MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHEL MAURIN

L'association du mesurage additif conjoint et des intervalles successifs

Mathématiques et sciences humaines, tome 96 (1986), p. 5-29
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1986__96__5_0>

Math. Sci. hum. (*24*^{e} année, n°96, *1986*, p.5-29)

L'ASSOCIATION DU MESURAGE ADDITIF CONJOINT ET DES INTERVALLES SUCCESSIFS

MAURIN Michel *

INTRODUCTION

De nombreuses études sur les nuisances dues aux transports ou le confort dans les véhicules (celles de l'INRETS-CERNE par exemple), recueillent les réponses des personnes interrogées à l'aide d'échelles de catégories ordonnées, en même temps que l'on mesure certaines variables physiques, (réf. 18,23, 37,38). L'objectif alors est de rechercher les relations qui peuvent se manifester entre la réponse exprimée et les niveaux physiques, avec naturellement l'intention de remédier aux conditions jugées mauvaises.

On se trouve de fait confronté à un problème classique de la Psychophysique des sensations telle que l'a fondée Fechner 1860, à savoir la recherche d'une relation, si possible quantifiée, entre un stimulus et une réponse, (explicitation d'une "Loi psychophysique", réf. 27, 34). Le recueil par échelles de catégories date des débuts du siècle (réf. 20), et a été reformulé par exemple avec la "Loi" des jugements catégoriels 1935, d'inspiration thurstonienne (réf. 20, 23, 35).

D'un autre côté la Théorie du Mesurage, (measurement theory, 1963, réf. 31), s'intéresse à la possibilité effective de traduire les faits observés par des nombres. Les Sciences Humaines, autant que les Sciences Physiques, offrent d'importants domaines d'application de ces considérations générales (réf. 20,27,34), lesquelles se situent en amont des pratiques du

---

* INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS ET LEUR SECURITE (INRETS-LEN) 109 avenue Salvador Allende 69672 BRON.

L'auteur remercie G. Drouet d'Aubigny pour son aide dans la découverte et la poursuite de ces questions et le rapporteur pour ses remarques.

codage (scaling, réf.35). La Psychophysique des sensations et le Mesurage se rencontrent en de nombreuses occasions, en particulier le recueil par échelles de catégories s'intègre dans le formalisme du Mesurage grâce à la théorie des intervalles successifs d'Adams et Messick (paragraphes 1,2, annexe ; réf. 1, 23,31).

La Psychophysique n'a pas vraiment abordé les réponses en présence de plusieurs stimuli, mais une forme de mesurage dit mesurage conjoint traite ces questions. Il est donc tentant de chercher à organiser de nouvelles rencontres, ce qui peut être un volet de la psychophysique multidimensionnelle qu'évoque Tiberghien, (réf.34). C'est ce que nous proposons ici en associant les intervalles successifs et le mesurage additif conjoint de Luce et Tukey, 1964, (paragraphes 3,4,5).

1 - RAPPELS SUR LA THEORIE DU MESURAGE

1.1 - Mesurage et codage

Cette théorie initiée par des physiciens, est actuellement formalisée sous une forme axiomatique (Suppes et Zinnes 1963, réf.27,31). De façon très générale on observe des phénomènes au travers de certains de leurs attributs et on constate que l'ensemble des différentes "valeurs" ou modalités possibles a_i d'un attribut A sont susceptibles de se combiner et/ou de se composer par l'intermédiaire de relations k-aires ; par exemple l'attribut "longueur" du phénomène baton dont les diverses valeurs peuvent être comparées ou mises "bout à bout", (réf.16). Un tel système constitue un système relationnel empirique, sre. Le mesurage examine s'il existe dans l'arsenal mathématique un homomorphisme du sre. Quand on désire "quantifier" on recherche une image dans R, c'est à dire un système relationnel numérique, srn. Le triplet (sre, srn, homomorphisme) constitue pour nous une échelle de mesure (figure 1) ; son existence donne lieu à la démonstration d'un Théorème de Représentation, à partir des relations du sre prises comme conditions ou axiomes.

Il y a souvent plusieurs homomorphismes entre un système relationnel empirique et des systèmes relationnels numériques qui se déduisent les uns des autres par une classe "d'opérations admissibles" du système relationnel numérique dans lui-même. Cette classe caractérise le type de l'échelle, (démonstration d'un Théorème de Caractérisation, Uniqueness). Dans R on définit par exemple les échelles ordinales, d'intervalles, de rapport,... . On désigne communément les deux dernières d'échelles "quantitatives ou numériques", ce sont des groupes abéliens totalement ordonnés et archimédiens.

