MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

CLAUDE LE CONTE DE POLY-BARBUT

Le diagramme du treillis permutoèdre est intersection des diagrammes de deux produits directs d'ordres totaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 112 (1990), p. 49-53
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1990__112__49_0>

Math. Inf. Sci. hum. (28e année, n°112, *1990*, p.49-53)

LE DIAGRAMME DU TREILLIS PERMUTOÈDRE EST INTERSECTION DES DIAGRAMMES DE DEUX PRODUITS DIRECTS D'ORDRES TOTAUX

Claude LE CONTE de POLY - BARBUT[1]

RÉSUMÉ - *Deux codages sont utilisés sur l'ensemble des permutations ou ordres totaux sur un ensemble fini à* n *éléments et à chacun de ces codages est associé un produit direct d'ordres totaux. On démontre que le diagramme du treillis permutoèdre (ou ordre de Bruhat faible sur le groupe symétrique S_n) est intersection des diagrammes des deux produits directs de* n-1 *ordres totaux à 2,3,...,*n *éléments.*

ABSTRACT - The diagram of the permutohedron lattice is the intersection of the diagrams of two direct products of linear orders.
Two codes are used on the set of permutations or linear orders on a n*-elements set. To each of them is associated a direct product of total orders of 2,3,...,*n *elements. It is shown that the diagram of the permutohedron lattice (or weak Bruhat order on the symmetric group S_n) is the intersection of the diagrams of the two direct products of* n-1 *linear orders.*

INTRODUCTION

L'ensemble des $n!$ ordres totaux - ou permutations - sur un ensemble fini à n éléments peut être organisé, dès lors que l'on s'est fixé un ordre de référence, en treillis : le treillis permutoèdre appelé également ordre faible de Bruhat sur le groupe symétrique S_n.

Des codages permettent d'organiser les mêmes $n!$ ordres totaux en treillis produits directs de n-1 ordres totaux à 2,3,...,n éléments de même graduation que le permutoèdre.

Le diagramme du permutoèdre est intersection des diagrammes de deux tels produits directs d'ordres totaux.

LES DONNÉES

Un ensemble $A = \{a,b,...,r\}$ de n éléments et l'ensemble $\mathcal{O}$ des $n!$ permutations ou ordres totaux sur A organisé en treillis (le permutoèdre P_n) de la façon suivante : un ordre total sur A, $O = o_1,o_2,...,o_n$ est pris comme ordre alphabétique et une relation d'adjacence orientée $\prec$ sur l'ensemble des ordres totaux est définie par : $O_1 \prec O_2$ ssi O_1 et O_2 diffèrent seulement par l'échange de deux éléments consécutifs, et les éléments échangés sont dans l'ordre alphabétique dans O_1 (donc dans l'ordre antialphabétique dans O_2).

[1] C.N.R.S., C.A.M.S., 54 boulevard Raspail 75270 Paris Cedex 06.

Exemple : $A = \{a,b,c,d,e\}$, $O = abcde$

$$O_1 = e\underline{ac}bd \text{ et } O_2 = e\underline{ca}bd, \text{ d'où } O_1 \prec O_2 .$$

L'ordre obtenu par fermeture transitive de $\prec$ est le treillis permutoèdre de minimum O et de maximum l'ordre $\overline{O}$ inverse de l'ordre O ; ce treillis est étudié en détails dans [1].

LES CODAGES

Sur $\mathcal{O}$ peuvent être construits huit codages (dérivant des huit éléments du groupe diédral des transformations des permutations associé aux symétries du carré), chacun d'entre eux déterminant un produit direct de n-1 chaînes à 2,3,...,n éléments sur l'ensemble $\mathcal{O}$.
Nous utilisons deux de ces codages.

Codage C_1 *"les plus grands avant"*

Le codage $C_1(O_1)$ d'un ordre O_1 est la succession de n éléments $m_1,...,m_n$, $\in \{0,1,...,n\text{-}1\}$ où m_i est le nombre d'éléments de A placés après le ième élément de l'ordre alphabétique O, dans cet ordre alphabétique O, et avant ce même élément dans l'ordre O_1.

Exemple : O = abcd $\qquad$ O_1 = cdab $\qquad$ $C_1(O_1) = 2\,2\,0\,0$

- le premier 2 correspond aux deux éléments c et d placés après a dans O et avant a dans O_1 ;
- le deuxième 2 correspond aux mêmes éléments c et d placés après b dans O et avant b dans O_1 ;
- le premier 0 traduit le fait qu'aucun élément placé après c dans O ne se trouve avant c dans O_1.

Remarque. Le dernier terme du codage est toujours 0. On se contentera donc des n-1 premiers chiffres du codage.

Le premier terme appartient à l'ensemble $\{0,1,...,n\text{-}1\}$, le deuxième à $\{0,1,...,n\text{-}2\}$, ..., le $(n\text{-}1)^{\text{ième}}$ à $\{0,1\}$. Il y a bien $n!$ possibilités de codage correspondant aux $n!$ permutations.

