MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BERNARD BRU

A la recherche de la démonstration perdue de Bienaymé

Mathématiques et sciences humaines, tome 114 (1991), p. 5-17

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__114__5_0>

Math. Inf. Sci. hum. (29e année, n°114, *1991*, p.5-17)

A LA RECHERCHE DE LA DÉMONSTRATION PERDUE DE BIENAYMÉ

Bernard BRU[1]

RÉSUMÉ — *Nous publions et commentons brièvement une démonstration du théorème critique des processus de branchement très vraisemblablement due à Bienamyé.*

SUMMARY — In search of the Bienaymé's lost proof
We publish and briefly comment a proof of the criticality theorem of branching processes, very likely due to Bienaymé.

INTRODUCTION

Le 29 mars 1845, Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) communiquait à la Société Philomatique de Paris un travail ayant pour titre : "De la loi de multiplication et de la durée des famille" [3]. En 1972, Heyde et Seneta ont montré que cette communication contenait le premier énoncé connu du théorème de criticalité des processus élémentaires de branchement, anticipant de 28 ans l'énoncé d'ailleurs inexact de Galton et Watson, et de 85 ans le résultat de Steffensen, voir [21] et [22].

La "communication" de Bienaymé ne comporte aucune démonstration et l'on n'a pu retrouver à ce jour le "mémoire spécial" que Bienaymé se proposait de publier sur cette intéressante question mais dont rien ne permet à l'heure actuelle d'affirmer qu'il ait jamais été publié ni surtout rédigé. Si en effet, Bienaymé avait pris le temps de rédiger un mémoire sur le sujet de l'extinction des "familles fermées", sujet qui passionnait alors les sociétés savantes parisiennes, il n'aurait eu aucune difficulté à le faire publier, par exemple dans le Journal de Liouville qui déjà en 1838 ([10] p.334), regrettait de ne pouvoir publier les résultats de Bienaymé sur la probabilité des jugements, parce que "les occupations multiples de l'auteur ne lui ont pas permis de les rédiger complètement". Sur la question des jugements, comme sur celle de la durée des familles, Bienaymé s'était contenté de donner une "analyse très succincte" de ses réflexions à la Société Philomatique.

Désespérant de retrouver un jour le "mémoire spécial", il restait à chercher chez les auteurs du temps, des traces de l'énoncé et si possible de la démonstration du théorème de Bienaymé. Il se trouve que l'un comme l'autre sont reproduits dans un traité peu connu de Cournot publié en 1847 (voir appendice) et récemment réédité [12].

Selon toute vraisemblance, la démonstration de Cournot est celle de Bienaymé, bien qu'il ne l'indique pas explicitement ; elle coïncide en tout cas très exactement avec la démonstration reconstituée par D.G. Kendall en 1974 ([24] p.233).

Nous profitons de la publication du texte de Cournot pour apporter certaines informations complémentaires sur les travaux, les motivations et la personnalité de Bienaymé qui pourraient éventuellement intéresser le lecteur.

---

[1] Université Paris V.

1. COURNOT ET LA DÉMONSTRATION PERDUE DE BIENAYMÉ

En 1847, A.A. Cournot (1801-1877) alors Inspecteur général de l'Université, publie son dernier traité mathématique : "De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie". Publié 4 ans après "l'Exposition de la théorie des chances et des probabilités", cet ouvrage passe pour être le moins lu des livres d'un auteur qui fut à son époque et qui demeure encore particulièrement peu lu, si l'on excepte ses "Recherches sur les principes mathématiques de la Théorie des Richesses" de 1838 qui furent traduites en italien, anglais et allemand et dont on reconnaît généralement l'importance.

Pourtant, le traité de Cournot sur la correspondance entre l'algèbre et la géométrie se propose de rendre raison "des concordances et des discordances que l'algèbre et la géométrie présentent, quand on applique l'algèbre aux questions de géométrie", et parce que cette question, "loin d'être rebattue, n'est posée nettement nulle part", Cournot s'oblige de "remonter jusqu'aux premières notions", qu'il n'est peut être pas inutile de rappeler à notre tour en guise d'introduction.

Pour Cournot, "sous le nom collectif de Mathématiques, on désigne un système de connaissances scientifiques, étroitement liées les unes aux autres, fondées sur des notions qui se trouvent dans tous les esprits, portant sur des vérités rigoureuses que la raison est capable de découvrir sans les secours de l'expérience, et qui néanmoins peuvent toujours se confirmer par l'expérience, dans les limites d'approximation que l'expérience comporte" ([12] p.355). Cette conception est résolument "moderne", pour exister les mathématiques n'ont nul besoin de "l'expérience" mais c'est plutôt l'expérience qui a besoin des mathématiques. Cournot aurait sans doute approuvé les propos provocateurs de Cavaillès qui choquèrent beaucoup les "empiristes français" : "... la géométrie n'idéalise rien. Que penser d'un rond sinon déjà le cercle ? C'est d'une épistémologie naïve que faire naître les objets mathématiques par abstraction à partir du réel. En fait, il y a développement autonome d'opérations qui, dès l'origine, sont mathématiques : les applications pratiques viennent du succès des opérations codifiées dans le réel. S'il y avait abstraction, ce serait non du réel (où il n'y a rien à abstraire) aux opérations, mais des opérations au réel (négligence dans celui-ci de certaines propriétés mathématiques) ; il s'agit, d'ailleurs, plutôt d'approximation" ([7] p.151-152).

