MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHEL MAURIN

Le mesurage des intervalles successifs doubles, une application des distributions bivariées à marges données

Mathématiques et sciences humaines, tome 108 (1989), p. 23-34
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1989__108__23_0>

Math. Inf. Sci. hum. (27e année, n°108, *1989*, p. 23-34).

LE MESURAGE DES INTERVALLES SUCCESSIFS DOUBLES, UNE APPLICATION DES DISTRIBUTIONS BIVARIEES A MARGES DONNEES.

MAURIN Michel *

INTRODUCTION

Comme dans les sciences physiques [Carnap] on rencontre dans les sciences de l'Homme le souci de travailler sur des nombres afin d'utiliser leurs propriétés. C'est le cas par exemple de C. Wolff (1742) qui "préconise l'introduction du nombre et de la mesure dans la recherche psychologique" [Gusdorf], de Haldane pour qui "une once d'algèbre vaut mieux qu'une tonne de mots", de Boudon pour qui "la formalisation conduit à des conséquences inaccessibles au raisonnement verbal", de Bénézé qui déclare que "d'une manière ou d'une autre il (le nombre) doit envahir les domaines qui lui sont encore étrangers" ...

Un tel souci doit naturellement s'accompagner de la recherche de conditions sous lesquelles il existe effectivement des images numériques "convenables". Il s'agit là d'une formalisation du bon sens qui se rencontre au niveau du discours, Bachelard, Cartan [Ullmo], et au niveau des développements techniques, Helmholtz, Hölder, Campbell ... [Krantz et col., Roberts]. Cette formalisation a pris un essor définitif à la fin des années 50 avec la théorie du mesurage (measurement theory), et elle constitue un outil performant pour les Sciences Humaines, notamment la psychophysique de Fechner [Falmagne 1974, Krantz et col.]. Les grandes lignes et les développements actuels sont par exemple présentés dans le numéro spécial de Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines n° 101.

Quand il s'agit de mettre en oeuvre la théorie du mesurage, une des tâches du chercheur consiste à utiliser et/ou développer des théorèmes qui l'assurent d'une représentation des données observées dans une structure mathématique. Il est donc intéressant de reconnaître ou d'adapter des théorèmes existants sous l'angle du mesurage afin de répondre aux situations expérimentales rencontrées. C'est ce qui est fait ci-dessous à propos d'une généralisation des intervalles successifs d'Adams et de Messick.

* INRETS-LEN, 109 Av. Salvador Allende, case n° 24, 69675 Bron CEDEX, FRANCE

Les intervalles successifs proprement dits s'appliquent lorsque des sujets sont soumis à une famille de stimulations et que les réponses sont recueillies avec une échelle de catégories ordonnées (paragraphe 1). Nous envisageons ici le cas de deux échelles de catégories ordonnées en réponse à une famille de stimulations, la gène et l'agressivité du bruit par exemple, et nous signalons comment dans cette situation il est possible d'acquérir en deux temps un théorème de mesurage (paragraphe 2). Ceci a pour effet de nous conduire vers les distributions de probabilités bivariées dont les marges sont connues, et vers une revue détaillée des propriétés des principales distributions de cette sorte (paragraphe 3). Le résultat principal est l'énoncé d'un théorème de mesurage pour les doubles réponses sur deux échelles de catégories, qui provient simplement de l'adaptation d'un théorème de Mardia sur les distributions de Plackett de type C (paragraphe 4). Il s'agit là d'un nouvel exemple de mesurage susceptible d'offrir des perspectives pour la psychophysique multidimensionnelle [Tiberghien, Maurin a].

1 - LES INTERVALLES SUCCESSIFS SIMPLES.