Ce codage est appelé table d'inversions par Hall [2] et Knuth [3] : la somme des termes du codage $C_1(O_1)$ est le nombre de couples d'éléments de A placés dans l'ordre antialphabétique dans O_1 (couples "inversés").

La donnée de n-1 entiers obéissant aux règles précédentes permet de reconstituer un et un seul ordre total sur A (cf. [3]).

Exemple : reconstituer l'ordre O_1 tel que $C_1(O_1) = 2\,2\,0$.

En lisant la séquence 2 2 0 de droite à gauche, on reconstruit O_1 en étudiant successivement les places des éléments d, c, b, a (ordre antialphabétique)

- le 0 du codage signifie qu'aucun élément placé après c dans l'ordre O n'est avant c dans O_1. c est donc à gauche de d dans O_1 : ...c...d...,
- le 2 le plus à droite indique que deux éléments placés après b dans O sont avant b dans O_1 donc b est à droite de c et d : ...c...d...b...,
- le dernier 2 indique que deux éléments placés après a dans O sont avant a dans O_1 et : O_1 = cdab.

Les valeurs prises par C_1 se placent naturellement dans un produit direct d'ordre totaux à n, n-1, ..., 2 éléments respectivement. Notons $\underset{1}{\leq}$ l'ordre produit direct de ces n-1 ordres totaux. C_1 établit une bijection entre $\mathcal{O}$ et les éléments de ce produit direct, et induit sur $\mathcal{O}$ un ordre Π_1 produit direct d'ordres totaux, isomorphe à $\underset{1}{\leq}$:

$$O_1 \ \Pi_1 \ O_2 \Leftrightarrow C_1(O_1) \underset{1}{\leq} C_1(O_2) .$$

Deux ordres totaux O_1 et O_2 sont adjacents dans Π_1 ssi $C_1(O_1)$ et $C_2(O_2)$ sont adjacents dans $\underset{1}{\leq}$, c'est-à-dire ne diffèrent que d'une unité sur un terme du codage.

Exemple : cbad et cdab sont adjacents dans Π_1 car C_1(cbad) = 2 1 0 et C_1(cdab) = 2 2 0.

On vérifie que deux ordres O_1 et O_2 sont adjacents dans Π_1 si et seulement s'ils ne diffèrent que par l'échange de deux éléments i et j tels que entre i et j dans O_1 comme dans O_2 ne se trouvent que des éléments inférieurs à la fois à i et j dans l'ordre alphabétique O. Ces éléments échangés sont dans l'ordre alphabétique dans le plus petit des deux ordres.

Dans l'exemple précédent, entre les éléments b et d échangés se trouve l'élément a qui en effet est plus petit que b et d dans l'ordre alphabétique.

Deux ordres adjacents dans le permutoèdre vérifient cette condition puisque les éléments échangés sont consécutifs.

On en déduit le résultat : *l'ordre du permutoèdre est un sous-ordre de l'ordre produit direct* Π_1.

Codage C_2 *"les plus petits après"*

Le codage C_2 d'un ordre O_1 est la succession $p_1,...,p_n$ de n éléments de $\{0,1,...,n\text{-}1\}$, où p_i est le nombre d'éléments placés avant le ième élément de l'ordre alphabétique, dans l'ordre alphabétique, et après ce même élément dans l'ordre O_1.

Exemple : C_2(cdab) = 0 0 2 2.

Dans le codage, le premier terme qui est toujours un 0 peut être supprimé.
Au même titre que C_1 , C_2 est un codage auquel est associé un ordre Π_2 sur $\mathcal{O}$ défini par :

$$O_1 \ \Pi_2 \ O_2 \Leftrightarrow C_2(O_1) \underset{2}{\leq} C_2(O_2)$$

où $\underset{2}{\leq}$ est l'ordre produit direct des chaînes à 2,3,...,n éléments dans lequel C_2 prend ses valeurs.

Deux ordres sont adjacents dans Π_2 s'ils ne diffèrent que par l'échange de deux éléments i et j n'ayant entre eux, dans O_1 et O_2, que des éléments placés après i et j dans l'ordre alphabétique O. Le plus petit des deux est celui pour lequel i et j sont dans l'ordre alphabétique.

Ainsi adcb et cdab sont adjacents dans Π_2 car :

$$C_2\,(\text{adcb}) = 0\ 1\ 2$$
$$C_2\,(\text{cdab}) = 0\ 2\ 2.$$

Ils ne diffèrent que par l'échange de a et c et l'élément d intermédiaire est placé après a et c dans l'ordre alphabétique.

