MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BRIGITTE LE ROUX

Sur la construction d'un protocole additif

Mathématiques et sciences humaines, tome 114 (1991), p. 57-62

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1991__114__57_0>

Math. Inf. Sci. hum., (29e année, n°114, 1991, p.57-62)

SUR LA CONSTRUCTION D'UN PROTOCOLE ADDITIF

Brigitte LE ROUX[1]

RÉSUMÉ — *Dans cet article, on donne l'expression numérique du protocole additif de référence sur le croisement pondéré de deux facteurs, pour d'une part un protocole multinumérique, d'autre part un tableau de contingence ternaire. On donne un algorithme de calcul et on montre que, pour un tableau de contingence ternaire, la mesure additive de référence s'obtient à partir de l'analyse des correspondances d'un tableau marginal binaire en mettant en éléments supplémentaires les deux autres tableaux marginaux binaires.*

SUMMARY — On the construction of an additive protocol.
In this paper, we give a numerical expression of a reference additive protocol on the weighted crossing of two factors for a multinumerical protocol and for a ternary contingency table. We give an algorithm for computing this protocol ; for a ternary contingency table, we prove the reference additive measure is obtained from the correspondence analysis of a binary marginal table putting the other two marginal tables as supplementary elements.

Soient A et B deux ensembles finis, $n_{AB} = (n_{ab})_{a\in A, b\in B}$ une mesure–effectifs sur le produit cartésien $A \times B$ de masse totale n (avec $n = \sum\limits_{a\in A}\sum\limits_{b\in B} n_{ab}$) et $f_{AB} = (f_{ab})_{a\in A, b\in B}$ la mesure de fréquences associée (avec $f_{ab} = n_{ab}/n$). Dans toute la suite, on suppose que cette mesure est strictement positive : $\forall (a,b) \in A\times B : n_{ab} > 0$.

On considère l'espace euclidien, noté $\mathbb{R}^{AB}$, des fonctions numériques sur $A \times B$, muni du f_{AB}–produit scalaire, noté $\langle . | . \rangle$, défini par :

$$\forall u^{AB} \in \mathbb{R}^{AB}, \forall v^{AB} \in \mathbb{R}^{AB} : \langle u^{AB} | v^{AB} \rangle = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} f_{ab} u^{ab} v^{ab}$$

On note $\mathcal{X}^A$ le sous–espace de $\mathbb{R}^{AB}$ des fonctions sur $A\times B$ constantes sur B : $\forall u^{AB} \in \mathcal{X}^A$: $u^{ab} = u^a$ (u^{ab} ne dépend pas de b), et on notera $\overset{\vee}{u}{}^A$ une telle fonction, ou simplement u^A (sauf ambiguïté). Ce sous–espace $\mathcal{X}^A$ est isomorphe à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^A, f_A)$ des fonctions sur A muni du produit scalaire :

$$\forall u^A \in \mathbb{R}^A, \forall v^A \in \mathbb{R}^A : \langle u^A | v^A \rangle = \sum_{a\in A} f_a u^a v^a \quad \text{avec } f_a = \sum_{b\in B} f_{ab}$$

De même, on note $\mathcal{X}^B$ le sous–espace des fonctions sur $A\times B$ constantes sur A (c'est–à–dire ne dépendant pas de a), fonctions que l'on notera $\overset{\vee}{u}{}^B$.

De plus, on note $\mathcal{X}^{A+B} = \mathcal{X}^A + \mathcal{X}^B$ le sous–espace des fonctions sur $A\times B$ qui se décomposent en la somme d'une fonction ne dépendant que de A et d'une fonction ne dépendant que de B.

◇ *Notations.* On utilisera dans toute la suite la notation transitionnelle (cf. Benzécri [1980] et Rouanet & al [1987]) avec indices hauts pour les variables et indices bas pour les mesures (dualité entre mesures et variables); en particulier on notera $f_a^b = n_{ab}/n_a$ et $f_b^a = n_{ab}/n_b$.