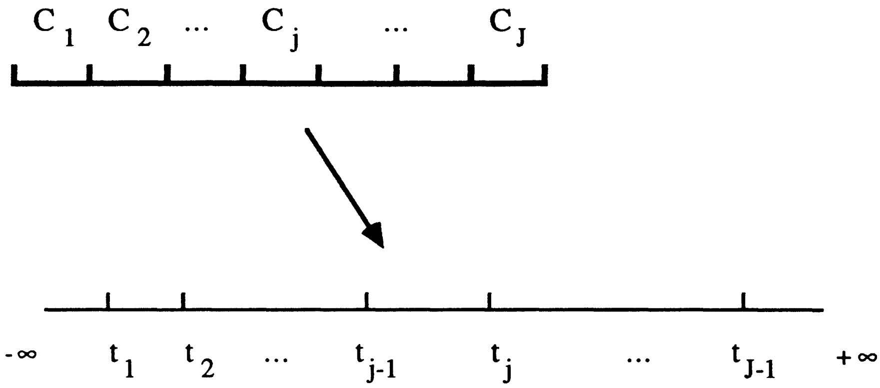
Notre contexte expérimental est celui des études sur les nuisances acoustiques dues aux moyens de transport. Bien souvent dans ces études la "gène" exprimée par les riverains est saisie par questionnaire sur des échelles de catégories ordonnées, en même temps que sont déterminés (par mesure, modélisation,...) les niveaux de bruit auxquels les riverains sont soumis [Langdon, Lassière, Schultz, Vallet et col., Vernet et col.]. La technique des intervalles successifs (simples) d'Adams et Messick est une technique de mesurage axiomatique qui se prête à cette situation ; les différentes stimulations sont notées S_i $i=1,...,I$, l'échelle de réponses comprend J catégories ordonnées notées C_j , $j=1,\ldots,J$ avec habituellement $J = 4, 5, 7 \ldots$ Les données sont le tableau des effectifs n_{ij} des réponse C_j pour une stimulation S_i , ou encore le tableau des fréquences conditionnelles $\varpi_{ij} = n_{ij} / n_{i.}$ pour chacune des stimulations.

De manière générale un théorème de mesurage conclut à l'existence d'une représentation des données si et seulement si les données en question vérifient un certain nombre de conditions (appelées les axiomes du mesurage). En l'occurence la représentation des catégories de réponses est une partition de la droite R en intervalles adjacents $[t_{j-1}, t_j]$, $j=1,\ldots,J$ (avec $t_0 = -\infty$, $t_J = +\infty$), et la représentation des stimulations sont deux applications de l'ensemble des S_i dans R et dans R_*^+. Une fonction de répartition F étant donnée, les axiomes d'Adams et Messick s'appliquent sur les données cumulées transformées $z_{ij} = F^{-1}(\pi_{ij})$ avec $\pi_{ij} = \sum_{j'=1,..,j} \varpi_{ij'}$, $i=1,\ldots,I$, $j=1,\ldots,J-1$, et s'énoncent de la manière suivante : pour tout $i=1,...,I$, $j=1,...,J-1$ il existe des réels β_{ik} et des réels positifs α_{ik} tels que :

$$z_{ij} = \alpha_{ik}\ z_{kj} + \beta_{ik} \quad , \quad \alpha_{ik} > 0\ , \quad i=1,...,I\ ,\ j=1,...,J-1\ .$$

Lorsque ils sont vérifiés, les bornes t_j qui limitent les intervalles $[t_{j-1}, t_j]$ et les images $\mu(S_i) = \mu_i$ des stimulations sont simultanément représentées sur R avec une même échelle d'intervalle, les images $\sigma(S_i) = \sigma_i$ sont représentées sur R_*^+ avec une échelle de rapport de même unité que l'échelle d'intervalle pour les t_j et μ_i [Maurin a, Suppes Zinnes].

Ces conditions signifient aussi que pour tout $i = 1,\ldots,I$ et $j = 1,\ldots,J$ les données cumulées π_{ij} suivent un modèle relatif aux probabilités de répondre avec l'une des catégories de C_1 à C_j quand le sujet est exposé à S_i. La probabilité de cet évènement est égale à $F(z_{ij}) = F((t_j-\mu_i)/\sigma_i)$. Dans cette application la fonction de répartition F provient d'un choix fait en amont, cela peut être la loi normale comme on le pensait à l'origine, ou autre [Adams Messick].



La représentation d'une échelle de catégories ordonnées

2 - LES INTERVALLES SUCCESSIFS DOUBLES.

2.1 - *Présentation.*

Nous considérons la situation où les sujets sont soumis à une famille de stimulations S_i $i=1,\ldots,I$ et fournissent deux réponses selon deux échelles de catégories différentes C^t_j $j=1,\ldots,J$ et C^u_l $l=1,\ldots,L$. Les données recueillies sont les effectifs n_{ijl} correspondant au triplet S_i, C^t_j, C^u_l, ou les fréquences de réponses $\varpi_{ijl} = n_{ijl} / n_{i..}$. Comme pour les intervalles successifs simples nous introduisons les données cumulées $\pi_{ijl} = \sum_{j'=1,\ldots,j\,;\,l'=1,\ldots,l} \varpi_{ij'l'}$ qui pour toute stimulation S_i correspondent aux réponses qui appartiennent à l'une des catégories C^t_1 à C^t_j pour la première échelle de réponse, et à l'une des catégories C^u_1 à C^u_l pour la seconde échelle, $i=1\ldots I$, $j=1\ldots J$, $l=1\ldots L$. Les données cumulées marginales sont égales à π_{ijL} et π_{iJl}.