Comme on le sait, la difficulté évidente de telles "définitions modernes" est d'expliquer les raisons de la surprenante applicabilité des mathématiques à d'autres domaines ou, pour employer le langage de Cournot, de la "valeur représentative des idées mathématiques". Comment se fait-il que les mathématiques, constructions de l'esprit humain apparemment arbitraires ou conventionnelles, puissent aussi faire partie des "sciences positives", "susceptibles d'être contrôlées par l'expérience" ? On peut certes invoquer le hasard et renvoyer cette question aux spéculations des métaphysiciens : "Que l'on puisse, au cours de longs raisonnements de nature formelle, oublier complètement l'origine des éléments qu'on y fait entrer, et qu'à la conclusion de ces raisonnements on obtienne des résultats qu'on applique avec succès à l'étude de problèmes naturels concrets, c'est là certes un sujet de spéculation métaphysique : pour les mathématiciens c'est seulement un fait ; un fait fort heureux, puisqu'il leur vaut leurs chaires et leurs traitements ; mais un fait incontestable : les mathématiques, comme on dit, sont susceptibles d'applications" ([37] p.202).

Théoricien du hasard, Cournot ne croit pas aux "faits heureux", du moins aux faits si continuellement heureux. Certes on ne pourra jamais démontrer la réalité ou la positivité des "idées spéculatives" qui forment la substance des mathématiques, pas plus d'ailleurs qu'on ne prouve "l'existence extérieure des corps", mais c'est précisément parce que les mathématiques sont "susceptibles d'applications" avec une constance qui ne s'est jamais démentie qu'on peut affirmer avec une probabilité philosophique frisant la certitude que les vérités mathématiques, au moins certaines d'entre elles, ont une réalité aussi assurée que celle des corps, de sorte qu'aucun philosophe ne doutera jamais de l'une comme de l'autre. Et il appartiendra à la "philosophie des mathématiques", dont c'est le rôle et le mérite, de démêler parmi l'infinité des arrangements logiques qu'on peut librement imaginer, ceux qui "ne sont point de pures fictions de l'esprit" mais au contraire des "vérités abstraites" dont l'ordre et la dépendance rationnelle assurent à la fois la beauté et la "valeur représentative", quand bien même "l'experimentum crucis de Bacon" ne saurait indiquer que cette philosophie est juste à l'exclusion de toutes les autres ([12] p.363).

Il est un autre "mystère" ([32] p.59) des mathématiques que l'on s'accorde à célébrer comme la "fierté et la gloire" d'une discipline d'ailleurs éminente, il s'agit de l'accord inattendu entre plusieurs théories mathématiques dont rien n'indiquait a priori qu'elles eussent le moindre rapport. Or, pour Cournot, les mystères inopinés ne se produisent pas plus souvent que les faits heureux et lorsqu'on rencontre deux théories qui s'accordent aussi bien et aussi continuellement que l'algèbre et la géométrie, par exemple, c'est là l'indication que ces deux théories si éloignées soient-elles, relèvent d'une théorie qui les domine toutes deux par sa généralité et sa valeur représentative, leurs points de désaccord révélant quant à eux la nature particulière des dites théories, leurs "différences".

Il importe donc d'examiner les concordances et les discordances (et il en existe) entre l'algèbre et la géométrie, d'en "faire la théorie" de façon, là encore, à isoler au sein des constructions artificielles et particulières, les "idées fondamentales, dont le type est dans la théorie générale de l'ordre ; ce qui nous met sur la voie du sens voilé, mais profond, de ce mot de Pascal : "la nature s'imite... Les nombres imitent l'espace, qui sont de nature si différente" ([12] p.397-398).

La discordance la plus évidente et la mieux constatée que l'on rencontre lorsqu'on veut "appliquer l'algèbre à la solution des problèmes sur des grandeurs" est celle qui naît de la "multiplicité des solutions" parmi lesquelles se trouvent généralement la solution du problème considéré, mêlée à d'autres qui lui sont étrangères. Dès l'origine, les algébristes avaient distingué les "vraies" racines d'une équation des "fausses", négatives ou imaginaires. Ce problème avait été examiné en 1755, dans le tome 5 de l'*Encyclopédie* [1], à l'article "Équation" dans lequel d'Alembert, l'auteur dudit article, considérait l'exemple suivant : "si on se proposait de trouver un nombre x tel que retranchant l'unité de ce nombre, le carré du reste fût égal à 4, on trouverait $(x-1)^2 = 4$", d'où l'on tire la "vraie" solution $x=3$ et une autre, fausse celle-là, $x=-1$, qui n'est pas un nombre. D'Alembert ajoutait que "la nature de l'algèbre" ne paraît pas permettre "d'abaisser le degré de l'équation à celui de la question", ce qui constitue un inconvénient plutôt qu'une richesse de l'algèbre ([12] p.98).

Poinsot, qui avait repris la question en 1845 [30], concluait au contraire que "le degré où l'équation s'élève est le degré même de la question, si elle est parfaitement posée", et que "l'algèbre ne nous donne exactement que ce qu'un raisonnement parfait nous aurait donné lui-même".

Cournot est d'un tout autre avis. Il répond à Poinsot au Chapitre V de son livre de 1847 intitulé "Considérations générales sur la traduction des problèmes en algèbre. De la multiplicité des solutions, et de l'association ou de la dissociation des solutions multiples". "L'algèbre est une langue sans doute", écrit Cournot, "mais une langue dont nous ne sommes pas maîtres, comme nous pourrions l'être d'une langue d'origine conventionnelle, parce que l'algèbre est aussi une science ayant sa construction propre, son objet dans des idées, dans des rapports que l'esprit humain ne crée pas arbitrairement de toutes pièces" ([12] p.78). Pour illustrer son propos Cournot traite complètement trois exemples pris hors du domaine de la géométrie qui est étudiée, dit-il, dans les chapitres suivants, "avec beaucoup de développements".

Les deux premiers exemples, les seuls que nous examinerons, sont empruntés à la théorie des chances, "dans un ordre de spéculations tout aussi abstraites que celles de la géométrie peuvent l'être".