---

[1] Groupe Mathématique et Psychologie - CNRS URA 1201, Université René Descartes, 12, rue Cujas - 75005 Paris.

1. RAPPELS

Analyse des comparaisons

Soient deux facteurs croisés A et B et soit $x^{AB} = (x^{ab})_{a\in A, b\in B}$ un protocole numérique défini sur le croisement $A\times B$ pondéré par la mesure–effectifs n_{AB}. Notons $x^A = (x^a)_{a\in A}$ le protocole dérivé sur A tel que $x^a = \sum_{b\in B} f_b^a x^{ab}$ et $x^B = (x^b)_{b\in B}$ le protocole dérivé sur B tel que $x^b = \sum_{a\in A} f_a^b x^{ab}$; on appellera x^A et x^B les *marges* de x^{AB}.

DÉFINITION 1. On dit qu'un protocole est un ***protocole d'interaction*** sur $A\times B$ si et seulement si ses marges sont nulles.

Si on note $x^{A.B}$ le protocole d'interaction attaché à x^{AB}, on a :

$$\sum_{a\in A} f_b^a x^{a.b} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{b\in B} f_a^b x^{a.b} = 0$$

Cette caractérisation du protocole d'interaction en tant que protocole doublement centré découle directement de la formalisation linéaire (cf. Rouanet & Lépine [1976]; Le Roux & Rouanet [1984]; Le Roux, Rouanet & Taylor [1988]); le protocole d'interaction est, par définition, orthogonal à toute mesure sur A et à toute mesure sur B (remontées sur $A\times B$)*.

Rappelons que l'on définit la remontée d'une mesure $u_A = (u_a)_{a\in A}$ sur A en une mesure $\check{u}^A$ sur $A\times B$ par $\check{u}^A = (u_a f_b^a)_{a\in A, b\in B}$, et que la mesure de Dirac de a, notée δ_A^a est telle que $\delta_a^a = 1$ et $\delta_{a'}^a = 0$ pour $a' \neq a$ (on définit de même la mesure de Dirac de b).

Pour que $x^{A.B}$ soit un protocole d'interaction, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall a : x^{A.B} \perp \check{\delta}_A^a \\ \forall b : x^{A.B} \perp \check{\delta}_B^b \end{cases}$$

où $\check{\delta}_A^a$ (resp. $\check{\delta}_B^b$) désigne la remontée sur $A\times B$ de δ_A^a (resp. δ_B^b). On a donc : $\forall a \;:\; \sum_{a'\in A}\sum_{b\in B} x^{a.b}\delta_{a'.b}^a f_b^{a'} = 0$; d'où $\forall a \;:\; \sum_{b\in B} x^{a.b} f_b^a = 0$ et de même $\forall b \;:\; \sum_{a\in A} x^{a.b} f_a^b = 0$.

DÉFINITION 2. On appelle ***protocole additif de référence*** le protocole sur $A\times B$ qui s'écrit comme la somme d'un protocole sur A et d'un protocole sur B et qui a les mêmes marges x^A et x^B que le protocole x^{AB}.

Si on note $x^{A\oplus B}$ le protocole additif de référence attaché à x^{AB}, on a :

$$\sum_{a\in A} f_b^a x^{a\oplus b} = x^b \quad \text{et} \quad \sum_{b\in B} f_a^b x^{a\oplus b} = x^a$$

Un tel protocole est projection orthogonale de x^{AB} sur $\mathcal{X}^{AB}$; c'est donc le protocole sur $A\times B$ s'écrivant comme la somme d'un protocole sur A et d'un protocole sur B le plus proche, au sens des moindres carrés orthogonaux, du protocole x^{AB}.

Le protocole d'interaction est le protocole des écarts au protocole additif de référence :

$$x^{A.B} = x^{AB} - x^{A\oplus B}$$

Nous nous proposons ici de donner une expression numérique du protocole additif de référence ainsi qu'un algorithme itératif de détermination.