2.2 - *La genèse de la démarche.*

Un théorème adapté à cette situation doit s'énoncer avec des axiomes relatifs aux différents jeux de données n_{ijl}, ϖ_{ijl} ou π_{ijl}. Nous commençons par exposer la genèse de la démarche retenue qui s'inspire du cas simple précédent. Pour chaque exposition respective à une stimulation S_i nous introduisons des fonctions de répartition cumulées H_{iTU}, lesquelles sont chargées de décrire les distributions conjointes de probabilité des couples de variables aléatoires (T,U) de la façon suivante $\pi_{ijl} = H_{iTU}(t_j, u_l)$. Les t_j sont les bornes qui séparent les intervalles images des catégories C^t_j, les u_l les bornes qui séparent les intervalles images des catégories C^u_l.

Puisque les axiomes de mesurage sur les données et les distributions H_{iTU} ne sont pas indépendants, il s'agit d'introduire des distributions qui se prêtent à une formulation axiomatique commode. Pour cela nous devons examiner les distributions bivariées, et afin de réduire le nombre de cas envisageables nous leur imposons quelques propriétés. Les unes sont liées à des transformations affines positives analogues à celles du cas simple ($F(z_{ij}) = F((t_j-\mu_i)/\sigma_i)$) :

$$H_{iTU}(t_j, u_l) = H_{iTU}\left(\frac{t_j - \mu_i}{\sigma_i}, \frac{u_l - \mu_i}{\sigma_i}\right) \qquad [1]$$

d'autres s'appliquent aux distributions marginales

$$H_{iTU}\left(\frac{t_j - \mu_i}{\sigma_i}, +\infty\right) = F_T\left(\frac{t_j - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad ; \quad H_{iTU}\left(+\infty, \frac{u_l - \mu_i}{\sigma_i}\right) = G_U\left(\frac{u_l - \mu_i}{\sigma_i}\right) \qquad [2]$$

Les paramètres μ_i et $\sigma_i > 0$ sont des images numériques des stimulations S_i, les applications F_T et G_U deux fonctions de répartition absolument continues définies sur R. Il existe de nombreuses familles de distributions qui vérifient ces propriétés (paragraphe 3).

Nous en déduisons les conditions nécessaires suivantes :

$$\pi_{ijL} = F_T\left(\frac{t_j - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad [3\ a] \quad ; \quad \pi_{iJl} = G_U\left(\frac{u_l - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad [3\ b]$$

et $\pi_{ijl} = H_{iTU}\left(F_T^{-1}(\pi_{ijL}),\ G_U^{-1}(\pi_{iJl})\right)$ [4] .

2.3 - *Une démarche en deux temps.*

Une telle démarche est suggérée par les relations précédentes. En effet dans un premier temps nous considérons uniquement les données marginales transformées z^t_{ij} et z^u_{il} définies à partir des relations [3]

$$z^t_{ij} = F_T^{-1}(\pi_{ijL}) = (t_j - \mu_i) / \sigma_i \qquad j=1,\dots,J-1 \qquad [3\ a']$$

$$z^u_{il} = G_U^{-1}(\pi_{iJl}) = (u_l - \mu_i) / \sigma_i \qquad l=1,\dots,L-1 \qquad [3\ b']$$

et z_{im} l'ensemble des z^t_{ij}, z^u_{il} $m=1,\dots,J+L-2$. Nous reconnaissons une forme qui permet d'énoncer, sur les z_{im}, des axiomes relatifs au mesurage des bornes t_j et u_l, $j = 1,\dots,J-1$, $l = 1,\dots,L-1$ analogues à ceux d'Adams et Messick (paragraphe 1). Cela donne ainsi la possibilité de mesurer simultanément les images μ_i, σ_i des stimulations S_i d'une part, l'ensemble des bornes t_j et u_l qui séparent les images des catégories des deux échelles C^t_j et C^u_l d'autre part. Il faut noter que cette étape ne concerne que les seuls recueils marginaux des données π_{ijL} et π_{iJl} et le choix des distributions F_T et G_U sur R.

Pour le choix de H_{iTU} proprement dit et l'acquisition d'un lot associé d'axiomes sur les données complètes, il est alors suffisant de considérer des distributions bivariées dont les marges sont connues.

Par conséquent l'analogie avec les intervalles successifs, les propriétés de départ [1] et [2] et l'enchainement d'étapes qui en résulte aboutissent à une démarche économique. Un premier choix concerne uniquement les marges de la distribution bivariée, ce qui est là un choix de même nature que celui de la fonction de répartition F dans le modèle classique des intervalles successifs. Dans un second temps nous pouvons nous limiter au seul sous-ensemble des distributions bivariées dont les marges sont données. Ci-après nous faisons la revue des principales familles de distributions de cet ensemble, et nous examinons celle(s) qui convient (conviennent) le mieux pour un énoncé d'axiomes de mesurage s'appliquant sur les données observées dans leur totalité.