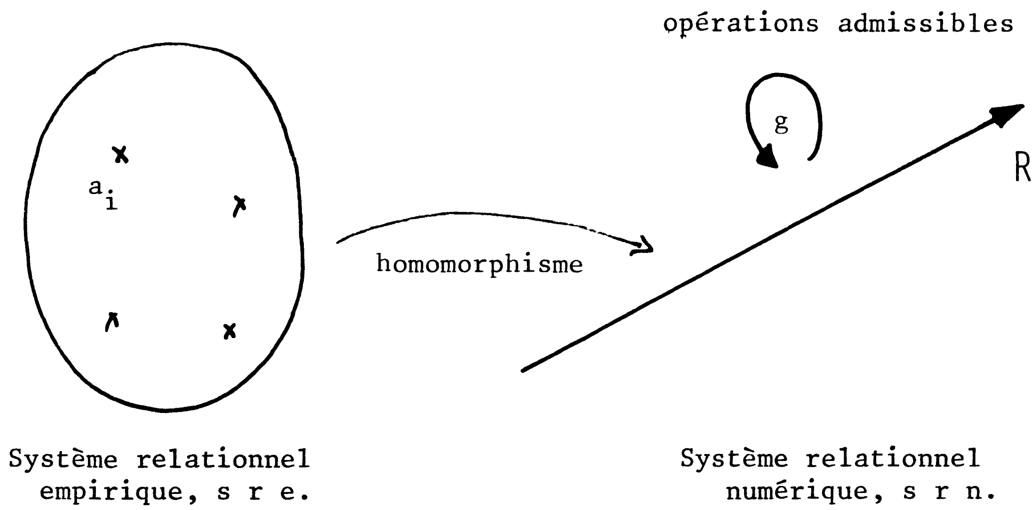

Figure 1 : Le formalisme du mesurage

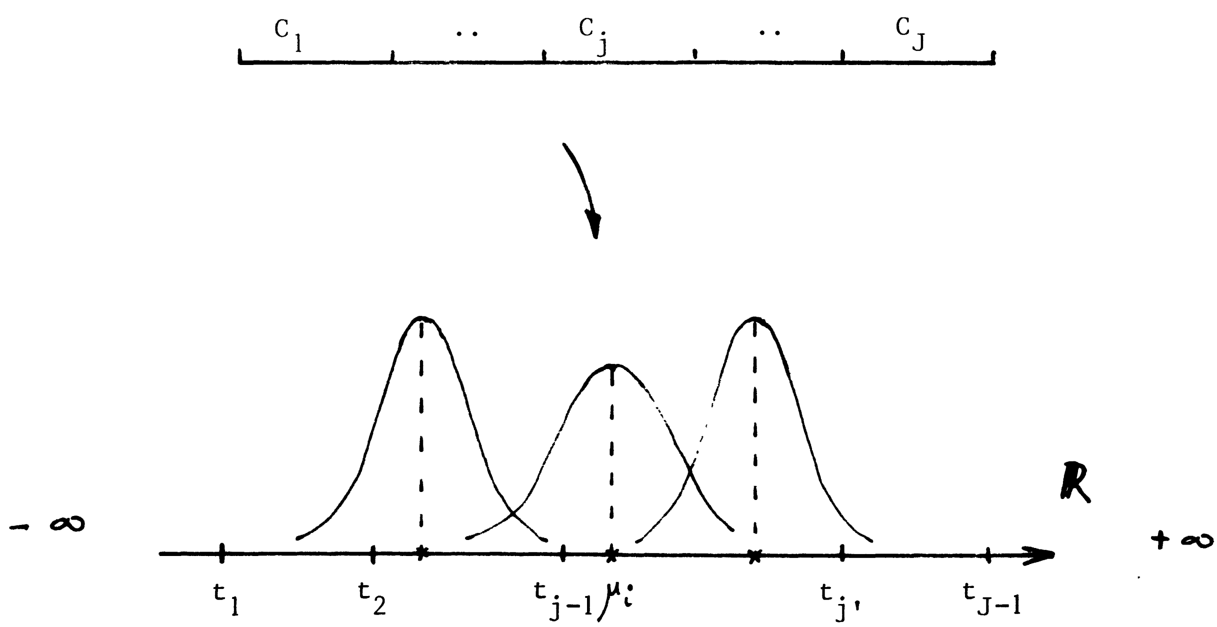

Figure 2 : Tranformation des catégories en intervalles adjacents sur $\mathbb{R}$.

Densités de probabilités des processus discriminants (Thurstone) attachés à chaque stimulation S_i.

Les échelles d'intervalle correspondent à l'addition des nombres réels, elles sont invariantes par le groupe de transformations affines positives (réf.3).

On définit à ce propos la pertinence (meaningfulness) des énoncés (mathématiques, statistiques...) vis à vis de la caractérisation, elle a notamment le mérite de préciser les statistiques "pertinentes" avec chaque échelle (réf.27). Selon une vision renouvelée elle tend à prendre le rôle central, en liaison avec la théorie des invariants (réf.25).

Suppes et Zinnes ont aussi introduit le mesurage déduit, lorsque l'échelle dépend des observations d'un attribut dans un sre, et/ou de mesurages antérieurs (réf.27,31).

Toutefois les théorèmes de mesurage fournissent rarement les valeurs numériques elles-mêmes aux praticiens. On aborde alors l'étape du codage (scaling) qui regroupe un grand nombre de techniques et d'algorithmes (réf. 35). Alors que la démarche du mesurage se soucie de la représentation numérique avant de l'utiliser, le codage postule son existence, par exemple "both Guttman and Mosteller suggested it (the optimal scaling) gives scores on an interval scale", (réf.35). Le mesurage doit (devrait) donc être une préoccupation en amont du codage, dont la mise en oeuvre peut intervenir ensuite (réf.7).

1.2 - Autres formes de mesurage

Le mesurage conjoint consiste à mesurer simultanément les attributs de plusieurs ensembles. Nous y revenons au paragraphe 3.

Dans tous ces cas les axiomes du mesurage sont déterministes, et donc rarement vérifiés par des données de l'expérience. Falmagne a introduit le mesurage probabiliste en 1976 afin d'élargir le cadre précédent. Cet auteur remarque que dans les sciences humaines les données se présentent souvent sous la forme de fréquences de réponses (booléennes, catégorielles,..) conditionnelles (réf.11,12,15). Il pose le modèle probabiliste :

$$\text{Prob (réponse } 1,\ldots,K) = F\left\{H\left[h_1(a_1),\ldots,\ h_k(a_k)\right]\right\}$$

Les a_k sont les catégories de réponses et les attributs d'ensembles A_k, (conditions d'étude). Les triplets $(A_k,\ R,\ h_k)$ sont des échelles de mesure, H une fonction de R^k dans R, et F une fonction de répartition définie sur R. Dans chaque modèle les arguments $h_k\ (a_k)$ sont liés par certaines relations qui définissent la représentation et la caractérisation des échelles. Cela donne notamment des modèles probabilistes multinomiaux paramétrés (réf.2). Le codage des $h_k(a_k)$ devient un problème d'estimation, et on a aussi le moyen de tester la validité du modèle proposé en adaptant les pratiques usuelles des tests d'ajustement statistiques (réf.12,15).

La théorie du mesurage est donc avant tout un cadre formel qui apporte peu de résultats concrets en soi, mais qui affiche le souci représentationnel et relationnel des données empiriques dans des structures propices à un développement mathématique ultérieur. Un tel souci semble naturel, Ullmo rappelle que le géomètre E. Cartan s'en préoccupait :

"Selon lui, le but ultime d'une théorie géométrique devrait être d'atteindre un espace qui soit le plus général de sa classe, dont la structure ne soit soumise à aucune relation limitative, et qui rende compte des phénomènes par correspondance directe entre ses éléments structuraux (vérifiant des relations intrinsèques, nécessaires à la définition de cette classe d'espaces) et les phénomènes mesurés", (réf.36).

2 - COMPLEMENTS SUR LES INTERVALLES SUCCESSIFS

2.1 - Généralités

La méthode des jugements catégoriels est une adaptation des idées que Thurstone a développées dans la loi des jugements comparatifs, 1927. Elle s'applique quand on recueille les réponses à l'aide d'une échelle de catégories ordonnées (réf.1,28,35). A l'origine la méthode postulait une application des catégories dans R de telle sorte que les bornes t_j entre intervalles adjacents sont mesurées par une échelle d'intervalle (figure 2).