Comme on l'a remarqué pour C_1, deux éléments de $\mathcal{O}$ adjacents dans le permutoèdre sont adjacents dans Π_2. Il résulte immédiatement de ce qui précède que :

LEMME. Deux ordres sont adjacents dans le permutoèdre si et seulement si ils sont adjacents dans les deux produits directs Π_1 et Π_2, et la relation de couverture dans le permutoèdre est intersection des relations de couverture dans Π_1 et Π_2.

COROLLAIRE. Le diagramme (ou graphe de couverture) du treillis permutoèdre est intersection des diagrammes de couverture de Π_1 et Π_2.

Remarque. Le treillis permutoèdre et les treillis Π_1 et Π_2 sont gradués, et de même graduation : la hauteur d'un ordre O_1 est, dans les trois cas, le nombre de couples de A qui sont dans l'ordre antialphabétique dans O_1.

Ce résultat est utilisé par B. Leclerc [4], dans ce même numéro, pour dénombrer, par niveaux, les sommets du permutoèdre.

La figure 1 représente, dans le cas n=3, le diagramme du permutoèdre P_3 et les diagrammes de Π_1 et Π_2 correspondants.

La figure 2 représente, dans le cas n=4, le diagramme du permutoèdre P_4 (traits pleins) "injecté" dans celui de Π_2 (traits pleins et traits pointillés).

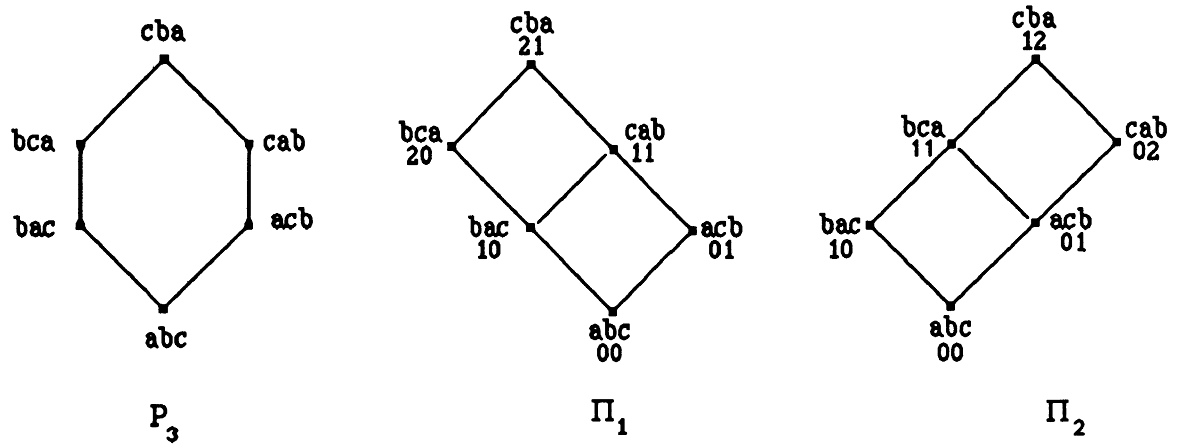

Figure 1.

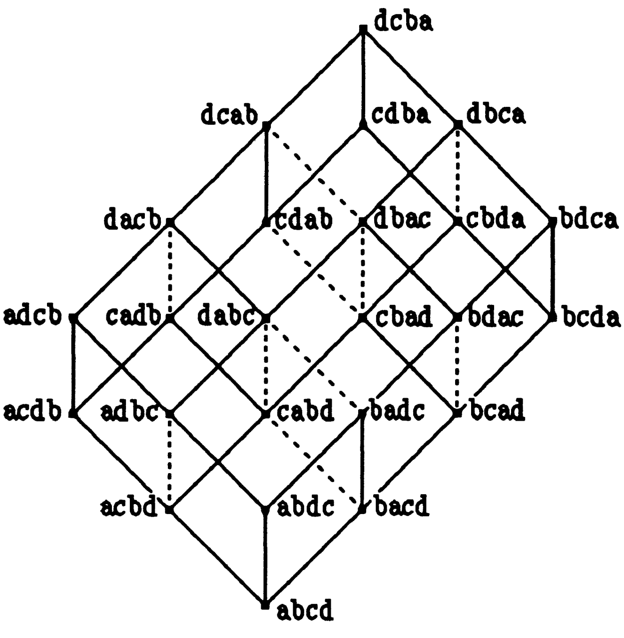

Figure 2. P_4 et Π_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUILBAUD G.Th., ROSENSTIEHL P., "Analyse algébrique d'un scrutin", *Math. Sci. hum.* 4, 1963, 9-33.

[2] HALL M., *Proc. Symp. Applied Math.* 6, American Math. Society, 1956, 203.

[3] KNUTH D.E., *The Art of Computer Programming*, vol.III, Addison Wesley, 1973, 12.

[4] LECLERC B., Sur le nombre d'éléments des niveaux des produits de chaînes et des treillis permutoèdre, *Math. Inf. Sci. hum.* 112, 1990, 37-48.