Analyse des correspondances

Si $\mathbb{R}_A$ désigne l'espace euclidien des mesures sur A, muni de la métrique du Φ^2 de centre f_A, on rappelle (cf. Benzécri [1980] et Le Roux & Rouanet [1986]) que l'analyse des correspondances de la mesure n_{AB} conduit à l'analyse spectrale de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_A$, noté *Som*, défini par :

---

*Cette caractérisation a été mise en œuvre dans les programmes VAR3 (1975), VARUNIG (1979), EyeLID (1987).

$$\begin{array}{rccl} Som: & \mathbb{R}_A & \longrightarrow & \mathbb{R}_A \\ & u_A & \longmapsto & \sum_{b\in B} f_b \langle u_A | f_A^b \rangle\, f_A^b \end{array}$$

La matrice de cet endomorphisme, par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^A$, a pour terme général $Som_{a'}^a = \sum_{b\in B} (f_{a'}^b - f_{a'})(f_b^a - f_b)$. Cet endomorphisme a pour vecteur propre associé à la valeur propre triviale nulle la mesure f_A et L vecteurs propres associés à des valeurs propres non nulles $\lambda_\ell = \xi_\ell^2$, avec donc $L \leq \min(/A/, /B/) - 1$ et $0 < \xi_\ell \leq 1$.

L'endomorphisme Som' de $\mathbb{R}_B$ défini par :

$$\begin{array}{rccl} Som': & \mathbb{R}_B & \longrightarrow & \mathbb{R}_B \\ & u_B & \longmapsto & \sum_{a\in A} f_a \langle u_B | f_B^a \rangle\, f_B^a \end{array}$$

a L valeurs propres non–nulles égales à $\lambda_\ell = \xi_\ell^2$ et une valeur propre nulle de multiplicité $/B/ - L$. On a : $Som'^b_{b'} = \sum_{a\in A} (f_{b'}^a - f_{b'})(f_a^b - f_a)$.

Soient $(z_\ell^A, z_\ell^B)_{\ell\in L}$, les L variables principales réduites issues de l'analyse des correspondances de la mesure n_{AB} asssociées aux valeurs propres non–nulles. On rappelle que les variables principales z_ℓ^A et z_ℓ^B sont respectivement vecteurs propres des transposés des endomorphismes Som et Som' et qu'elles vérifient les relations suivantes :

- Formules de transition : $\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{a\in A} f_a^B z_\ell^a & = \xi_\ell z_\ell^B \\ \sum_{b\in B} f_b^A z_\ell^b & = \xi_\ell z_\ell^A \end{array} \right.$
- $\mathrm{Corr}(z_\ell^A | z_{\ell'}^B) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \ell \neq \ell' \\ \xi_\ell & \text{si} & \ell = \ell' \end{array} \right.$
- Formule de reconstitution : $f_{ab} = f_a f_b \; (1 + \sum_{\ell\in L} \xi_l z_\ell^a z_\ell^b)$

Décomposition orthogonale de $\mathbb{R}^{AB}$

Le sous–espace $\mathcal{X}^A$ de $\mathbb{R}^{AB}$ se décompose en la somme f_{AB}–orthogonale des trois sous–espaces $\mathcal{X}$, $\mathcal{E}^A$ et $\mathcal{N}^A$ suivants :

- $\mathcal{X}$ est le sous–espace, de dimension 1, des fonctions constantes sur $A \times B$.
- $\mathcal{E}^A$ est le sous–espace, de dimension L, engendré par les L variables principales (centrées) sur A (non–nulles).
- $\mathcal{N}^A$ est le sous–espace supplémentaire orthogonal dans $\mathcal{X}^A$ de $\mathcal{X} + \mathcal{E}^A$, c'est–à–dire le sous–espace (de dimension $/A/ - L - 1$) des variables y^A sur A telles que $\sum_{a\in A} f_a\, y^a = 0$ (variables centrées) *et* telles que $\sum_{a\in A} f_a y^a z_\ell^a = 0$. Ce sous–espace est donc engendré par les variables sur A (f_A–centrées) associées à la valeur propre nulle.