3 - LES FONCTIONS DE REPARTITION DETERMINEES PAR LEURS MARGES.

3.1 - *Les principales familles.*

De manière générale ce sont les marges d'une distribution conjointe qui sont déterminées à partir de la distribution elle-même. Cependant à la suite des premiers travaux de Fréchet on s'est régulièrement préoccupé d'étudier dans R^2 des familles de distributions qui sont déterminées à l'aide de leurs distributions marginales.

i) nous rappellons les inégalités de Fréchet qui s'appliquent à toutes ces distributions [Johnson Kotz 1972, Mardia] :

$$H_{-1} = \max\{ F_T + G_U - 1 , 0 \} \leq H_{TU} \leq H_1 = \min\{ F_T , G_U \} \quad ,$$

$H_{-1}(t,u)$ et $H_1(t,u)$ constituent des bornes pour $H_{TU}(t,u)$ en tout point du plan. Ce sont également des fonctions de répartition qui possèdent les mêmes marges F_T et G_U , de même que la fonction de répartition $H_o = F_T G_U$ qui est la distribution du produit indépendant des marges. Par conséquent l'ensemble des combinaisons convexes $H_{TU} = (1- a - b) H_o + a H_1 + b H_{-1}$ avec a, b, 1- a - b positifs ou nuls est une famille de distributions bivariées dont les marges sont F_T et G_U , et qui atteint les bornes de Fréchet.

ii) d'autres distributions possèdent une expression paramétrée plus analytique, les principales familles sont les suivantes [Genest, Genest MacKay, Johnson Kotz 1972, 1977, Kimeldorf Sampson, Mardia] :

* la famille de Morgenstern : $H_{TU} = F_T \; G_U \; [1 + a\,(1 - F_T)\,(1 - G_U)] \,, \quad -1 \leq a \leq 1 \,;$

* la famille de Farlie : $H_{TU} = F_T \; G_U \; [1 + a \; f(F_T) \; g(G_U)] \,,$

les conditions sur a , f , g sont indiquées dans [Mardia] ;

* la famille de Ali Mikhail Haq : $H_{TU} = F_T\ G_U\ / [1 - a\,(1 - F_T)\,(1 - G_U)]$, $-1 \leq a \leq 1$;

* la famille de Mardia Nataf : $H_{TU} = \emptyset_2(\emptyset_1^{-1}(F_T), \emptyset_1^{-1}(G_U), \rho)$,
avec $\emptyset_2(.,.,.)$ la fonction de répartition de la loi normale à deux variables centrées réduites de coefficient de corrélation ρ, et $\emptyset_1(.)$ celle de la loi normale scalaire centrée réduite ;

* la famille de Gumbel :

$$H_{TU} = \exp\{ - [(- \ln F_T)^{\alpha + 1} + (- \ln G_U)^{\alpha + 1}]^{\frac{1}{\alpha + 1}} \} \quad , \quad \alpha \geq 0$$

$$\text{ou} \quad (- \ln H_{TU})^{\alpha+1} = (- \ln F_T)^{\alpha+1} + (- \ln G_U)^{\alpha+1} \quad ;$$

* la famille de Cook et Johnson généralisée :

$$H_{TU} = \max \{ 0 , [\frac{1}{F_T^{\alpha}} + \frac{1}{G_U^{\alpha}} - 1]^{1/\alpha} \} \quad , \quad -1 \leq \alpha \quad , \alpha \neq 0$$

$$H_{TU} = F_T\ G_U \qquad \alpha = 0 \ ;$$

* la famille de Franck :

$$H_{TU} = \frac{1}{\ln \alpha} \ln (1 + \frac{(\alpha^{F_T} - 1)(\alpha^{G_U} - 1)}{\alpha - 1}) \quad , \quad \alpha > 0$$

$$\text{ou} \quad \alpha^{H_{TU}} - 1 = \frac{(\alpha^{F_T} - 1)(\alpha^{G_U} - 1)}{\alpha - 1}$$

* la famille du type-C de Plackett définie par la condition qu'en tout point (t,u) le "birapport" est constant :

$$\frac{H_{TU}\,(1 - F_T - G_U + H_{TU})}{(H_{TU} - F_T)(H_{TU} - G_U)} = \psi \quad , \quad \psi > 0 \qquad [5]$$

* dans les exemples ci-dessus les marges F_T et G_U sont quelconques ; lorsque les marges sont des lois des extrêmes de Fréchet Fisher Tippett, il existe encore les familles particulières d'Oliveira, Sibuya, Mustafi.