Passons rapidement sur le premier exemple que Cournot avait déjà traité en 1838 [10] et 1843 [11], il concerne la théorie des jugements. Dans un tribunal de cinq juges supposés indépendants et de même "véracité" x, ou probabilité de bien juger, la probabilité k d'un jugement unanime est liée à x par l'équation :

$$(1) \qquad x^5 + (1-x)^5 = k \ ,$$

qui permet, comme l'avait suggéré Laplace en 1816, de calculer x lorsqu'on connaît sur un grand nombre de jugements, le nombre de ceux qui ont été rendus à l'unanimité, chiffre donné par les statistiques judiciaires.

L'équation (1) a quatre racines dont deux imaginaires, et deux comprises entre 0 et 1 de part et d'autre de 1/2. Cournot conclut que dans ce cas l'algèbre se trouve en accord avec la "nature de la question". En revanche pour un tribunal de 4 juges, si l'on cherche à calculer x à partir de la probabilité k que les juges rendront un jugement nul, l'équation (1) sera remplacée par l'équation

$$(2) \qquad 6x^2(1-x)^2 = k$$

qui cette fois a quatre racines réelles dont une négative et l'autre supérieure à un. "Donc, conclut Cournot, il n'y a plus ici ce parfait accord que nous remarquions tout à l'heure ; et en effet on ne voit pas de raison pour qu'un tel accord subsiste nécessairement", conclusion fort judicieuse quelque curieuse qu'elle puisse nous paraître à bien des égards.

Le deuxième exemple est "au fond le même que celui qui a pour objet de déterminer la probabilité de la durée des descendances masculines ou des familles, problème dont M. Bienaymé s'est occupé", il est reproduit en appendice. Cette fois-ci, comme l'écrit Cournot, "non seulement il y a une racine algébrique étrangère à la question, mais la solution du problème d'abord attachée à l'une des racines algébriques, la quitte brusquement pour s'attacher à l'autre". C'est ce que Bienaymé soulignait à la fin de sa communication de 1845 : "Il y a une sorte de discontinuité dans toute cette affaire. Non seulement il y a trop de racines mais on doit pour déterminer la probabilité de destruction des familles quitter brusquement l'un pour s'attacher à l'autre". Le 'désaccord' est ici aggravé d'un crime contre la continuité. Il est vraisemblable que c'est ce défaut de continuité, dont Bienaymé s'étonnait, qui a attiré l'attention de Cournot, sans doute l'unique lecteur attentif de la note de Bienaymé, et qui l'a incité à introduire l'exemple de la durée des familles dans ce Chapitre V. Il est probable que Cournot, ayant lu la note de Bienaymé, lui ait demandé des précisions sur cette curiosité rare d'un désaccord discontinu et que Bienaymé lui ait alors montré sa démonstration que Cournot, en la reproduisant, a sauvé de l'oubli.

Notons que ce n'est pas la première fois que Cournot utilisait les résultats, souvent ésotériques, de Bienaymé pour illustrer ses spéculations ; il l'avait fait abondamment en 1843 dans l'Exposition de la Théorie des Chances [11], il le fera encore en 1875 dans son dernier ouvrage "Matérialisme, vitalisme, rationalisme" [13], dans lequel il applique aux décimales de π, "l'un des curieux théorèmes de mon excellent ami, M.J. Bienaymé, de l'Académie des Sciences", paru en 1874 ([22] p.124-128). On se rapportera à ([22] p.13) pour une discussion des rapports entre Bienaymé et Cournot, rapports qui, soulignons-le, ont toujours été empreints de la plus grande estime réciproque et d'une amitié sans faille, autant qu'on puisse le savoir.

Pour ce qui est de la démonstration proprement dite, on notera qu'elle est exactement identique, aux notations près, à celle proposée par D.G. Kendall dans ([24] p.233-235) qui va jusqu'à relever la remarque de Bienaymé sur l'étrange discontinuité, objet principal de l'intérêt et des commentaires de Cournot.

Cournot utilise plus loin ([12] p.96-98) les particularités de l'exemple de la durée des familles, pour répondre à Poinsot. Dans cette question, le problème est parfaitement posé et sa solution $q = \lim q_n$ avec $q_{n+1} = f(q_n)$ est "arithmétiquement très déterminée" et néanmoins tout ne peut s'écrire en algèbre ; aussi parfaite qu'elle le soit, la langue algébrique traduira le problème par l'équation $q = f(q)$ dont l'ambiguïté est irréductible. "Concluons donc que l'algèbre, par la nécessité de sa constitution propre, en tant que théorie, ramène à tel degré déterminé de généralité, quand on y applique l'algèbre, des questions ou des définitions qui ont intrinsèquement un degré de généralité différent, le seul que devraient admettre un raisonnement parfait et une langue parfaite".

Les nombres et l'espace sont de "nature si différente" qu'ils ne font jamais que "s'imiter" sans pouvoir se confondre, se correspondre sans véritablement s'accorder.

2. BIENAYMÉ ET LA DURÉE DES FAMILLES

Les origines de l'intérêt de Bienaymé pour le problème de la durée des familles ont été clairement décrites par D.G. Kendall, Heyde et Seneta [24] n°6, [22]. Au risque d'obscurcir la question, nous pouvons y ajouter les éléments suivants. Tout commence en effet avec le curieux livre de Thomas Doubleday, paru en 1842, sur "la véritable loi de la population..." dont l'auteur fit hommage à l'Académie des Sciences Morales et Politiques de l'Institut de France. Cette Académie rétablie en 1832 par Louis-Philippe avait repris l'essentiel des idées de la haute administration éclairée de l'Ancien Régime : libéralisme économique et contrôle statistique des populations. Certains de ses membres s'étaient entichés de statistiques et entendaient même en traiter à leur manière et sans en référer à l'Académie des Sciences qui possédait alors, seule, le droit de juger en dernier ressort de la valeur scientifique des mémoires statistiques, ce qu'elle faisait par l'intermédiaire du prix Montyon de statistique qu'elle attribuait chaque année depuis 1819 [6]. L'Académie des Sciences ne méprisait nullement la statistique d'observation non plus que la statistique administrative dont elle avait encouragé les premiers établissements, mais elle estimait déplacées les conclusions hâtives, les prétentions théoriques et de façon générale l'excès d'enthousiasme dont faisaient preuves certains activistes tels Villermé et Benoiston de Châteauneuf, membres tous deux de l'Académie des Sciences Morales et Politiques qui, sans algèbre ni analyse, tiraient des chiffres de la statistique, des lois aussi choquantes que celle (proposée par Guerry) liant le développement de la criminalité à celui de l'instruction publique ([31] et [20] p.58-59) ou aussi étonnantes que les lois de Doubleday qui faisaient s'éteindre les familles les plus riches et se multiplier les plus pauvres.