De même, on décompose f_{AB}–orthogonalement $\mathcal{X}^B$ en l'espace $\mathcal{X}$ des fonctions constantes (dimension 1), l'espace $\mathcal{E}^B$ des variables principales (centrées) sur B non triviales (de dimension L) et l'espace $\mathcal{N}^B$ des variables sur B (f_B–centrées) associées à la valeur propre nulle (de dimension $/B/ - L - 1$); on notera $\mathcal{E}^{A+B} = \mathcal{E}^A + \mathcal{E}^B$ (de dimension $2L$).

PROPRIÉTÉ 1. Si $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $n_{ab} > 0$: $\mathcal{X}^A \cap \mathcal{X}^B = \mathcal{X}$ et $\mathcal{E}^A \cap \mathcal{E}^B = \emptyset$.

PROPRIÉTÉ 2. Le sous–espace $\mathcal{X}^{A+B}$ est la somme f_{AB}–orthogonale de $\mathcal{X}$, $\mathcal{E}^{A+B}$, $\mathcal{N}^A$ et $\mathcal{N}^B$:

$$\mathcal{X}^{A+B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{E}^{A+B} \oplus \mathcal{N}^A \oplus \mathcal{N}^B$$

PROPRIÉTÉ 3. $\forall y^A \in \mathcal{N}^A : \sum_{a\in A} f_a^b y^a = 0$.

En effet : $y^A = \sum_{\ell > L} < y^A | z_\ell^A > z_\ell^A$; or d'après les formules de transition : $\forall \ell > L$ on a : $\sum_{a\in A} f_a^b z_\ell^a = 0$; d'où la propriété.

PROPRIÉTÉ 4. La famille de fonctions

$$\left(\frac{z_\ell^A + z_\ell^B}{\sqrt{2(1+\xi_\ell)}}, \frac{z_\ell^A - z_\ell^B}{\sqrt{2(1-\xi_\ell)}}\right)_{\ell\in L}$$

est une base orthonormée de $\mathcal{E}^{A+B}$

En effet $\|z_\ell^A + z_\ell^B\|^2 = \|z_\ell^A\|^2 + \|z_\ell^B\|^2 + 2\langle z_\ell^A | z_\ell^B\rangle = 2 + 2\xi_\ell$
et $\langle z_\ell^A + z_\ell^B | z_{\ell'}^A + z_{\ell'}^B\rangle = 0$ si $\ell \neq \ell'$ (cf. 1-b).

2. LEMMES

LEMME 1. La projection orthogonale de x^{AB} sur $\mathcal{X}^A$ est égale à x^A; sa projection sur $\mathcal{X}^B$ est égale à x^B.

En effet : $\forall u^A \in \mathcal{X}^A$, on a :

$$\begin{aligned} < x^{AB} - x^A | u^A > &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} f_{ab}(x^{ab} - x^a)u^a \\ &= \sum_{a\in A} f_a x^a u^a - \sum_{a\in A}\Big(\sum_{b\in B} f_{ab} x^a u^a\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

LEMME 2. La projection orthogonale de x^{AB} sur $\mathcal{E}^{A+B}$, notée x_L^{AB}, vaut :

$$x_L^{AB} = \sum_{\ell\in L} \frac{1}{1-\xi_\ell^2}\Big[(\alpha_\ell - \xi_\ell\beta_\ell) z_\ell^A + (\beta_\ell - \xi_\ell\alpha_\ell) z_\ell^B\Big]$$

$$\text{avec} \quad \alpha_\ell = \sum_{a\in A} f_a x^a z_\ell^a \quad \text{et} \quad \beta_\ell = \sum_{b\in B} f_b x^b z_\ell^b$$