On connaît le succès expérimental de la transformation thurstonienne des catégories. En effet on sait qu'il n'y a pas de relation simple entre les réponses aux même stimulations qui sont recueillies (réf.9,21,29,30) :

a) par estimation de la grandeur (magnitude estimation) ;
b) sur une échelle de catégories (category scale).

Cet avatar, ("a partition paradox" dit Stevens), peut être résolu en suivant la démarche de Galanter et Messick qui ont appliqué une transformation thurstonienne à l'échelle de catégories (a processed category scale, 1961, réf.14,29). Mieux, la relation logarithmique que ces auteurs constatent entre l'échelle de catégories transformée et l'échelle par estimation de la grandeur est confirmée par les résultats contemporains d'Ekman (réf.6, 10,29), ce qui par ailleurs signifie que l'échelle transformée est une échelle d'intervalle (réf.23). Cette transformation est considérée comme un procédé de mesure des phénomènes sensoriels au même titre que l'estimation de la grandeur ou que les échelles de catégories proprement dites (réf.6,29,34).

Dans les études sur les nuisances, les individus sont exposés à différentes valeurs S_i d'une stimulation S, i=1,...,I, et on recueille leurs réponses dans les catégories C_j j=1,..., J, I et J$\geq$3. Les données sont les effectifs n_{ij} d'un tableau de contingence correspondant à C_j et S_i. On en déduit les fréquences conditionnelles de réponses (tableaux 1,2) :
$\varpi_{ij} = n_{ij} / \sum_{j'} n_{ij'}$.

2.2 - Les résultats d'Adams et Messick

Les transformations thurstoniennes ont été reprises dans le cadre du mesurage par Adams et Messick, puis Suppes et Zinnes, sous le nom de méthode des intervalles successifs. Ces derniers ont énoncé des conditions qui conduisent à une échelle d'intervalle ; cela vient confirmer l'intuition initiale, il y a là une convergence notable entre intuition, expérience et formalisme (réf.23).

La transformation proposée à partir des fréquences ϖ_{ij} consiste à calculer les fréquences cumulées $\Pi_{ij} = \sum_{l=1..j} \varpi_{il}$ puis les $z_{ij} = F^{-1}(\Pi_{ij})$, j=1,...,J-1, où F est la fonction de répartition gaussienne sur R donnée a priori (moyenne μ_F, variance σ_F^2).

Les conditions d'Adams et Messick sont les suivantes : pour tous indices p et q =1,...,I et j=1,...,J-1 il existe des paramètres réels α_{pq} positifs et β_{pq} tels que $z_{pj} = \alpha_{pq} z_{qj} + \beta_{pq}$; ce qui signifie que l'on passe de toute ligne du tableau des z_{pj} à toute autre par une transformation affine positive. Comme les z_{pj} proviennent des ϖ_{pl} observés, ce sont des conditions vérifiables sur les données recueillies.

Le théorème de mesurage précise que lorsque les ϖ_{pj} et F vérifient les conditions d'Adams et Messick il existe une application μ de (1,..,I) dans R, une autre σ dans R^*_+, et une autre t de (1,..,J-1) dans R ; μ et t sont deux échelles d'intervalles avec les mêmes unité et origine, σ est une échelle de rapport avec la même unité.

<u>TABLEAU 1</u> : *Effectifs n_{ij} de réponses à propos d'une enquête sur la gêne due au bruit de la circulation (réf. 37)*

Catégories C_j de l'échelle de réponses

Stimuli S_i, niveaux de bruit en décibels A	1	2	3	4
59	14	22	11	6
62	26	24	31	15
65	43	73	57	42
68	28	61	92	73
71	19	31	62	84
73	8	30	44	87

<u>TABLEAU 2</u> : *Distributions conditionnelles des réponses par rapport aux stimuli $n_{ij} / \sum_l n_{il}$*

Catégories C_j de l'échelle de réponses

Stimuli S_i, niveaux de bruit en décibels A	1	2	3	4
59	26,4	41,6	20,7	11,3
62	18,6	27,9	36,0	17,5
65	20,1	33,9	26,5	19,5
68	11,1	24,0	36,2	28,7
71	9,7	15,8	31,6	42,9
73	4,7	17,8	26,0	51,5

Ces résultats s'appliquent tout à fait aux études sur les nuisances (réf.23), la démonstration et des commentaires sont donnés en annexe.

3 - LE MESURAGE CONJOINT

3.1 - Le mesurage conjoint est apparu peu de temps après les formes "classiques" de Suppes et Zinnes (réf.17,27). Dans toute sa généralité cette forme s'applique au cas où l'on a un produit (cartésien) d'ensembles A_u u=1,...U de modalités a_{iu} iu=1,...,Iu, qui varient de manière indépendante, et que l'on désire mesurer chacun des A_u. Par rapport aux mesurages précédents, cette nouvelle forme réalise le mesurage simultané de plusieurs ensembles de phénomènes.

L'application à la Psychophysique est immédiate, on peut en effet supposer que les A_u représentent différents ensembles de stimulations indépendantes qui prennent les modalités qualitatives a_{iu}, et que la sensation est la réponse à cette stimulation composée et multidimensionnelle.

3.2 - De façon générale les résultats du mesurage conjoint s'appliquent à partir du moment où l'ensemble produit $A_1\ A_2 \dots\ A_U$ est doté d'une structure de préordre total (weak order réf.27) à l'aide d'une relation binaire $\mathfrak{R}$ transitive totale. C'est le cas des relations de préférence transitive entre différents objets (les $a_{(iu)}$ du produit des A_u) lorsqu'ils sont tous comparables deux à deux et qu'ils sont considérés comme équivalents quand on ne sait décider lequel des deux est préféré à l'autre.

Dans le cas d'une exposition à une stimulation composée, une structure de préordre total peut notamment être introduite à l'aide d'une variable dépendante ordinale v (encore appelée "intensité de réponse", response strength, réf.7) qui permet de comparer deux à deux toutes les situations stimulantes. Cette variable dépendante est notée $v(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{iU})$, ou $v_{i1,i2,\dots,iU}$. Les théorèmes de Représentation et de Caractérisation du mesurage conjoint s'expriment de la façon suivante :

> Si la relation $\mathfrak{R}$, (ou la variable dépendante v), vérifie telles conditions, alors il existe des représentations h_u de A_u dans R u=1,...,U ; et les échelles (A_u,R,h_u) sont des échelles de telle nature.