3.2 - *Discussion.*
Chaque famille possède des propriétés spécifiques. Par exemple les bornes de Fréchet et la distribution produit des marges sont atteintes dans quelques cas ; pour certaines familles les expressions des courbes de régression sont connues ; les formules générales $F_{T/U} = \partial H_{TU} / \partial G_U$ et $G_{U/T} = \partial H_{TU} / \partial F_T$ qui permettent d'obtenir les fonctions de répartition des distributions conditionnelles [Mardia] conduisent dans d'autres cas à des expressions simples pour les régres-

sions-médianes ; il est également possible dans quelques familles de calculer simplement la covariance et le coefficient de corrélation entre les deux variables.

Naturellement le choix d'une famille dépend de ces propriétés particulières. Pour notre propos nous avons retenu trois critères qui tiennent compte à la fois du point de vue théorique comme le font Kimeldorf Sampson, et du point de vue pratique lié aux commodités de calcul de la question. Le premier concerne la possibilité d'atteindre les bornes de Fréchet, il est préférable en effet de disposer d'une famille qui parcourt le plus large éventail possible. Le second est relatif à la connaissance explicite des courbes de régression ou de régressions-médianes, lesquelles donnent des renseignements utiles sur les variations conjointes des variables T et U. Le dernier critère est relatif à la recherche en cours, il concerne la facilité avec laquelle une famille conduit à des jeux de conditions tels que [1] ou [4]. L'examen des familles rappelées ci-dessus donne les résultats suivants :

i) les familles de Franck, Mardia Nataf, Cook Johnson généralisée et Plackett de type C atteignent les bornes de Fréchet ;

ii) les courbes de régressions sont notamment connues pour les familles de Morgenstern, Farlie, Franck ; les courbes de régressions médianes sont connues pour les familles de Plackett de type C, Franck, et pour Mardia Nataf de manière approchée ;

iii) la famille de Morgenstern peut être mise facilement sous la forme suivante :

$$(H_{TU} - F_T \; G_U) \,/\, F_T \; G_U \; (1 - F_T)\,(1 - G_U) \;=\; a \qquad [6]$$

Cela permet d'isoler le paramètre de la famille et d'obtenir des relations simples entre les données π_{ijl}, π_{iJl} et π_{ijL}, ce qui est précisément l'objet de notre examen. Par conséquent cette famille se prête au problème, et il en est de même avec les familles de Ali Mikhail Haq et de Plackett de type C qui se mettent sous les formes algébriques simples :

Ali et col. : $$(H_{TU} - F_T \; G_U) \,/\, H_{TU} \; (1 - F_T)\,(1 - G_U) \;=\; a \qquad [7] \;;$$

Plackett-C : $$(H_{TU} - F_T \; G_U) \,/\, (H_{TU} - F_T)\,(H_{TU} - G_U) \;=\; \psi - 1 \;=\; \gamma \qquad [5'] \;.$$

Il ne semble pas qu'il soit aussi aisé d'isoler le paramètre et d'obtenir des relations simples entre les π_{ijl} pour les autres familles.

En conclusion la famille de Plackett de type C se signale à l'attention puisque c'est la seule à être bien placée pour chacun des trois critères retenus. Mais en outre nous connaissons à son sujet une assez bonne approximation du coefficient de corrélation (cf. 4.2), et surtout nous disposons pour elle d'un théorème de Mardia sous forme de condition suffisante à partir de [5] ou [5'] (cf. 4.1). Cette accumulation d'avantages techniques est très favorable et décisive, la famille de Plackett de type C est la famille que nous retenons ici.

4 - UN THEOREME DE MESURAGE POUR DEUX ECHELLES DE CATEGORIES.

4.1 - Dans les intervalles successifs doubles, les données ϖ_{ijl} sont les fréquences de réponses dans deux échelles de catégories C^t_j $j=1,...,J$ et C^u_l $l=1,...,L$ pour toute stimulation S_i $i=1,...,I$.