En effet, la projection orthogonale de x^{AB} sur le sous-espace, noté $\mathcal{E}_\ell^{A+B}$, engendré par z_ℓ^A et z_ℓ^B vaut :

$$\langle x^{AB} | z_\ell^A + z_\ell^B\rangle \frac{z_\ell^A + z_\ell^B}{2(1+\xi_\ell)} + \langle x^{AB} | z_\ell^A - z_\ell^B\rangle \frac{z_\ell^A - z_\ell^B}{2(1-\xi_\ell)}$$

D'après le lemme 1, $\langle x^{AB} | z_\ell^A\rangle = \langle x^A | z_\ell^A\rangle$ et $\langle x^{AB} | z_\ell^B\rangle = \langle x^B | z_\ell^B\rangle$.

D'où en posant : $\alpha_\ell = \langle x^A | z_\ell^A\rangle = \sum_{a\in A} f_a x^a z_\ell^a$ et $\beta_\ell = \langle x^B | z_\ell^B\rangle = \sum_{b\in B} f_b x^b z_\ell^b$, cette projection est égale à :

$$\left[\frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{2(1+\xi_\ell)} + \frac{\alpha_\ell - \beta_\ell}{2(1-\xi_\ell)}\right] z_\ell^A + \left[\frac{\alpha_\ell + \beta_\ell}{2(1+\xi_\ell)} - \frac{\alpha_\ell - \beta_\ell}{2(1-\xi_\ell)}\right] z_\ell^B = \frac{1}{1-\xi_\ell^2}\left[(\alpha_\ell - \xi_\ell\beta_\ell\right] z_\ell^A + \left[(\beta_\ell - \xi_\ell\alpha_\ell\right] z_\ell^B$$

Les sous-espaces $\mathcal{E}_\ell^{A+B}$ étant deux à deux orthogonaux (cf. propriété 4), le lemme 2 est démontré.

Corollaire : la variance de x_L^{AB} vaut : $\sum_{\ell\in L} \frac{\alpha_\ell^2 + \beta_\ell^2 - 2\xi_\ell\alpha_\ell\beta_\ell}{1-\xi_\ell^2}$

LEMME 3. $\forall x^A \in \mathbb{R}^A : \sum_{a\in A} f_a^B x^a = \widehat{x} + \sum_{\ell\in L} \xi_\ell\alpha_\ell z_\ell^B \qquad \forall x^B \in \mathbb{R}^B : \sum_{b\in B} f_b^A x^b = \widehat{x} + \sum_{\ell\in L} \xi_\ell\beta_\ell z_\ell^A$

$$\text{avec} \quad \alpha_\ell = \sum_{a\in A} f_a x^a z_\ell^a \text{ et } \alpha_\ell = \sum_{a\in A} f_a x^a z_\ell^a$$

En effet, on a la décomposition orthogonale $\mathcal{X}^A = \mathcal{X} \oplus \mathcal{E}^A \oplus \mathcal{N}^A$, on peut donc écrire :

$$x^A = \widehat{x} + \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell z_\ell^A + y^A.$$

Or $\sum_{a\in A} f_a^b \widehat{x} = \widehat{x}$ et, d'après les formules de transition, $\sum_{a\in A} f_a^b z_\ell^a = \xi_\ell z_\ell^b$.

On a donc $\sum_{a\in A} f_a^b\big(\sum_{\ell\in L} \alpha_\ell z_\ell^a\big) = \sum_{\ell\in L} \xi_\ell\alpha_\ell z_\ell^b$; de plus puisque $y^A \in \mathcal{N}^A$, on a (propriété 3) $\sum_{a\in A} f_a^b y^a = 0$, d'où le lemme 3.