Laplace, Fourier, Poisson et Cournot, pourtant armés de l'analyse la plus moderne qui soit, étaient tombés les premiers dans les pièges innombrables qui protégeaient encore la science statistique. Aussi avaient-ils d'autant moins d'indulgence pour les "statistiques exhubérantes" qui faisaient alors recette (voir [6] pour une analyse précise des mémoires couronnés par le prix Montyon). Quant à Bienaymé, dès son élection à l'Académie des Sciences en 1852, il maintiendrait jusqu'à sa mort les jurys du prix Montyon dans la tradition laplacienne d'une statistique soumise au contrôle du calcul des probabilités, qui n'accordait aux observateurs que le seul rôle d'observer et réservait aux seuls savants le privilège de remonter aux causes et aux lois en utilisant, le cas échéant, la théorie de Laplace.

C'est ainsi que Benoiston de Châteauneuf avait reçu le prix Montyon de statistique en 1824 pour un mémoire bien documenté sur les enfants trouvés mais se l'était vu refuser en 1826 pour un mémoire plus théorique sur les tables de mortalité de Villermé, l'un des fondateurs des Annales d'hygiène publique, ne fut jamais couronné par l'Académie des Sciences (voir [6]).

Pour en revenir à l'extinction des familles, rappelons que c'est Villermé qui, le samedi 12 août 1843, présenta "au nom de l'auteur, M. Thomas Doubleday, un exemplaire de son ouvrage ayant pour titre : "De la véritable loi de la population considérée dans ses rapports avec les moyens de subsistance" (en anglais), et fit "une communication verbale de cet ouvrage" qui parut en 1844 dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences Morales et Politiques (voir [24]). Qui lut le "rapport" de Villermé ? Certainement Benoiston de Châteauneuf et les autres académiciens moraux présents le 12 août, parmi lesquels Lakanal (1762-1845) organisateur de l'Instruction Publique Républicaine en 1794, peut-être aussi Littré (1801-1881) qui savait et lisait tout, traducteur d'Hippocrate et de Pline, membre de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres, peut-être même Bienaymé, esprit curieux et érudit, mais qui ne devait avoir qu'une estime limitée pour les travaux de l'Académie des Sciences Morales et Politiques.

D.G. Kendall, Heyde et Seneta ont suggéré que Bienaymé avait pu lire le mémoire de Benoiston de Châteauneuf "sur la durée des familles nobles de France" dont l'auteur fit une première lecture le 31 août 1844 à l'Académie des Sciences Morales. Il n'existe, à notre connaissance, aucune trace écrite de cette première lecture "à la suite de laquelle MM. Passy, Berriat St-Prix, Rossi, Piraud, Villermé, Amédée Thierry, Michelet, C^{te} Portalis présentèrent successivement des observations" (procès-verbal de l'Académie déposés aux Archives de l'Institut). Le 15 février 1845, Benoiston de Châteauneuf donna une "seconde lecture" de son mémoire. "A la suite de cette lecture, MM. Berriat St-Prix, Villermé, Passy, de Rémusat présentèrent quelques observations. Ce mémoire étant destiné à faire partie du recueil de l'Académie, l'impression en fut votée au scrutin secret à l'unanimité". Cette fois-ci le mémoire de Benoiston de Châteauneuf fut effectivement imprimé et même plusieurs fois, cf. [24], mais la première date de publication que nous ayons été capables d'établir avec certitude est celle du 30 avril 1845 (donc après la communication de Bienaymé), lorsque parut la première partie du mémoire au "Moniteur Universel" (p.1141-1142), les deux autres parties paraissant au même endroit le 6 mais 1845 (p.1209-1210) et le 9 mai 1845 (p.1254-1255). Il ne semble donc pas que Bienaymé ait pu lire le mémoire de Benoiston de Châteauneuf, les Comptes-rendus de 1845 de l'Académie n'étant parus, quant à eux, qu'en 1846 puisqu'ils contiennent tous les mémoires de 1845 jusqu'au mois de décembre inclus.

Il existe cependant une autre piste, d'ailleurs relevée par D.G. Kendall ([24] p.232) ; Bienaymé utilise en effet dans sa "communication" l'expression "ce qu'on a nommé des famille fermées" qui est employée par Littré dans un long texte introductif au "Cours" d'A. Comte publié en 1845 et réédité en 1852 [27] : "Les classes fermées n'ont pas la puissance de s'étendre, ni, par conséquent, celle de se réparer ; et, les destructions accidentelles survenant, la diminution numérique y est inévitable" ([27] p.14). Littré est d'ailleurs le seul lexicographe français à retenir ce sens du participe passé "fermé" dans son dictionnaire [28]. Le texte de Littré (comme d'ailleurs celui de Benoiston de Châteauneuf) est très remarquable à tout point de vue, il aurait pu servir de motivation principale à Bienaymé si ce dernier avait pu avoir un accès facile au texte dont il s'agit, or c'est précisément le cas puisque ledit texte est paru en six extraits dans le National des 22, 25, 26, 29 novembre 1844 et 3 et 4 décembre 1844. Il n'est donc pas impossible que ce soit Littré plus que Benoiston de Châteauneuf qui ait incité Bienaymé à examiner le problème de l'extinction des familles fermées et à démontrer le théorème critique, d'autant qu'il pouvait de cette façon régler certains comptes qu'il est peut-être opportun de rappeler ici.