Les conditions en question sont de plusieurs sortes. Il y a des conditions techniques (topologie, continuité, monotonie) qui ont pour objet de faciliter l'étude des questions d'existence d'une solution en a_{iu}, et des conditions spécifiques qui sont les véritables conditions à l'origine du mesurage conjoint. Ces dernières sont encore appelées "lois qualitatives" (qualitative laws, réf.16,17).

Les lois qualitatives jouent ici le même rôle que les axiomes vérifiés par les observations du système relationnel empirique dans la présentation initiale (1.1.), avec en sus le mesurage simultané de plusieurs ensembles.

3.3 - L'exemple du mesurage additif conjoint de Luce et Tukey s'applique au cas de deux ensembles de modalités A et B. La loi qualitative qui le concerne est celle de la "double annulation" (double cancellation) que l'on peut exprimer comme suit :
Pour tous les triplets i1, i2, i3 de modalités de A, et k1, k2, k3 de modalités de B, lorsque les deux prémisses

$v_{i1,k2} \leqslant v_{i2,k3}$ et $v_{i2,k1} \leqslant v_{i3,k2}$ sont satisfaites
alors on a la conclusion $v_{i1,k1} \leqslant v_{i3,k3}$,(figure 3).

Le théorème correspondant énonce que si le pré-ordre vérifie un certain nombre de conditions, dont la loi qualitative de la double annulation, alors il existe une échelle h_a de A dans R, une échelle h_b de B dans R et une échelle ϑ de A B dans R (étape de Représentation), lesquelles sont des échelles d'intervalle avec la même unité (étape de Caractérisation), (réf.17, 27,(*)).

Les valeurs a_i, b_k et ϑ_{ik} correspondant aux modalités i de A, k de B et (i,k) de A B, vérifient dans ce cas : $\vartheta_{ik} = a_i + b_k$,
modulo le groupe des transformations $a_i \rightarrow \alpha a_i + \beta_1$, $b_k \rightarrow \alpha\, b_k + \beta_2$,
$\vartheta_{ik} \rightarrow \alpha\, \vartheta_{ik} + \beta_1 + \beta_2$, $\alpha > 0$.

3.4 - Quand on est intéressé par les valeurs numériques et non pas uniquement par l'existence du mesurage, il reste à résoudre l'étape du codage non prise en compte par le théorème ci-dessus.

(*) Sur un plan technique Krantz et al. utilisent la structure de préordre total (weak order), tandis que Roberts emploie la structure de préordre total strict (strict weak order).

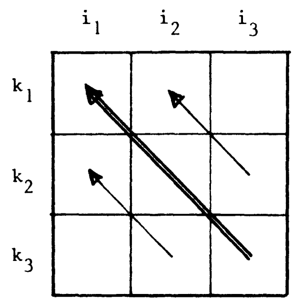

FIGURE 3 : L'axiome de la double annulation

$\longrightarrow$ prémisse

$\Longrightarrow$ conclusion

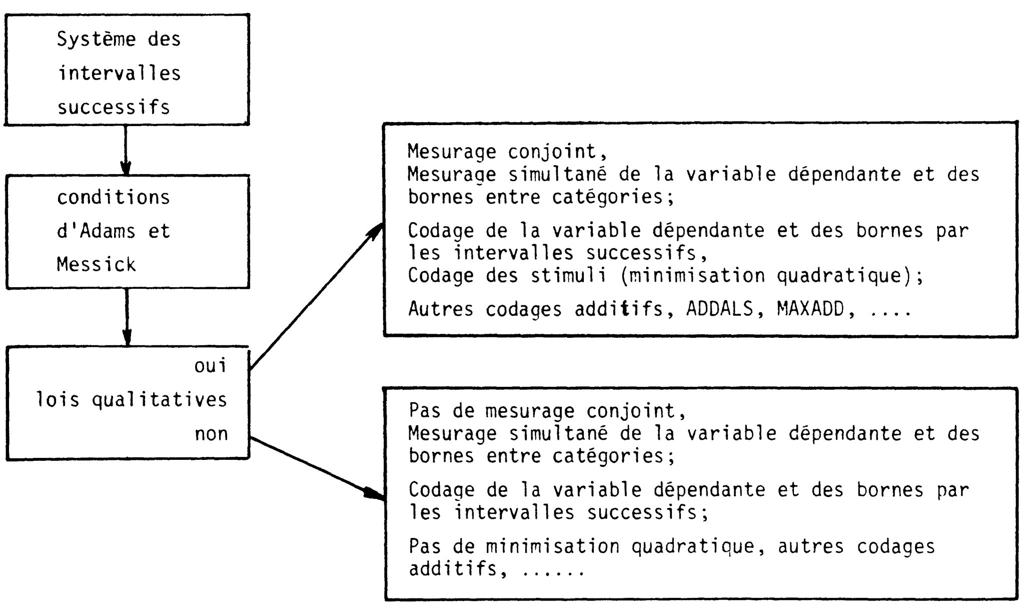

TABLEAU 3 : *L'association entre les intervalles successifs et le mesurage conjoint.*

4 - L'ASSOCIATION DU MESURAGE CONJOINT ET DES INTERVALLES SUCCESSIFS

En définitive, il suffit que l'on dispose des deux éléments suivants :

- une variable dépendante ordinale sur l'ensemble produit $A_1\ A_2 \ldots A_U$ étudié,
- une loi qualitative et son théorème associé,

pour pouvoir mettre en oeuvre la théorie du Mesurage conjoint. Le mesurage additif conjoint de Luce et Tukey date d'une vingtaine d'années, et malgré l'intérêt qu'il présente, il reste, aux dires de Carroll et Arabie davantage utilisé dans les applications économiques que psychométriques et psychophysiques (réf.5). On peut penser que cela est dû en partie à la difficulté de disposer d'une variable dépendante ordinale ϑ_{ik} sur un ensemble produit A B, comme le sont par exemple une préférence, un délai d'apprentissage ou de réaction (réf.7,10).

4.1 - Introduction d'une variable dépendante

L'association entre le mesurage conjoint et les intervalles successifs que nous proposons s'appuie sur une simple remarque. En effet lorsque l'on recueille les réponses à une stimulation par l'intermédiaire d'une échelle de catégories ordonnées, on dispose d'un moyen simple pour se doter d'une variable dépendante ordinale sur A B.