3. PROTOCOLE ADDITIF DE RÉFÉRENCE

Protocole multinumérique

THÉORÈME. Le protocole additif de référence associé à (x^{AB}, n_{AB}), noté $x^{A\oplus B}$, est égal à :

$$\hat{x} + (Id - Som)^{-1}(x^A - \sum_{b\in B} f_b^A x^b) + (Id - Som')^{-1}(x^B - \sum_{a\in A} f_a^B x^a)$$

Démonstration. L'endomorphisme $Id - Som$ de $\mathbb{R}^A$ admet les mêmes sous-espaces invariants que Som associés aux valeurs propres $1-\lambda$; on a donc :

- $\mathcal{X} \oplus \mathcal{N}^A$ sous-espace propre de $Id - Som$ associé à la valeur propre 1 :
$$(Id - Som)(y^A) = y^A \quad \text{et} \quad (Id - Som)(\hat{x}) = \hat{x}$$
- $\mathcal{E}^A$ sous-espace invariant de $Id - Som$ associé aux valeurs propres $(1-\xi_\ell^2)$:
$$(Id - Som)(z_\ell^A) = (1-\xi_\ell^2)\, z_\ell^A$$

Puisque $0 < \xi_\ell < 1$, l'endomorphisme $Id - Som$ a toutes ses valeurs propres strictement positives donc est inversible : $(Id - Som)^{-1}$ admet $\mathcal{X} \oplus \mathcal{N}^A$ comme sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (avec la multiplicité $/A/ - L + 1$) et $\mathcal{E}^A$ comme sous-espace invariant associé aux valeurs propres $(1/(1-\xi_\ell^2))_{\ell\in L}$. Il en est de même de $Id - Som'$.
x^A se décompose en : $x^A = \hat{x} + \sum_{\ell\in L} \alpha_\ell z_\ell^A + y^A$, donc : $(Id - Som)^{-1}(x^A) = \hat{x} + \sum_{\ell\in L} \frac{1}{1-\xi_\ell^2}\alpha_\ell z_\ell^A + y^A$

D'après le lemme 3, $\sum_{b\in B} f_b^A x^b = \hat{x} + \sum_{\ell\in L} \xi_\ell \beta_\ell z_\ell^A$, donc : $(Id - Som)^{-1}(\sum_{b\in B} f_b^A x^b) = \hat{x} + \sum_{\ell\in L} \frac{\xi_\ell}{1-\xi_\ell^2}\beta_\ell z_\ell^A$
et : $(Id - Som)^{-1}(x^A - \sum_{b\in B} f_b^A x^b) = \sum_{\ell\in L} \frac{1}{1-\xi_\ell^2}(\alpha_\ell - \xi_\ell\beta_\ell)\, z_\ell^A + y^A$

De même : $(Id - Som')^{-1}(x^B - \sum_{a\in A} f_a^B x^a) = \sum_{\ell\in L} \frac{1}{1-\xi_\ell^2}(\beta_\ell - \xi_\ell\alpha_\ell)\, z_\ell^B + y^B$;

d'où : $x^{A\oplus B} = \hat{x} + \sum_{\ell\in L}\left(\frac{\alpha_\ell - \xi_\ell\beta_\ell}{1-\xi_\ell^2} z_\ell^A + \frac{\beta_\ell - \xi_\ell\alpha_\ell}{1-\xi_\ell^2} z_\ell^B\right) + y^A + y^B$; expression qui, d'après le lemme 2, s'écrit encore : $x^{A\oplus B} = \hat{x} + x_L^{A+B} + y^A + y^B$, donc $x^{A\oplus B}$ est bien la projection orthogonale de x^{AB} sur $\mathcal{X}^{A+B}$ (cf. propriété 2).