Littré, comme il l'écrit ([9] p.180) avait été "subjugué" par le Cours de Philosophie positive publié par Auguste Compte (1798-1857) entre 1830 et 1842 [8] : "L'ouvrage d'Auguste Compte me saisit tout entier. Incapable de trouver par moi-même la solution d'un grand problème philosophique, j'étais capable de la reconnaître dès qu'elle me fut montrée". Pour Littré, Compte avait eu le mérite immense d'"étendre la méthode positive à l'ensemble de la connaissance humaine" c'est-à-dire d'"incorporer l'ensemble des études morales et sociales dans la science positive, faisant ainsi cesser le partage provisoire entre la philosophie et les sciences particulières", découverte essentielle, dont il importait au plus haut point de porter à la connaissance du public les "résultats définitifs", ce que Littré s'obligea de faire en publiant dès 1844 une longue introduction à la philosophie positive dans le National, important quotidien républicain, fondé par Thiers en 1830, auquel il collaborait. Il avait en cela quelque mérite puisque la critique philosophique et la presse en général avaient jusqu'alors ignoré complètement l'œuvre de Compte qui deviendrait pourtant à partir de 1880 la philosophie officielle de la III[e] République mais dont l'accès était rendu difficile par la prolixité et la lourdeur de style d'un auteur doté par ailleurs d'un caractère peu accomodant.

Dans son premier article du 22 novembre 1844 Littré traite "de la question philosophique telle qu'elle peut être posée de notre temps". Il y a, selon Littré qui suit Compte, dans tous les ordres de la connaissance un fond limité de lois constantes qu'il appartient à la philosophie positive de mettre en lumière. L'étude des sociétés humaines n'échappe pas à cette règle : "Pour concevoir la théorie sociale, il faut se familiariser avec l'idée que des causes plus ou moins générales, et placées en dehors de l'action individuelle, agissent dans le sein des sociétés. Ces causes produisent des résultats que le raisonnement aurait été absolument inhabile à prévoir, et qui ne se révèlent que par le temps et l'expérience". Et Littré donne six exemples de tels "résultats" que "l'histoire commence à produire".

1. *L'extinction des familles fermées*

"Toutes les aristocraties... toutes les noblesses d'Europe ne se sont maintenues que par des adjonctions..." suivent alors les exemples classiques, les citoyens romains selon Tacite, les spartiates de Lycurgue, etc...

2. *La prolifération des peuples les plus pauvres*
"La misère tend à faire pulluler en nombre infini des existences chétives", l'exemple de l'Irlande étant particulièrement "frappant".

On aura reconnu les deux lois de Doubleday qui ne figurent pas dans Compte ; le troisième exemple en revanche est typiquement comtien.

3. *La vitesse de transmission de la civilisation d'un peuple à l'autre*
"Il faut du temps pour qu'une nation sauvage s'assimile les idées d'une nation civilisée, et un temps d'autant plus long que la distance entre les deux est plus grande", les peuplades du nord de l'Amérique et les gaulois fournissant des exemples simples d'une telle situation.

Le quatrième exemple est très peu comtien.

4. Les statistiques judiciaires qui "offrent l'exemple d'une remarquable constance dans les faits d'un ordre moral" depuis leur publication régulière en France à partir de l'année judiciaire 1825.

Les deux derniers exemples sont de stricte obédience comtienne.

5. La "stabilité croissante des civilisations supérieures" qui conduit à l'extension "inévitable" de la civilisation européenne.

Enfin

6. *La domination inéluctable du "spéculatif"*
"Du fond d'études spéculatives et de combinaisons abstraites sortent des puissances bien supérieures à tout l'emportement, à toute la fougue des multitudes".

On aura remarqué que Littré mêle aux exemples comtiens d'autres les 1, 2 et 4 empruntés aux statistiques en vogue pour lesquelles Compte n'éprouvait, comme on le sait (e.g. [33] p.295, [31] p.155-156) que très peu d'intérêt, leur reprochant sans doute de n'être pas assez spéculatives et de manquer d'universalité et de détermination, d'autant que son aversion irréductible pour le calcul des probabilités (e.g. [35] p.195-196) restreignait beaucoup la capacité qu'il aurait pu avoir de dominer abstraitement les multitudes statistiques.

Ainsi Littré que Compte reconnaissait comme "l'homme qui a le plus complètement saisi et apprécié l'ensemble de la nouvelle philosophie ([9] note 24) introduisait dans l'œuvre du Maître, de son propre chef et sans que celui-ci en prenne ombrage, comme résultat-type de la méthode positive des lois de "simple statistique" ([33] p.295) telle la loi de l'extinction des familles fermées qui, il est vrai, suivant Littré, ne souffre pas d'exception, et se trouve être presque aussi déterminée que la loi des vitesses de propagation des civilisations.

Quoiqu'il en soit, il y avait là pour Bienaymé une occasion unique de montrer comment les "combinaisons abstraites" des chances peuvent régir la "marche des générations", et comment la loi d'extinction des familles fermées peut s'énoncer comme un théorème de mathématiques absolument spéculatif, redonnant ainsi à la théorie des probabilités une positivité que Compte avait le front de lui contester absolument.

Bienaymé connaissait fort bien Auguste Compte. Ce dernier en effet était entré en 1814 à l'École Polytechnique, une année avant Bienaymé, très brillant élève il avait été l'organisateur en 1816 du chahut qui avait servi de prétexte au licenciement de tous les élèves de l'École, Bienaymé y compris, dont le mauvais esprit irritait considérablement le pouvoir d'alors.

