

A. PANAYOTOPOULOS

Permutations planaires généralisées

Mathématiques et sciences humaines, tome 106 (1989), p. 17-20

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1989__106__17_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERMUTATIONS PLANAIRES GENERALISEES ¹

A. PANAYOTOPOULOS ²

1. INTRODUCTION.

Soit K_n l'ensemble des permutations circulaires sur un ensemble à n éléments, que l'on prend ici égal à $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. On note la permutation $\sigma \in K_n$:

$$\sigma = x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ , \text{ avec } x_1 = 1 \ ,$$

en convenant que l'image de x_i est x_{i+1} pour $i = 1, \dots, n$ (étant entendu que les indices sont pris modulo n , et donc que $n+1 = 1$). Les propriétés des permutations circulaires σ considérées ci-dessous seront toujours relatives à la permutation circulaire de référence $\sigma_0 = 1 \ 2 \ 3 \dots \ n$.

Sur l'axe ox les n points de coordonnées $1, 2, \dots, n$ constituent une représentation de σ_0 . A une permutation σ on fait correspondre la famille des n cercles de diamètres $x_i \ x_{i+1}$. On appelle signature plane ϵ associée à σ , le vecteur $\epsilon \in \{u, d\}^n$, où $\epsilon_i = u$ (resp. d) signifie que du cercle de diamètre $x_i \ x_{i+1}$ on ne conserve que le demi-cercle supérieur (resp. inférieur).

On note $G(\sigma, \epsilon)$ le graphe orienté plongé dans le plan, dont les sommets sont les n points x_i désignés sur l'axe ox , et les arcs les n demi-cercles $x_i \ x_{i+1}$ choisis selon la valeur de ϵ_i , orientés de x_i à x_{i+1} . Le graphe abstrait $G^*(\sigma, \epsilon)$ associé à $G(\sigma, \epsilon)$ est un simple circuit. On s'intéresse à l'absence de croisements entre les arcs du graphe $G(\sigma, \epsilon)$.

La permutation circulaire σ est dite *permutation planaire généralisée* (p.p.g.), s'il existe une signature plane ϵ telle que $G(\sigma, \epsilon)$ est sans croisements (fig.1a).

On généralise ainsi les permutations planaires (p.p.) associées à deux courbes de Jordan définies par Rosenstiehl [2], lesquelles correspondent au cas particuliers : $n = 2m$, et $\epsilon_i \neq \epsilon_{i+1}$, pour $i = 1, 2, \dots, n$. On note ci-dessous leur signature $\epsilon^\circ = u \ d \ u \ d \ \dots \ u \ d$ (fig.1b). Le problème de la reconnaissance de la planarité d'une permutation circulaire est résolu en temps linéaire par Rosenstiehl et Tarjan [3].

Remerciements.

* Nous remercions P. Rosenstiehl pour ses remarques précieuses.

** Ecole des Hautes Etudes Industrielles, 40, rue Karaoli et Dimitriou, Le Pirée, Grèce.

On s'intéresse ici à quelques propriétés des permutations circulaires planes, et on pose le problème de leur dénombrement. Une propriété caractéristique nous permet de produire un algorithme d'énumération de telles permutations et de donner les premières valeurs du dénombrement.

2. PROPRIETES

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes des définitions précédentes, ainsi que de propriétés énoncées en [2].

P_1 : Le graphe $G(\sigma, \epsilon^\circ)$ d'une non p.p.g. n'est pas planaire.

P_2 : Le graphe planaire d'une p.p.g. avec $n = 2m$ est une courbe fermée de Jordan, lisse s'il s'agit d'une p.p., comportant sinon des singularités.

En effet, pour les p.p.g. qui sont des p.p., les graphes planaires correspondants sont des courbes fermées de Jordan, qui sont lisses [2, p.260]. Par contre pour les p.p.g. qui ne sont pas des p.p., les graphes planaires correspondants sont des courbes fermées de Jordan avec deux types de singularités : les cups kératoïdes ou les cups ramphoïdes.

P_3 : Les graphes planaires des p.p.g. avec $n = 2m + 1$ sont des courbes fermées de Jordan avec singularités.

En effet, comme pour $n = 2m + 1$ il n'existe pas de p.p., alors le graphe planaire de cette p.p.g. est une courbe fermée de Jordan avec les deux types de singularités.

3. CRITERE DE PLANARITE.

La détermination des p.p.g. de K_n peut être opérée à l'aide de la condition nécessaire et suffisante de ce paragraphe.

On remarque que si $G(\sigma, \epsilon)$ est planaire, deux arcs xy et zt entrelacés, par exemple dans la position $x < z < y < t$, sont placés de part et d'autre de l'axe ox . D'une façon générale on définit l'entrelacement d'une permutation $\sigma \in K_n$ de la façon suivante :

Le graphe d'entrelacement de σ , noté $I(\sigma)$ a pour sommets les n couples $v_i = (x_i, x_{i+1})$ et pour arêtes les paires $\{v_i, v_j\}$ telles que si des nombres x_j et x_{j+1} , l'un est compris entre x_i et x_{i+1} , alors l'autre ne l'est pas.