ALGORITHME ITÉRATIF.

$$x^{A\oplus+B} = \hat{x} + \sum_{r=0}^{\infty}(x_r^A + x_r^B) \text{ avec : } \left\{\begin{array}{lcllcl} x_0^A &=& x^A - \hat{x} & x_0^B &=& x^B - \hat{x} \\ x_r^A &=& -\sum_{b\in B} f_b^A x_{r-1}^b & x_r^B &=& -\sum_{a\in A} f_a^B x_{r-1}^a \end{array}\right.$$

En effet $(Id - Som)^{-1} = Id + \sum_{r=1}^{\infty} Som^r$. Or $Som(x_r^A) = \sum_{a'\in A}\sum_{b\in B} x_r^{a'} f_{a'}^b f_b^A$ (puisque $\sum_{a\in A} f_a x_r^a = 0$); donc : $Som(x_r^A) = -\sum_{b\in B} f_b^A x_{r+1}^b = x_{r+2}^A$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} (Id + \sum_{r=1}^{\infty} Som^r)(x^A - \sum_{b\in B} x^b f_b^A) &=& x_0^A + x_1^A \\ && + x_2^A + x_3^A \quad (r=1) \\ && + x_4^A + x_5^A \quad (r=2) \\ && + \\ && \vdots \\ && + x_r^A + x_{r+1}^A \\ && \vdots \\ && = \sum_{r=0}^{\infty} x_r^A \end{array}$$

et de même pour l'autre terme, d'où : $x^{A\oplus B} = \hat{x} + \sum_{r=0}^{\infty}(x_r^A + x_r^B)$

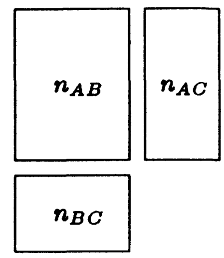
Les facteurs A et B étant croisés, la convergence de l'algorithme est assurée; en effet dans ce cas l'endomorphisme Som de $\mathbb{R}^A$ et donc l'endomorphisme Som' de $\mathbb{R}^B$ ont toutes leurs valeurs propres positives et strictement inférieures à 1.

Tableau de contingence ternaire

Dans le cas d'un tableau de contingence ternaire $n_{(AB)C}$ sur $(A \times B) \times C$, la mesure additive de référence $n_{(A\oplus B)C}$ asociée à $n_{(AB)C}$ s'obtient à partir de l'analyse des correspondances de la mesure n_{AB} avec en éléments supplémentaires les mesures n_{AC} et n_{BC}. On a :

$$n_{a\oplus bc} = \frac{n_{ab}\, n_{ac}}{n_a} + \frac{n_{ab}\, n_{bc}}{n_b} - \frac{n_{ab}\, n_c}{n} + \frac{n_{ab}}{n} \sum_{\ell \in L} \frac{\xi_\ell}{1-\xi_\ell^2} \left[n_c\, \alpha_\ell^c (z_\ell^a - \xi_\ell\, z_\ell^b) + n_c\, \beta_\ell^c (z_\ell^b - \xi_\ell\, z_\ell^a) \right]$$

où α_ℓ^c et β_ℓ^c sont les coordonnées factorielles des profils supplémentaires $f_A^c = (n_{ac}/n_c)_{a\in A}$ et $f_B^c = (n_{ab}/n_c)_{b\in B}$ correspondant respectivement aux tableaux supplémentaires n_{AC} et n_{BC}.



L'analyse des correspondances de la mesure n_{AB} avec en éléments supplémentaires n_{AC}, associe au profil supplémentaire f_A^c la coordonnée α_ℓ^c obtenue à partir de la formule de transition :

$$\alpha_\ell^c = \sum_{a\in A} f_a^c z_\ell^a = \tfrac{1}{f_c} \sum_{a\in A} f_a f_c^a z_\ell^a$$

De même, pour le profil supplémentaire f_B^c, on a :

$$\beta_\ell^c = \sum_{b\in B} f_b^c z_\ell^b = \tfrac{1}{f_c} \sum_{b\in B} f_b f_c^b z_\ell^b$$

On a donc : $\langle f_c^A | z_\ell^A \rangle = f_c \alpha_\ell^c = \alpha_{c\ell}$, et de même $\langle f_c^B | z_\ell^B \rangle = f_c \beta_\ell^c = \beta_{c\ell}$.