DÉFINITION : Un système de fréquences de réponses ϖ_{ijl} ou $\pi_{ijl} = \sum_{j'=1...j\,;\,l'=1...l} \varpi_{ij'l'}$ avec les fonctions de répartitions F_T , G_U absolument continues sur R, $z^t_{ij} = F_T^{-1}(\pi_{ijL})$ $j=1,...,J-1$, $z^u_{il} = G_U^{-1}(\pi_{iJl})$ $l=1,...,L-1$, $z_{im} = (z^t_{ij}, z^u_{il})$, $m=1,...,J+L-2$, est dit de Mardia Plackett si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$* \quad z_{im} = \alpha_{ik}\, z_{km} + \beta_{ik} \quad , \quad \alpha_{ik} > 0\ , \quad i, k=1,...,I\ , \quad m=1,...,J+L-2$$

$$** \quad (\pi_{ijl} - \pi_{ijL}\ \pi_{iJl}) \,/\, (\pi_{ijl} - \pi_{ijL})\,(\pi_{ijl} - \pi_{iJl}) = \gamma_i \quad , \quad \gamma_i > -1\ ,\ i=1,...,I,\quad j=1,...,J-1\ ,\ l=1,...,L-1.$$

THEOREME : Si un système de fréquences de réponses est un système de Mardia Plackett, les bornes t_j qui limitent les intervalles images de l'échelle C^t_j , les bornes u_l qui limitent les intervalles images de l'échelle C^u_l et les images $\mu(S_i)$ des stimulations sont simultanément représentées dans R avec une même échelle d'intervalle, les images $\sigma(S_i)$ sont représentées dans R_*^+ avec une échelle de rapport de même unité. Les données cumulées vérifient aussi

$$\pi_{ijL} = F_T((t_j - \mu_i) / \sigma_i)\ , \quad \pi_{iJl} = G_U((u_l - \mu_i) / \sigma_i) \qquad [3]$$

$$\pi_{ijl} = H_{iTU}[(t_j - \mu_i) / \sigma_i\ ,\ (u_l - \mu_i) / \sigma_i] \qquad [1]$$

avec les distributions bivariées de Plackett de type C suivantes :

$$H_{iTU} = \frac{V_i - \sqrt{V_i^2 - 4\,\psi_i\,(\psi_i - 1)\,F_T\,G_U}}{2\,(\psi_i - 1)}$$

dans laquelle $V_i = 1 + (\psi_i - 1)\,(F_T + G_U)$ et $\psi_i = \gamma_i + 1$.

Démonstration :

- Le premier point est une adaptation du théorème d'Adams et Messick sur l'ensemble des z_{im}, $m=1,...,J+L-2$;
- lorsque la condition $(H_{TU} - F_T\ G_U) / (H_{TU} - F_T)\ (H_{TU} - G_U) = \gamma$ est vérifiée en tout point, Mardia a montré l'existence et l'unicité de la distribution

$$H_{TU} = \frac{F_T + G_U}{2} + \frac{1 - \sqrt{1 + 2\gamma(F_T + G_U - 2F_T G_U) + \gamma^2 (F_T - G_U)^2}}{2\gamma}$$

ou $$H_{TU} = \frac{V - \sqrt{V^2 - 4\psi(\psi - 1)F_T G_U}}{2(\psi - 1)}$$

dont les marges sont F_T et G_U, avec $V = 1 + (\psi - 1)(F_T + G_U)$ et $\psi = \gamma + 1 > 0$ [Mardia] .

Par conséquent pour chaque i nous connaissons la distribution conjointe H_{iTU} de marges F_T et G_U ; puisque $\pi_{ijL} = F_T((t_j - \mu_i) / \sigma_i)$ et $\pi_{iJl} = G_U((u_l - \mu_i) / \sigma_i)$ nous vérifions que

$$\pi_{ijl} = H_{iTU}[(t_j - \mu_i) / \sigma_i , (u_l - \mu_i) / \sigma_i] .$$

L'unicité de chaque H_{iTU} entraine que les γ_i sont mesurés sur échelle absolue. ♦

Commentaires :
- les axiomes * de la définition sont une extension des conditions usuelles d'un système des intervalles successifs d'Adams et Messick appliquées au tableau des (z^t_{ij} , z^u_{il}) $j=1,\ldots,J-1$, $l=1,\ldots,L-1$;
- les axiomes ** sont originaux, ils peuvent être baptisés axiomes de Mardia Plackett dans cette application de la théorie du mesurage ;
- les distributions marginales F_T et G_U sont au choix de l'utilisateur de la même façon que l'est F dans les intervalles successifs classiques ;
- le choix de la distribution conjointe n'est pas de la même nature que celui des marges. Celles-ci interviennent "en marge" de l'axiomatisation alors que le choix de H_{iTU} est un choix technique lié à l'énoncé des axiomes. Le choix des marges (et de F) peut-être dû à des raisons thématiques [Thompson Singh].