Il n'est donc pas impossible que Bienaymé ait suivi, de près ou de loin, la carrière philosophique mouvementée de son ancien condisciple et qu'il ait voulu profiter de la maladresse volontaire d'un "disciple indiscipliné" (voir [9]) pour assurer la suprématie des méthodes probabilistes sur tout autre système, comme d'ailleurs il le fera avec une absolue détermination au cours des nombreuses polémiques qui ont jalonné sa propre carrière, (voir [22]), tout en reconnaissant qu'"on sera toujours de toute nécessité contraint de revenir à la réflexion de

Gibbon : "The laws of probability so true in general, so fallacious in particular" ([4] p.77, et [19] p.5) et en admettant finalement avec Cicéron ([4] p.33, et Tusc. 2,2) "Pour moi qui m'en tiens au probable, je n'ai pas la prétention d'aller au-delà du vraisemblable et je suis prêt à combattre sans obstination l'opinion d'autrui comme à voir sans colère que l'on combatte la mienne".

3. BIENAYMÉ, FRÉCHET ET LES "SEMI-INVARIANTS DE THIELE".

Maurice Fréchet (1878-1973), l'un des pères de "l'Analyse générale" a, parallèlement à ses cours d'analyse, enseigné le calcul des probabilités et la statistique pendant près de trente ans, d'abord à Strasbourg de 1921 à 1929, puis à Paris notamment dans le cadre de la Chaire de Calcul des Probabilités et Physique Mathématique où il succéda en 1940 à E. Borel (1871-1956) jusqu'à sa retraite en 1949. Fréchet avait du goût pour l'histoire des sciences, particulièrement pour l'histoire des mathématiciens français ; c'est lui qui fonda en novembre 1948 le Séminaire d'Histoire des Mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, qui fonctionne toujours actuellement.

Chargé par Borel d'écrire deux volumes sur les "Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités" ([15], [16]) dans le cadre du vaste "traité du calcul des probabilités et ses applications" qu'il avait entrepris, Fréchet, avec l'aide de ses très nombreux correspondants internationaux, s'essaya à l'exercice périlleux des attributions de paternité pour chacune des notions qu'il était amené à introduire. Ses ouvrages restent encore maintenant de précieux auxiliaires pour les recherches bibliographiques portant sur la période 1920-1950.

C'est ainsi que, l'un des premiers, Fréchet suggéra ([15] p.77) d'appeler égalité de Bienaymé l'égalité

$$\text{"var}\,(X_1 + \ldots + X_n) = \text{var}\,(X_1) + \ldots + \text{var}\,(X_n)\text{"}$$

que l'on trouve effectivement en 1852 chez Bienaymé, (cf. [22] p.89) mais que l'on trouve également, comme on le sait, chez Laplace, Gauss, Poisson ou Cournot bien avant cette date.

Fréchet fut le premier auteur français à proposer d'appeler inégalité de Bienaymé, l'inégalité que l'on sait, avec sans doute cette fois-là plus de raison (cf. [5], [22]) sans d'ailleurs beaucoup de succès puisque dans la plupart des livres français actuels on appelle inégalité de Tchébycheff ou de Bienaymé-Tchébycheff, l'inégalité de Bienaymé.

Fréchet pourtant l'un des fondateurs avec Hadamard de l'école parisienne de "théorie des événements en chaîne", (l'actuelle théorie des chaînes de Markov) ne semble pas s'être intéressé aux travaux de Bienaymé sur la multiplication en chaîne des familles fermées.

En revanche, la correspondance que Fréchet entretint avec E.C. Molina et dont une partie se trouve déposée aux Archives de l'Académie des Sciences [17], montre que Fréchet avait cherché à établir la priorité de Bienaymé dans l'introduction de ce que l'on appelait dans les années 30 les semi-invariants de Thiele et qu'on connaît actuellement pour le nom de cumulants.

E.C. Molina (1877-1964), "switching engineer" à la Compagnie Bell est bien connu des historiens du calcul des probabilités pour ses travaux sur Laplace qu'il avait étudié "with a zeal amounting to worship" comme l'écrivait Savage dans une lettre à Fréchet du 16.01.1961. Répondant à Fréchet, Molina écrivait en effet le 03.03.1935 : "I have not had the good fortune to see the paper by Bienaymé anticipating Thiele's semi-invariants. However on page 262 vol.1 of Lacroix's famous old three volumes treatise on the diff. and int. calculus we have the analytical relations equivalent to the semi-invariants...", cette réponse de Molina semble avoir convaincu Fréchet qui ne parla plus d'attribuer les semi-invariants de Thiele à Bienaymé, ce en quoi il eut sans doute tort, comme nous l'expliquons rapidement.

La référence de Molina à Lacroix est parfaitement exacte. Dans ([26] n°97) Lacroix déduit de l'égalité :

$$e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

les relations : $B = \beta A$
$2C = \beta B + 2\gamma A$
$3D = \beta C + 2\gamma B + 3\delta A$
.....

qui sont essentiellement celles qui lient moments et cumulants. Cependant Bienaymé en 1852 semble bien être le premier à avoir montré les propriétés des cumulants et l'usage qu'on peut en faire en calcul des probabilités. Dans ([4] p.44-45) Bienaymé écrit en effet : si e est une v.a. de moments $\mu_k = E(e^k)$:

$$E\left[e^{i\alpha\varepsilon}\right] = \sum \frac{i^k}{k!} \mu_k \alpha^k$$

et si on "rétablit cette suite en exponentielle" c'est-à-dire si on écrit :

$$E\left[e^{i\alpha\varepsilon}\right] = e^{ik_1 \alpha + k_2 \frac{i^2\alpha^2}{2} + \dots}$$

on a alors :

$$k_1 = \mu_1$$
$$k_2 = \mu_2 - \mu_1^2 \quad (= \text{var } \varepsilon)$$
$$k_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$$
....