En remplaçant, dans le lemme 2, x^A par f_c^A, x^B par f_c^B, α_ℓ par $\alpha_{c\ell}$ et β_ℓ par $\beta_{c\ell}$, on obtient l'expression de la projection orthogonale de la variable transitionnelle f_c^{AB} sur $\mathcal{E}^{A+B}$:

$$\sum_{\ell\in L} \tfrac{1}{1-\xi_\ell^2} \left[(\alpha_{c\ell} - \xi_\ell \beta_{c\ell}) z_\ell^a (\beta_{c\ell} - \xi_\ell \alpha_{c\ell}) z_\ell^b \right]$$

D'autre part la projection de f_c^{AB} sur $\mathcal{N}^A$ est égale à : $f_c^A - f_c - \sum_{\ell\in L} \alpha_{c\ell}\, z_\ell^A$

De même la projection de f_c^{AB} sur $\mathcal{N}^B$ est égale à : $f_c^B - f_c - \sum_{\ell\in L} \beta_{c\ell}\, z_\ell^B$

On a donc :

$$f_c^{A\oplus B} = f_c + \tfrac{1}{1-\xi_\ell^2} \Big[(\alpha_{c\ell} - \xi_\ell \beta_{c\ell}) z_\ell^A + (\beta_{c\ell} - \xi_\ell \alpha_{c\ell}) z_\ell^B \Big] + (f_c^A + f_c - \sum_{\ell\in L} \alpha_{c\ell}^c z_\ell^A) + (f_c^B + f_c - \sum_{\ell\in L} \beta_{c\ell} z_\ell^B)$$

soit : $$f_c^{A\oplus B} = f_c^A + f_c^B - f_c + \sum_{\ell\in L} \frac{\xi_\ell}{1-\xi_\ell^2} \left[(\xi_\ell \alpha_{c\ell} - \beta_{c\ell}) z_\ell^A + (\xi_\ell \beta_{c\ell} - \alpha_{c\ell}) z_\ell^B \right]$$

d'où : $$f_c^{A\oplus B} = f_c^A + f_c^B - f_c + \sum_{\ell\in L} \frac{\xi_\ell \alpha_{c\ell}}{1-\xi_\ell^2} (\xi_\ell z_\ell^A - z_\ell^B) + \sum_{\ell\in L} \frac{\xi_\ell \beta_{c\ell}}{1-\xi_\ell^2} (\xi_\ell z_\ell^B - z_\ell^A)$$; et donc la propriété.

BIBLIOGRAPHIE

BENZÉCRI J.-P. & F., *L'Analyse des Données : Analyse des correspondances*, tome 1, Paris, Dunod, (1980).

DAUDIN J.-J., An iterative algorithm for analysis of variance, *Int. J. Bio. medical Computing*(10), (1979), 507-518.

LE ROUX B., ROUANET H., TAYLOR C., The Descriptive Analysis of Interactions in a Ternary Frequency Table, chap. 8 in *Rapport ATP franco-britannique* (E.S.R.C. et C.N.R.S. contrat 95 5191), (1988).

LE ROUX B., ROUANET H., L'analyse multidimensionnelle des données structurées, *Math. Sci. hum.* (1984), 5-18.

LE ROUX B., ROUANET H., Contrastes essentiels et directions principales d'un nuage, *Math. Sci. hum.*, 95, (1986), 71-81.

ROUANET H., LÉPINE D., Structures linéaires et Analyse des comparaisons, *Math. Sci. hum.* 56, (1976), 5-46.

ROUANET H., LE ROUX B., BERT M.-C., *Statistiques en Sciences Humaines : Procédures naturelles*, Paris, Dunod (1987).