Pour le graphe $I(\sigma)$ on a le lemme suivant modifié [3, p.383].

Lemme : La permutation $\sigma \in K_n$ est planaire si et seulement si $I(\sigma)$ est bi-chromatique.

D'où le théorème :

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une permutation $\sigma \in K_n$ soit planaire est que son graphe d'entrelacement $I(\sigma)$ ne possède pas de cycle impair.

En effet, un graphe est bi-chromatique, c'est-à-dire biparti, si et seulement si tous ses cycles sont pairs [1, p.31]. Du lemme on déduit donc le théorème (fig. 2).

Il est évident que parmi les $(n-1)!$ permutations de K_n , celles qui vont satisfaire la condition précédente sont des p.p.g.

Ainsi les involutions (c'est-à-dire les permutations qui coïncident avec leurs inverses) sont des p.p.g. du fait qu'elles ont seulement des points fixes et des transpositions.

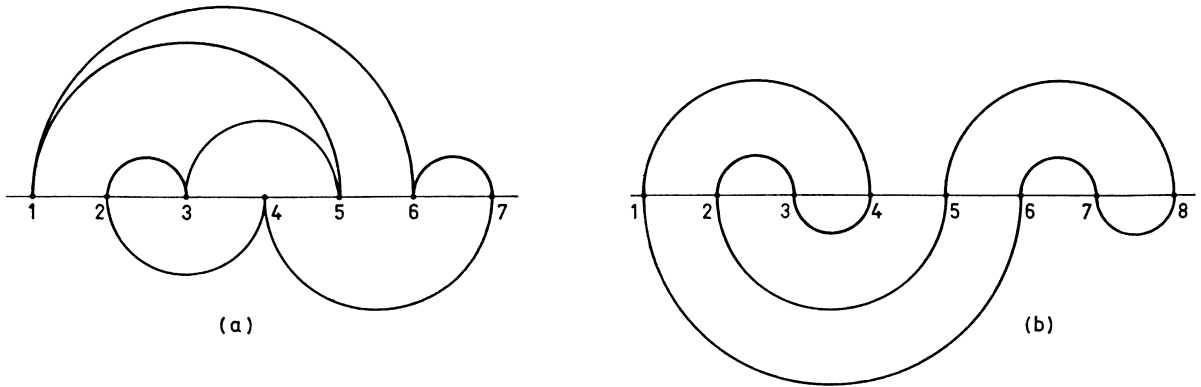


Figure 1(a) - Le graphe $G(\sigma, \epsilon)$ avec $\sigma = 1674235$ et $\epsilon = \text{uudduuu}$
 (b) - Le graphe $G(\sigma, \epsilon)$ avec $\sigma = 14325876$ et $\epsilon = \text{udududud}$

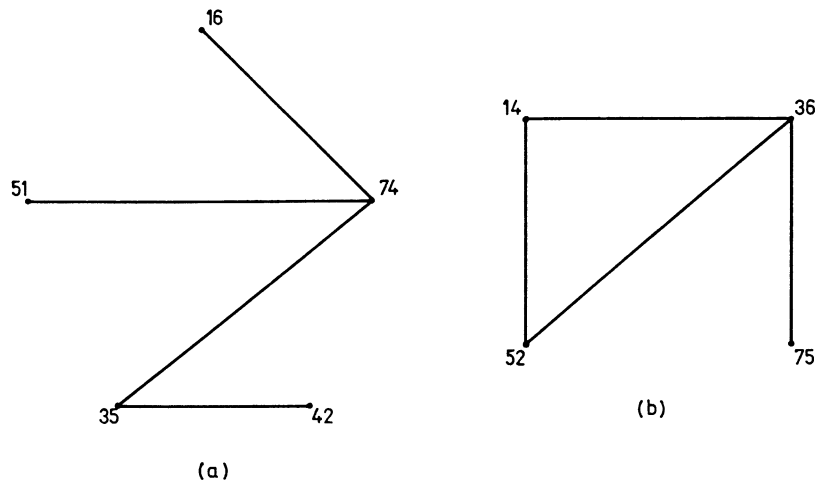


Figure 2 (a) - Le graphe d'entrelacement $I(\sigma)$ pour $\sigma = 1674235$ qui est une p.p.g
 (b) - Le graphe d'entrelacement $I(\sigma)$ pour $\sigma = 1436752$ qui n'est pas une p.p.g

Un programme par ordinateur a donné les résultats suivants :

n	5	6	7	8	9
p.p.g	22	92	408	1926	9512

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERGE, C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1958.
- [2] ROSENSTIEHL, P., "Planar permutations defined by two intersecting Jordan curves", in *Graph theory and Combinatorics*, Academic Press (1984), 259-271.
- [3] ROSENSTIEHL, P., TARJAN, R.E., "Gauss codes, Planar Hamiltonian Graphs and Stack-sortable Permutations", *Journal of algorithms*, 5 (1984), 315-320.