relations que Thiele introduira en 1903 (cf. [36] n°22 p.188).
Bienaymé montre ensuite que les coefficients k jouissent (comme la variance et contrairement aux autres moments centrés ou non) de la propriété d'additivité : si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ sont indépendants de même loi que ε :

$$k_j (\Sigma\, \alpha_i \varepsilon_i) = (\Sigma\, \alpha_i^j)\, k_j (\varepsilon)$$

ajoutant (p.45) que "rien ne serait plus facile que de supposer la loi de probabilité variable d'une observation à l'autre" ce qui conduit à la formule :

$$k_j (\Sigma\, \alpha_i X_i) = (\Sigma\, \alpha_i^j)\, k_j (X_i) \qquad \text{pour des } X_i \text{ indépendantes,}$$

formule donnée par Thiele (^36] n°29 p.203).
Sur ce point on verra ([22] p.68).
Tout ceci d'ailleurs essentiellement pour rappeler le souvenir du grand astronome-actuaire-statisticien danois que fut Thorwald Nicolai Thiele (1838-1910), professeur d'astronomie à l'Université de Copenhague, qui, en dépit d'une vue très basse, publia en 1903 une remarquable théorie des observations rééditée en 1931 ; sur lui on consultera [29].

BIBLIOGRAPHIE

[1] d'ALEMBERT J., (1755), "Équation", *Encyclopédie*, vo.5.
[2] BIENAYMÉ I.J., (1838), "Probabilité des jugements et des témoignages. Sur les erreurs de la méthode suivie dans le calcul de la probabilité des témoignages et des jugements". *L'institut* 235, 6, 207-208.
[3] BIENAYMÉ I.J., (1845), "De la loi de multiplication et de la durée des familles", *L'Institut*, 589, 13, 131-132. Reprinted at the end of [24].
[4] BIENAYMÉ I.J., (1852), "Mémoire sur les probabilités des erreurs d'après la méthode des moindres carrés", *J. Math. Pures Appl.* (1), 17, 33-78.
[5] BIENAYMÉ I.J., (1853), "Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés", *C.R. Acad. Sci. Paris* 37, 5-13. *J. Math. Pures Appl.* (2) 12, 158-176.
[6] BRIAN E., (1990), *La statistique académique pendant la Restauration. Le prix Montyon de l'Académie Royale des Sciences de 1817 à 1831*, thèse, Paris, EHESS.
[7] CAVAILLÈS J. (1940), "Du collectif au pari, à propos de quelques théories récentes sur les probabilités", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 139-163.
[8] COMTE A., (1830-1842), *Cours de philosophie positive*, 6 tomes, Paris. Réédition, Paris, Hermann, 1975.
[9] COUMET E., (1982), "La philosophie positive d'E. Littré", *Revue de Synthèse* (3), n°106-108, 177-214.
[10] COURNOT A.A., (1838), "Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire", *J. Math. Pures Appl.* (1), 3, 257-334.
[11] COURNOT A.A. (1843), *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, Paris, Hachette. Réédition Paris, Vrin, 1984.
[12] COURNOT A.A. (1847), *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, Paris, Hachette. Réédition Paris, Vrin 1989.
[13] COURNOT A.A. (1875), *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*, Paris, Hachette. Réédition Paris, Vrin, 1979.
[14] DOUBLEDAY T., (1842), *The True Law of Population shewn to be connected with the Food of the People*, London.
[15] FRÉCHET M. (1937), *Généralités sur les probabilités. Éléments aléatoires*, Paris, Gauthier-Villars. 2e édition, ibid., 1950.
[16] FRÉCHET M., (1938), *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Paris, Gauthier-Villars. 2e édition, ibid. 1952.
[17] FRÉCHET M., *Correspondance et papiers divers* (1900-1973), Archives de l'Académie des Sciences, Paris.
[18] GALTON F. and WATSON H.W., (1874), "On the probability of extinction of families", *J.R. Anthropol. Inst.*, 4, 138-144.
[19] GIBBON E., (1814), *Miscellaneous Works*, t.1, London.
[20] GUERRY A.M. (1864), *Statistique morale de l'Angleterre comparée avec la statistique morale de la France*, Paris, Baillère et fils.
[21] HEYDE C.C. and SENETA E., (1972), "The simple branching process...", *Biometrika*, 59, 680-683. Reprinted in [25].
[22] HEYDE C.C. and SENETA E., (1977), *I.J. Bienaymé. Statistical theory anticipated*, New York, Springer Verlag.
[23] KENDALL D.G. (1966), "Branching process since 1873", *J. Lond. Math. Soc.*, 41, 385-406. Reprinted in [25], 383-404.
[24] KENDALL D.G., (1975), "The genealogy of genealogy : branching processes before (and after) 1873", *Bull. Lond. Math. Soc.*, 7, 225-253.
[25] KENDALL D.G. and PLACKETT R.L. (eds), (1977), *Studies in the History of Probability and Statistics*, volume 11, London, Griffin.

[26] LACROIX S.F., (1810), *Traité du calcul différentiel et intégral*, 2e édition, tome 1, Paris.
[27] LITTRÉ E., (1845), *De la philosophie positive*, Paris. Réédité dans *Conservation, révolution et positivisme*, 1ère édition 1852, Paris, 1879.
[28] LITTRÉ E., (1859-1872), *Dictionnaire*, Paris.
[29] NIELSEN A.V., (1974), "T.N. Thiele", *Dictionary of Scientific Biography*, 13, New York, Scribner's.
[30] POINSOT L., (1845), *Réflections sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Paris, Bachelier et *J. Math. Pures Appl.* (1), 10.
[31] PORTER T.M., (1986), *The Rise of Statistical Thinking* 1820-1900, Princeton University Press.
[32] ROTA G.C., (1990), "Les ambiguïtés de la pensée mathématique", *Gazette des Mathématiciens*, 45, 54-64.
[33] SHEYNIN O.B., (1986), "Quetelet as a Statistician", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 36, 4, 281-325.
[34] STEFFENSEN J.F., (1930), "On Sandsynlingheden for at Afkommet uddor", *Mat. Tidsskrift* B1, 19-23.
[35] STIGLER S.M., (1986), *The History of Statistics. The measurement of Uncertainty before 1900*, Belknap Press of Harvard University Press.
[36] THIELE T.N. (1903), *Theory of Observations*, London. Reprinted in *Ann. Math. Stat.*, 2, 1931, 165-307.
[37] WEIL A., (1940), "Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration", *Revue Scientifique*, 4, 201-208.

