalisme critique d'Antoine Augustin Cournot*, Neuchâtel, Mémoire de l'Université de Neuchâtel, 1936.

LÉVY P., «Les fondements du calcul des probabilités», *Dialectica*, vol. 3, n°9/10, mars-juin 1949, 55-64.

MONTESSUS DE BALLORE R. de, article «Cournot», in ROUSE-BALL W.-W., *Histoire des mathématiques*, t. II, Paris, Hermann, 1909.

POISSON S.D., *Traité de Mécanique*, Paris, Bachelier, 2° éd. 1833.

POISSON S.D., «Note sur le calcul des probabilités», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 1836, 2, 395-400.

POISSON S.D., *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des Règles générales du calcul des probabilités*, Paris, Bachelier, 1837.

REICHENBACH H., «Les fondements logiques du calcul des probabilités», *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Paris, Presses Universitaires de France, 1937, vol. VII, fasc. V, 267-348.