On pose pour simplifier un nouvel indice global s qui désigne le couple (i,k) de la stimulation composée. Puisque les données de départ sont les fréquences conditionnelles de réponses ϖ_{sj} (choix de la catégorie C_j quand on est exposé à la stimulation d'indice s), il est naturel d'introduire le système des intervalles successifs correspondant. On sait alors, sous réserve que les axiomes ou relations d'Adams et de Messick soient vérifiées, en déduire l'existence d'un mesurage par échelle d'intervalle des bornes entre catégories et des jeux de stimulations composées d'indice s. Soit μ le mesurage ainsi réalisé sur A B, lequel prend les valeurs μ_s (ou μ_{ik}), par conséquent la relation binaire entre couples d'indices s = (i,k) et s' =(i',k') de A B définie par $\mu_{ik} \geqslant \mu_{i'k'}$ est une relation de préordre total.

Il est donc possible de faire jouer à cette échelle le rôle de variable dépendante. De la sorte le mesurage des intervalles successifs peut apporter une solution simple à propos de la question préalable de la mise en oeuvre du mesurage conjoint proprement dit. A ce niveau de généralité c'est l'analogue de ce que fait Falmagne d'une autre façon dans son modèle de mesurage conjoint aléatoire (réf.11, équation 7), en amont du mesurage additif conjoint proprement dit.

4.2 - La double résolution du Mesurage

Ce qui précède permet d'utiliser la procédure du mesurage additif conjoint. Lorsque les lois qualitatives correspondantes sont vérifiées, il existe une échelle d'intervalle h_a de l'ensemble A dans R, une autre h_b de B dans R, qui sont toutes deux des échelles d'intervalle avec la même unité, et une échelle d'intervalle de même unité ϑ de A B dans R telle que pour tout jeu d'indices (i,k) des modalités de A et B $\vartheta_{ik} = a_i + b_k$.

Comme d'autre part on se place dans le cas où les relations d'Adams et Messick sont satisfaites, les mesurages ϑ et μ définis sur le produit A B sont deux représentants de la même échelle d'intervalle, modulo le groupe des transformations affines positives, c'est à dire $\mu_{ik} = \alpha\ \vartheta_{ik} + \beta$, $\alpha > 0$.

Le premier mérite de l'association entre intervalles successifs et mesurage conjoint est donc de permettre la mise en oeuvre de ce type de mesurage, sous la contrainte de vérifier les conditions spécifiques à chacune des deux théories. Le cas le plus intéressant est naturellement celui où les deux conditions sont vérifiées. Lorsque les conditions d'Adams et de Messick ne sont pas vérifiées cela sort du champ des intervalles successifs ; par contre quand elles le sont mais que les lois qualitatives du mesurage conjoint ne le sont pas, il reste le mesurage de la réponse globale et des bornes entre catégories (tableau 3).

4.3 - Le codage

L'étape du codage est souvent traité comme une question d'algorithme numérique. La recherche d'une utilité additive a donné lieu pour sa part à de nombreux algorithmes qui relèvent davantage de la psychométrie. Parmi ceux qui recherchent des codages additifs, on peut citer Addals, Maxadd (réf.8,32), ou la minimisation des termes d'interactions dans un plan d'expérience (réf.4, entre autres..).

On peut évidemment utiliser ces techniques une fois que l'on s'est assuré de l'existence d'un mesurage additif conjoint (4.2). Cependant pour la deuxième fois l'association avec les intervalles successifs se révèle avantageuse puisque les algorithmes des intervalles successifs fournissent directement le codage de la réponse globale μ , et que ceux-ci sont utilisés au cours du calcul préalable nécessaire du codage de μ_s, (4.1.). On a déjà ainsi réalisé une part importante du codage ; comme la détermination des $\mu_{ik}= \mu_s$ fixe l'unité de l'échelle d'intervalle, le codage peut alors se réduire à la recherche finale des valeurs codées a_i et b_k qui vérifient les relations $\mu_{ik}=a_i + b_k + \beta$.

Le dernier paragraphe et l'annexe 3 proposent une résolution quadratique pour ce dernier point.

5 - UN CODAGE ADDITIF CONJOINT

5.1 - Pour terminer, les μ_{ik} étant connus, nous proposons de considérer que les valeurs inconnues a_i et b_k sont les solutions du problème de minimisation quadratique suivant :

$$\min_{a,b} \quad Q(a,b) = \sum_{i,k} \left((a_i + \beta) + b_k - \mu_{ik} \right)^2$$

Tel quel le problème est indéterminé ; il suffit d'ajouter une condition supplémentaire, par exemple $\sum_i a_i = 0$, pour qu'il n'en soit plus ainsi.

Dans la pratique il se peut que le plan d'expérience A B soit incomplet, c'est à dire que tous les couples d'indices (i,k) n'aient pas donné lieu à des stimulations et des réponses. Le cas est souvent envisagé (réf.7,13,19) ; bien que les théorèmes généraux du mesurage ne s'appliquent pas à cette situation, il est indiqué en référence 17 comment on peut s'y prendre en pratique, (à savoir prendre des produits de sous-ensembles connexes de A et de B qui se recouvrent suffisamment, et vérifier les conditions du mesurage conjoint pour chacun d'eux et leurs parties communes).

Pour tenir compte des plans incomplets, nous introduisons le problème d'optimisation plus large :

$$\min_{a,\, b} \quad Q^W(a,\, b) = \sum_{i,\, k} W_{ik} \left((a_i + \beta) + b_k - \mu_{ik} \right)^2$$

où W_{ik} est la fonction indicatrice de la présence des distributions de réponses ϖ_{ikj} pour le couple d'indices (i,k); une condition supplémentaire naturelle est alors : $\sum_i W_i a_i = 0$ avec $W_i = \sum_k W_{ik}$.

5.2 - On démontre (annexe 3) que ce problème d'optimum sous liaison admet une solution unique dès que la matrice indicatrice des W_{ik} n'est pas une matrice bloc-diagonale (*), c'est à dire dès que l'ensemble des (i,k) d'un plan incomplet n'est pas une union de sous-ensembles disjoints de A B, (ce qui couvre les situations indiquées en référence 17).

Dans le cas particulier d'un plan complet équipondéré, avec $W_{ik} = 1$ pour tout (i,k), la solution est immédiate :

$$a_i = \sum_k \mu_{ik} / K \quad - \sum_{ik} \mu_{ik} / I\,K$$

$$b_k = \sum_i \mu_{ik} / I$$

Conclusions

Dans cet article nous nous sommes intéressé au recueil des réponses par des échelles de catégories ordonnées. Au-delà d'une première rencontre entre la Psychophysique des sensations et le Mesurage, nous avons présenté une association possible entre la méthode des intervalles successifs et celle du mesurage additif conjoint.