4.2 - Le théorème précédent utilise un résultat de Mardia et bénéficie d'une bonne commodité pour exprimer les axiomes de mesurage ; nous rappelons les principales autres propriétés de la famille de Plackett de type-C (cf. les deux premiers critères en 3.2).

i) Les bornes de Fréchet sont atteintes dans les conditions suivantes :

$$\lim_{\psi \to 0} H_{TU} = H_{-1} , \quad \lim_{\psi \to +\infty} H_{TU} = H_1 ,$$

et pour $\psi = 1$, $H_{TU} = H_o = F_T G_U$;

ii) Les courbes de régressions-médianes ont pour expression, $(\gamma = \psi - 1)$:

$$\text{med}(U/t) = G_U^{-1}\{(1+ \gamma F_T(t)) / (\gamma + 2)\} , \quad \text{med}(T/u) = F_T^{-1}\{(1+ \gamma G_U(u)) / (\gamma + 2)\}$$

elles se coupent au point dont les coordonnées sont solutions de $F_T(t_m) = 1/2$ et $G_U(u_m) = 1/2$;

iii) Le coefficient de corrélation est égal à :

$$\mathrm{cor}\,(T,U) = \iint \; (H_{TU} - F_T\; G_U)\; dt\, du \,/\, \sigma_t\, \sigma_u \quad .$$

Cette expression n'est pas calculable dans le cas général. Cependant ce coefficient est égal à $\{\gamma(\gamma+2) - 2(\gamma+1)\ \ln(\gamma+1)\} / \gamma^2$ pour les lois marginales uniformes sur [0 1] , et Mardia a établi que c'est une bonne approximation pour des marges normales.

4.3 - Remarques complémentaires :

i) l'énoncé des axiomes se fait à partir des fréquences de réponses π_{ijl} , c'est une forme qui se prête tout à fait à des développements de mesurage probabiliste [Hamerle Tutz, Maurin b], les calculs correspondants sont en cours ;

ii) on peut généraliser encore et imaginer le cas où les réponses sont données sur plus de deux échelles de catégories $C^{tq}{}_{jq}$ q=1,...,n , n > 2. A partir de propriétés initiales analogues à [1] et [2] on obtient de la même façon un système d'Adams et Messick pour les distributions marginales, ce qui conduit en second à étudier dans R^n les distributions définies par leurs marges. Quelques distributions particulières sont connues (normales, [Cook Johnson, Johnson Kotz 1975, 1977]), et l'on sait que de façon générale le problème est résolu à l'aide des copules (++) définies sur $[0\ 1]^n$, lesquelles admettent les bornes $H_{n,-1} = \mathrm{Max}(x_1 + ... + x_n - n + 1, 0)$ et $H_{n,1} = \mathrm{Min}(x_1, ..., x_n)$, $0 \le x_q \le 1$, q=1,...,n, [Sklar]. Cependant il ne semble pas que l'on connaisse de copules dans R^n qui conduisent à des distributions comparables à celles de Plackett de type C dans R^2.

CONCLUSIONS.

Le mesurage d'observations qualitatives est une préoccupation répandue. Sur le plan technique la théorie du mesurage fait appel à des connaissances mathématiques variées pour répondre à cette attente. Pour la mise en oeuvre particulière qui est présentée ici ce sont les distributions bivariées déterminées par leurs marges qui constituent l'outil adéquat. Le résultat présenté n'est sans doute pas unique en son genre, peut-être pourrait-on développer quelque chose d'analogue avec la famille de Morgenstern, celle de Ali et col., voire avec d'autres, ou même partir de conditions initiales différentes de [1] et [2]. Cependant les distributions de Plackett de type C cumulent un grand nombre d'avantages techniques et constituent de ce fait une famille performante pour le problème abordé.

C'est un nouvel exemple d'application du mesurage. Le chercheur n'est donc pas entièrement démuni lorsqu'il désire étudier une double réponse sur échelles de catégories à un seul jeu de stimulations, et cela ouvre d'autres possibilités de développement pour la psychophysique multidimensionnelle.

++ fonction de répartition sur $[0\ 1]^n$ dont les marges sont uniformes sur [0 1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS E., MESSICK S., "An axiomatic formulation and generalisation of successive intervals scaling", *Psychometrika*, 23 n°4, (1958), 355-368.

[2] BENEZE G., *Le nombre dans les sciences expérimentales*, Paris, Presses Universitaires de France, (1961).

[3] BOUDON R., *L'analyse mathématique des faits sociaux*, Paris, Plon, (1967).

[4] CARNAP R., *Les fondements philosophiques de la physique*, A. Colin, (1973).

[5] COOK R.D., JOHNSON M.E., "A family of distributions for modelling nonelliptically symmetric multivariate data", *J. Roy. Statist. Soc.*, Série B, 43, (1981), 210-218.