APPENDICE

COURNOT (1847), p.83-86

36. Proposons-nous encore cette autre question : deux joueurs, Pierre et Paul, entrent au jeu ; Pierre qui n'a qu'un écu le donne à Paul pour avoir le droit de tirer dans une urne qui contient des billets blancs, des billets portant le n°1 et des billets portant le n°2 ; s'il tire un billet blanc, Paul ne lui rend rien, et la partie est finie à ce premier coup ; s'il tire un billet n°1, Paul lui rend un écu : il en rend deux si Pierre a amené un billet n°2. Dans tous les cas le billet extrait est remis dans l'urne, les conditions du sort devant rester les mêmes à chaque tirage.

Au second coup, Pierre expose successivement de la même manière chacun des écus qu'il a reçus de Paul par suite du résultat du premier coup. La partie peut finir à ce second coup, parce que les écus exposés seront successivement perdus, et que Paul ne rendra rien. Au cas contraire, les écus reçus de Paul par suite des résultats du second coup seront successivement exposés dans un troisième coup, et ainsi de suite. On demande les probabilités $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, que la partie finira, et que Pierre sera dépouillé au plus tard à l'issue du 1er tour, du 2ème, du 3ème, ..., du nème coup.

Appelons k_0, k_1, k_2 les probabilités respectives des tirages d'un billet blanc, d'un billet n°1 et d'un billet n°2, de sorte qu'on ait :

$$k_0 + k_1 + k_2 = 1, \qquad [1]$$

et formons le polynôme :

$$k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 \qquad [\alpha]$$

la probabilité p_1 est évidemment égale à k_0 ; la probabilité p_2 est la valeur que prend le polynôme $[\alpha]$ quand on y remplace α par $k_0 = p_1$; la probabilité p_3 est la valeur que prend ce même polynôme quand on y remplace α par p_2, et ainsi de suite. La forme du polynôme $[\alpha]$ montre que la suite

$$p_1, p_2, p_3, \text{ etc.}, \qquad [p]$$

prolongée à l'infini, se compose de termes positifs qui vont toujours en croissant, sans jamais égaler l'unité. Donc ces termes convergent vers une certaine limite positive y, plus petite que 1, ou tout au plus égale à 1, et dont on obtiendra la valeur en faisant dans l'équation

$$p_n = k_0 + k_1 p_{n-1} + k_2 p^2_{n-1}$$

$p_n = p_{n-1} = y$, ce qui donnera

$$y = k_0 + k_1 y + k_2 y^2$$

ou bien en vertu de l'équation [1],

$$k_2 y^2 - (k_0 + k_2)\, y + k_0 = (y - 1)\,(k_2 y - k_0) = 0 \;;$$

de sorte que, si l'on désigne par y', y'' les deux tacines, il viendra

$$y' = 1, \; y'' = \frac{k_0}{k_1}.$$

Remarquons maintenant que Paul jouera à chaque coup avec avantage, ou à jeu égal, ou avec désavantage, suivant qu'on aura :

$$k_1 + 2k_2 < 1, \quad k_1 + 2k_2 = 1, \quad k_1 + 2k_2 > 1,$$

conditions dont l'expression se réduit, en vertu de l'équation [1], à

$$k_1 < k_0, \quad k_2 = k_0, \quad k_2 > k_0 .$$

Dans le premier cas, la valeur de y'' surpasse 1 et ne peut convenir à la question ; c'est la valeur de y' qui y satisfait, quelles que soient d'ailleurs les valeurs numériques de k_0, k_2. Au second cas, les deux valeurs de y', y'' deviennent égales et satisfont indifféremment à la question. Au troisième cas enfin, ce n'est plus la valeur constante de y', mais bien celle de y'' qui y satisfait, puisqu'il est visible que la probabilité de la ruine finale de Pierre doit pouvoir devenir aussi petite qu'on le voudra, par l'attribution d'une valeur suffisamment petite au coefficient k_0. Ainsi, dans ce problème, non seulement il y a une racine algébrique étrangère à la question, mais la solution du problème, d'abord attachée à l'une des racines algébriques, la quitte brusquement pour s'attacher à l'autre.

On peut généraliser l'énoncé de la question en supposant dans l'urne des billets portant les n°3, 4, etc., dont le tirage entrainerait pour Paul l'obligation de rendre à Pierre 3, 4 écus, etc. ; ou même, sans emprunter de considérations étrangères à l'arithmétique pure, on peut supposer que la loi de formation des nombres $[p]$, au lieu de dépendre du polynôme $[\alpha]$, dépend du polynôme

$$k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + k_3\alpha_3 + \dots + k_m\alpha^m,$$

dans lequel les coefficients $k_0, k_1, \dots, k_m$ sont liés par l'équation

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = 1.$$

La limite y est alors l'une des racines de l'équation

$$k_m y^m + k_{m-1} y^{m-1} + \dots - (k_0 + k_2 + \dots + k_m)\, y + k_0 = 0.$$

L'une des racines y' est toujours égale à 1 ; une autre y'' est toujours positive et > ou < 1, suivant qu'on a

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m < \text{ou} > 1 \;;$$

les autres racines sont négatives ou imaginaires et constamment étrangères au problème arithmétique de la détermination de la limite des quantités $[p]$, pour laquelle il faut prendre, tantôt la racine y' et tantôt la racine y'', ainsi qu'on l'a expliqué sur le cas le plus simple[2].

[2] Le problème énoncé dans le texte est au fond le même que celui qui a pour objet de déterminer la probabilité de la durée des descendances masculines ou des familles, problème dont M. Bienaymé s'est occupé.