Cette association se révèle bénéficiaire pour les deux. Elle renouvelle l'intérêt des échelles de catégories en leur ouvrant de nouveaux champs d'applications, et elle résoud un préalable pour la mise en oeuvre du mesurage conjoint (4.1, 4.2). En même temps elle facilite le codage final (4.3). On peut penser que cette association pose un jalon vers les nouveaux aspects de la psychophysique multidimensionnelle, (réf.35).

Cette association se situe au niveau de la conception; nous ne l'avons pas encore appliquée faute de données adaptées, on rappelle qu'il faut disposer d'effectifs nij correspondants aux réponses Cj pour les modalités ai et bk de deux stimuli indépendants, sur un plan d'expérience A B complet ou non. De telles données seraient les bienvenues pour faire une application pratique.

(*) L'esprit de la minimisation quadratique relève du mesurage probabiliste et de question d'estimation ; seule l'existence d'un tel ajustement est étudiée ici.

ANNEXE 1 : Le mesurage dérivé des intervalles successifs

Nous complétons ici la présentation axiomatique de mesurage de Suppes Zinnes (réf.31).

1 - Un système de mesurage dit des intervalles successifs est constitué de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_f = \langle \tilde{I}, J, \varpi \rangle$$

où $\tilde{I}$ est un ensemble fini d'indices i de cardinal I supérieur ou égal à 3, J un entier supérieur ou égal à 3, ϖ une application définie sur le produit $\tilde{I} \times (1,\ldots,J)$ à valeurs dans $]0\ 1[$, variant sur une échelle absolue, telle que pour tout $i \in I$ on a $\sum_j \varpi_{ij} = 1$.

Il s'agit du tableau des fréquences conditionnelles ligne par ligne issu du tableau des effectifs n_{ij} ; chaque $\varpi_{ij} = n_{ij} / \sum_\ell n_{i\ell}$ est la fréquence des réponses correspondant à la catégorie C_j conditionnée par rapport à l'exposition au stimulus S_i, cela représente les distributions empiriques des réponses pour chacun des stimuli. Le tableau des ϖ_{ij} est un tableau rectangle de termes positifs dont la somme de chaque ligne est égale à 1, (tableau 2).

Dans la notation $\mathcal{E}_f$ l'indice f correspond à une densité de probabilité définie positive sur R, F est sa fonction de répartition, μ_f et σ_f^2 son espérance mathématique et sa variance quand elles existent, (annexe 2).

Pour tout $i \in \tilde{I}$ on définit la suite des fréquences conditionnelles cumulées $\Pi_{ij} = \sum_\ell \varpi_{i\ell}$, suite croissante comprise entre 0 et 1 pour $j=1,\ldots,J-1$; et $z_{ij} = F^{-1}(\Pi_{ij})$ complétées par $z_{i0} = -\infty$, $z_{iJ} = +\infty$.

2 - Un système de réponses sur échelles de catégories est dit d'Adams et Messick (A.M.) si et seulement si pour tous n et $m \in \tilde{I}$ et $j=1,\ldots,J-1$ il existe des paramètres réels α_{nm} positifs et β_{nm} tels que

$$z_{nj} = \alpha_{nm}\, z_{mj} + \beta_{nm}$$

ce qui signifie que l'on passe d'une ligne z_{nj} à une autre par une transformation affine positive, et qu'il n'y a aucun ϖ_{nj} nul.

LEMME 1 : Si un système est A.M., il existe deux suites réelles finies μ_n, $\sigma_n > 0$, $n \in \tilde{I}$ telles que $\alpha_{nm} = \sigma_m / \sigma_n$, $\beta_{nm} = (\mu_m - \mu_n) / \sigma_n$.

En effet on a les relations suivantes pour tout m, n, p $\in \tilde{I}$:

$\alpha_{nn} = 1$, $\beta_{nn} = 0$, $\alpha_{np} = \alpha_{nm} \alpha_{mp}$

$\beta_{np} = \beta_{nm} + \alpha_{nm} \beta_{mp}$

Un indice p° étant fixé on en déduit :

$\alpha_{nm} = \alpha_{np^\circ} / \alpha_{mp^\circ}$, $\beta_{nm} = \beta_{np^\circ} - \alpha_{nm} \beta_{mp^\circ}$

on a donc les deux suites suivantes en posant $\sigma_n = 1/\alpha_{np^\circ}$,

$\mu_n = - \beta_{np^\circ} / \alpha_{np^\circ}$, (il y a autant de solutions que de p°). □

LEMME 2 : Quand un système est A.M., il existe une application strictement monotone t de (1,...,J-1) dans R définie par $t_j = \mu_n + \sigma_n z_{nj}$ pour tout $n \in \tilde{I}$.

Démonstration : avec les suites $\alpha_{nm} = \sigma_m / \sigma_n$, $\beta_{nm} = (\mu_m - \mu_n)/\sigma_n$ la condition $z_{nj} = \alpha_{nm} z_{mj} + \beta_{nm}$ j=1,...,J-1 s'écrit $z_{nj} = \sigma_m/\sigma_n \, z_{mj} + (\mu_m - \mu_n)/\sigma_n$; la quantité $\mu_n + \sigma_n z_{nj}$ ne dépend donc pas de l'indice n. On peut donc définir l'application qui a tout j=1,...J-1 fait correspondre la valeur $t_j = \mu_n + \sigma_n z_{nj}$. Elle est strictement monotone puisque $\sigma_n > 0$. □

Dans la suite on considère l'application t d'un système d'Adams et Messick, complétée par les valeurs $t_0 = -\infty$, $t_j = +\infty$.

LEMME 3 : Dans un système A.M , on a les relations suivantes :

$$\varpi_{nj} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\,(v-\mu_n)/\sigma_n) \;\; dv/\sigma_n \quad ;$$

réciproquement s'il existe les suites $\sigma_n > 0$, μ_n $n \in \tilde{I}$, et t_j croissante j=1,...,J-1, complétée par $t_0 = -\infty$, $t_j = +\infty$, telles que

$$\varpi_{nj} = \int_{t_j-1}^{t_j} f(\,(v-\mu_n)/\sigma_n) \;\; dv/\sigma_n \quad ;$$

le système $< \tilde{I}$, J, $\varpi >$ est un système d'Adams et Messick.

Démonstration : pour tout $n \in \tilde{I}$ et $j=1,\ldots J-1$ on a

$$z_{nj} = (t_j - \mu_n)/\sigma_n \quad , \quad \sigma_n > 0,$$

$$\text{et} \quad \sum_{l=1..j} \varpi_{nl} = \int_{-\infty}^{z_{nj}} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{t_j} f(\,(v-\mu_n)/\sigma_n)\; dv/\sigma_n \;,$$

d'où ϖ_{nj} par différence.