[6] DOIGNON J.P., "Sur les représentations minimales des semi ordres et des ordres d'intervalles", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n° 101, (1988), 49-59.

[7] FALMAGNE J.C., "Foundations of fechnerian psychophysics", in KRANTZ, ATKINSON, LUCE, SUPPES, *Contemporary developments in mathematical psychology*, vol II, San Francisco, Freeman, (1974), 127-159.

[8] FALMAGNE J.C., "Probabilistic choice behavior theory : axioms as constraints in optimisation", in CASTELLANE, RESTLE, *Cognitive theory*, vol 3, L. Elbaum Ass. Pub., (1978), 93-114.

[9] FALMAGNE J.C., "Propos sur la théorie du mesurage", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n° 101, (1988), 7-34.

[10] GENEST C., 1987, "Franck's family of bivariate distributions", *Biometrika*, 74 n° 3, (1987), 549-555.

[11] GENEST C., MACKAY R. J., "Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données", *La revue Canadienne de Statistique*, vol 14, (1986), 145-159.

[12] GUSDORF G., *De l'histoire des sciences à l'histoire de la pensée*, Paris, Payot, (1977).

[13] HAMERLE A., TUTZ G., "Goodness of fit tests for probabilistic measurement models", *J. of Math. Psychology*, 21, (1980), 153-167 .

[14] JOHNSON N.L., KOTZ S., *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*, New-York, J. Wiley and sons, (1972).

[15] JOHNSON N.L., KOTZ S., "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstren distributions", *Communications in Statistics*, 4(5), (1975), 415-427.

[16] JOHNSON N.L., KOTZ S., "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstren distributions - II regression, correlation and further generalisations", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, A6(6), (1977), 485-496.

[17] KRANTZ D., LUCE D., SUPPES P., TVERSKY A., *Foundations of measurement*, vol 1, New-York, Academic Press, (1971).

[18] KIMELDORF G., SAMPSON A., "One parameter families of bivariate distributions with fixed marginals", *Communications in Statistics*, 4(3), (1975), 293-301.

[19] LANGDON F.J., "The problem of measuring the effects of traffic noise", in ALEXANDRE, BARDE, LAMURE, LANGDON, *Road traffic noise*, Applied Science, (1975), 27-69.

[20] LASSIERE A., *The environmental evaluation of transport plans*, London, Department of the environment, (1976).

[21] LUCE R.D., "Measurement representations of ordered, relational structures with archimedean ordered translations", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n° 101, (1988), 35-47.

[22] LUCE R.D., GALANTER E., "Discrimination, Psychological scaling", in LUCE, BUSH, GALANTER, *Handbook of mathematical psychology*, vol 1, New-York, J. Wiley and sons, (1963), 191-243, 245-307.

[23] MARDIA K.V., *Families of bivariate distributions*, London, Griffin, (1970).

[24] MAURIN M., a , "L'association du mesurage additif conjoint et des intervalles successifs", *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 96, (1986), 5-29.

[25] MAURIN M., b, "Topics on successive intervals", European Mathematical Psychology Group, 17th meeting, Osnabrueck, RFA, (1986).

[26] NARENS L., "Meaningfulness and the Erlanger program of Felix Klein", *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n° 101, (1988), 61-71.

[27] ROBERTS F.J., *Measurement theory*, Reading Massachussetts, London, Addison-Wesley Publishing Company , (1979).

[28] SCHULTZ T.J., "Synthesis of social surveys on noise annoyance", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol 60 n° 3, (1978).

[29] SKLAR A., "Fonctions de répartitions à n dimensions et leurs marges", *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8, (1959), 229-231.

[30] SUPPES P., ZINNES J.L., "Basic measurement theory", in LUCE, BUSH, GALANTER, *Handbook of mathematical psychology*, vol 1, New-York, J. Wiley and sons, (1963), 1-76.

[31] THOMPSON W.A., SINGH J., "The use of limit theorems in paired comparison model building", *Psychometrika*, 32 n° 3, (1967), 255-264.

[32] TIBERGHIEN G., *Initiation à la Psychophysique*, Paris, Presses Universitaires de France, (1984).

[33] ULLMO J., *La pensée scientifique moderne*, Paris, Flammarion, (1969).

[34] VALLET M., MAURIN M., PAGE M.A., FAVRE B., PACHIAUDI G., "Annoyance from and habituation to road traffic noise from urban expressways", *J. of sound and vibrations*, 60, (1978), 423-440.

[35] VERNET M., LAURENS J.F., BRUYERE J.C., AUPETIT J., *Gène due au bruit des deux roues*, IRT-CERNE, (1983).