Réciproquement on a $\varpi_{nj} = F((t_j - \mu_n)/\sigma_n) - F((t_{j-1} - \mu_n)/\sigma_n)$,

d'où $z_{nj} = (t_j - \mu_n)/\sigma_n$ et $\mu_n + \sigma_n\; z_{nj} = \mu_m + \sigma_m\; z_{mj}$. □

Définition : La relation $R^\circ_f(\tilde{I}, J, \varpi, \mu, \sigma, t)$ entre des applications μ, σ, t et ϖ définies respectivement sur $\tilde{I}$, $(0,\ldots J)$, $\tilde{I} \times (1,\ldots J-1)$ est définie si et seulement si le système $\mathcal{E}_f$ est un système d'Adams et Messick.

Cette définition généralise la notion d'échelle dérivée, avec les échelles dérivées multiples suivantes : $< \mathcal{E}_f \,,\, R^\circ_f, \mu \,,\, \sigma \,,\, t >$.

THEOREME DE REPRESENTATION

Si un système des intervalles successifs est d'Adams et Messick,
il existe une application μ de $\tilde{I}$ dans R ;
il existe une application σ de $\tilde{I}$ dans R^*_+ ;
il existe une application t de $(1,\ldots,J-1)$ dans R complétée par
$t_0 = -\infty$, $t_j = +\infty$;
telles que $< \mathcal{E}_f \,,\, R^\circ_f \,, \mu \,, \sigma \,, t >$ est une échelle multiple dérivée.

Cela résulte des propriétés précédentes. □

Remarque : la réciproque est également vérifiée.

THEOREME DE CARACTERISATION

L'échelle multiple dérivée $< \mathcal{E}_f \,,\, R^\circ_f, \mu \,, \sigma \,, t >$ est une échelle de rapport en σ , d'intervalle en μ et t, avec la même unité pour les trois, et la même origine pour μ et t.

Démonstration : les ϖ_{nj} sont mesurés avec une échelle absolue, donc les z_{nj} , α_{nm} et β_{nm}. Un indice n° étant donné on peut en déduire :

$$\sigma_n = \alpha_{n^\circ n} \; \sigma_{n^\circ} \quad , \mu_n = \sigma_{n^\circ} \; \beta_{n^\circ n} + \mu_{n^\circ} \; ,$$

$$t_j = \sigma_{n^\circ} \; z_{n^\circ j} + \mu_{n^\circ} \; .$$

Ces relations montrent les dépendances affines positives de t_j et μ_n, et linéaire positive de σ_n en fonction de σ_{n° et μ_{n° . $\square$

Remarques : 1) on a ici un résultat de mesurage déduit ; comme les ϖ_{nj} sont mesurés avec une échelle absolue, la caractérisation est valable au sens large comme au sens étroit, (définition complémentaire en réf. 27,31).

2) Ce résultat montre qu'en référence 31 la "condition R" du mesurage déduit est équivalente à la définition 32 d'un système A.M (page 63) ; cette redondance est inutile. La démonstration précédente présente aussi l'intérêt de définir simultanément les trois échelles t, μ et σ.

ANNEXE 2 - Commentaires sur les intervalles successifs

i) L'interprétation est la suivante, à chaque stimulation S_i correspond un "processus discriminant de Thurstone" défini par la distribution de probabilité de densité F' $((t - \mu_i)/\sigma_i) / \sigma_i$, de moyenne $\mu_i + \mu_F \sigma_i$ et variance $\sigma_F^2 * \sigma_i^2$ (figure 2). Quant aux distributions que suivent les bornes entre intervalles t_j, ce sont ici des distributions de Dirac ; c'est une façon comme une autre d'apporter les simplifications nécessaires au système général des jugements catégoriels (réf.35).

ii) Adams et Messick ont remarqué que F n'est pas nécessairement la loi normale. Cela peut être la loi logistique plus simple d'emploi ; par référence aux mécanismes neurologiques (réf.33) on peut aussi envisager une loi limite (normale, Cauchy, Frechet-Fisher-Tippett) ; on a aussi proposé les distributions définies par $F(x) = (1+\alpha e^{-x})^{-1/\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ (réf.39). Le recueil des données sous forme de fréquences des réponses se prête tout à fait au mesurage probabiliste (réf. 12,15), une adaptation est en cours pour tester le choix de F.

iii) Le codage des inconnues μ_i, σ_i et t_j est réalisé en fait par des algorithmes de minimisation quadratique ou de maximisation de la vraisemblance (réf.22,28,35) qui reprennent implicitement l'approche probabiliste.

ANNEXE 3 - La solution analytique du codage final

Soit le lagrangien :

$$\mathcal{L}^W = \sum_{i,k} W_{ik} (a_i + b_k - \mu_{ik})^2 - 2 \lambda \sum_i W_{i.} a_i$$

a) Le système des conditions nécessaires pour la recherche d'un optimum (dérivées partielles par rapport aux inconnues a_i, b_k et λ), est le suivant :

$$\begin{cases} D_I\, a + W\, b = \mu_I^W - \lambda W_I \\ W'\, a + D_K\, b = \mu_K^W \\ W_I'\, a = 0 \end{cases}$$

dans lequel on emploie les notations vectorielles suivantes :

μ_I^W , μ_K^W , W_I , W_K , a, b, $\omega_I \in R^I$, $\omega_K \in R^K$ sont les vecteurs qui ont respectivement pour coordonnées $\Sigma_k \mu_{ik} W_{ik}$, $\Sigma_i \mu_{ik} W_{ik}$, $W_{i.} = \Sigma_k W_{ik}$, $W_{.k} = \Sigma_i W_{ik}$, a_i, b_k, 1, 1 ; W, D_I, D_K sont les matrices dont les éléments sont égaux à W_{ik}, $\delta_{ii'} W_{i.}$, $\delta_{kk'} W_{.K}$.

Comme ω_I' $(D_I\, a + W\, b - \mu_I^W) = \omega_K' (W'\, a + D_K\, b - \mu_K^W)$ le multiplicateur de Lagrange λ est nul.

Avec ces notations la liaison supplémentaire est destinée à supprimer l'indétermination $a + \xi\, \omega_I$ et $b - \xi\, \omega_K$ sur a et b.

b) Dans R^K on considère le sous-espace orthogonal supplémentaire $\omega_K^{\perp}$.

<u>LEMME 1</u> : Il n'existe aucun vecteur x_K non nul de $\omega_K^{\perp}$ qui annule la forme $x_K' (D_K - W' D_I^{-1} W)\, x_K$ si et seulement si la matrice W n'est pas diagonalisable par blocs.

Démonstration : on remarque pour commencer que la forme est nulle pour ω_K puisque $D_K\, \omega_K = W' D_I^{-1} W \omega_K = W_K$; pour tout x_K non nul de $\omega_K^{\perp}$ la démonstration figure en référence 24.

Corollaire : On a un résultat analogue dans R^I pour x_I , $\omega_I^{\perp}$ et la forme $x_I' (D_I - W D_K^{-1} W')\, x_I$. □

LEMME 2 : Chacune des équations suivantes :

$$(D_I - W D_K^{-1} W')\ a = \mu_I^W - W D_K^{-1} \mu_K^W$$

$$(D_K - W' D_I^{-1} W)\ b = \mu_K^W - W' D_I^{-1} \mu_I^W$$

possède une solution unique $a° \in \omega_I^{\perp}$, $b° \in \omega_K^{\perp}$ si et seulement si W n'est pas diagonalisable par blocs.

Démonstration :

1) Les seconds membres vérifient $\omega_I' \, (\mu_I^W - W D_K^{-1} \mu_K^W) = 0$ et $\omega_K' \, (\mu_K^W - W' D_I^{-1} \mu_I^W) = 0$, ils appartiennent respectivement à $\omega_I^{\perp}$ $\omega_K^{\perp}$;

2) d'après le lemme 1 , $D_I - W D_K^{-1} W'$ et $D_K - W' D_I^{-1} W$ sont régulières respectivement dans $\omega_I^{\perp}$ et $\omega_K^{\perp}$ si et seulement si W n'est pas diagonalisable par blocs.

Par conséquent chacune des deux équations de l'énoncé possède une solution unique $a° \in \omega_I^{\perp}$, $b° \in \omega_K^{\perp}$; tous $a = a° + \gamma \omega_I$, $b = b° + \delta \omega_K$ sont également des solutions, respectivement dans R^I, R^K. □

c) Proposition : Quand W n'est pas diagonalisable par blocs, la fonctionnelle Q^W admet un minimum global strict dans l'hyperplan $W_I' \, a = 0$.

Démonstration : Le système des conditions nécessaires de l'optimum possède les mêmes solutions que le système suivant :

$$\begin{cases} (D_I - W D_K^{-1} W')\ a = \mu_I^W - W D_K^{-1} \mu_K^W \\ D_K\, b = \mu_K^W - W' a \\ W_{I'}\, a = 0 \end{cases}$$

lequel sous les hypothèses de l'énoncé admet la solution :

$$\gamma^* = - (W_I' \, a°) / W_{..}$$

$$a^* = a° + \gamma^* \omega_I$$

$$b^* = D_K^{-1} (\mu_K^W - W' a°) - \gamma^* \omega_K$$

avec $a°$ non nul unique dans $\omega_I^{\perp}$.

Par ailleurs la fonctionnelle Q^W est convexe, comme le montre l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à chaque terme, pour tout τ de $]0\ 1[$

$$(\tau(a_{1i} + b_{1k} - \mu_{ik}) + (1-\tau)(a_{2i} + b_{2k} - \mu_{ik}))^2 \leq$$

$$\tau(a_{1i} + b_{1k} - \mu_{ik})^2 + (1-\tau)(a_{2i} + b_{2k} - \mu_{ik})^2$$

avec égalité si et seulement si $a_2 = a_1 + \xi\,\omega_I$, $b_2 = b_1 - \xi\,\omega_K$.

La liaison sur (a,b) étant linéaire il en résulte que Q^W possède en (a^*, b^*) un minimum global large (réf.26). Ce point étant unique par construction, c'est un minimum strict. $\square$

d) Le système des conditions nécessaires pour le minimum du Lagrangien s'écrit également comme suit :

$$\begin{cases} D_I\, a & = \mu_I^W - W\, b \\ (D_K - W'\, D_I^{-1}\, W)\, b & = \mu_K^W - W'\, D_I^{-1}\, \mu_I^W \\ W_I'\, a & = 0\ ; \end{cases}$$

ce qui donne la solution sous la forme suivante :

$$\delta^* = (\omega_I'\, \mu_I^W - W_K'\, b°)\ /\ W..$$

$$b^* = b° + \delta^* \omega_K$$

$$a^* = D_I^{-1}\ (\mu_I^W - W\, b°) - \delta^* \omega_I$$

avec le $b°$ non nul unique dans $\omega_K^{\perp}$.

En pratique on peut se limiter à la résolution en $a°$ ou $b°$ qui correspond au vecteur de dimension inf (I,K) ; d'autre part les sous-programmes de la bibliothèque Nag par exemple résolvent les systèmes linéaires où la matrice est singulière, en l'occurence $D_I - W\, D_K^{-1}\, W'$ et $D_K - W'\, D_I^{-1}\, W$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS E., MESSICK S., "An axiomatic formulation and generalisation of successive intervals scaling", Psychometrika, 23 n°4, (1958), 355-368.

[2] ANDERSEN E.B., Discrete statistical models with social science applications, Amsterdam-New-York-Oxford, North-Holland, (1980).

[3] BARBUT M., "Echelles de mesure", dans Combinatoire, Graphes et Algèbre, Mathématiques et Sciences de l'Homme, n° XIX, Paris, Mouton-Gauthier-Villars, (1973),143-172.

[4] BOGARTZ R.S., WACKWITZ J.H., "Polynomial response scaling and functional measurement", J. of Math. Psychology, n° 8, (1971), 418-443.

[5] CARROLL J., ARABIE P., "Multidmensionnal scaling", Annual Rev. of Psychology, (1980), 607-649.

[6] CLIFF N., "Scaling", Annual Rev. of Psychology, (1973), 473-506.

[7] COOMBS C.H., DAWES R.M., TVERSKY A., Mathematical Psychology, Englewood cliff New-Jersey, Prentice-Hall Inc, (1970). Traduction française : Psychologie Mathématique, Paris, Presses Universitaires de France, (1975).

[8] DE LEEUW J., YOUNG F.W., TAKANE Y., "Additive structure in qualitative data : an alternating least-squares method with optimal scaling features", Psychometrika, 41 n°4, (1976), 471-503.

[9] EISLER H., "On the problem of category scales in psychophysics", Scand. J. of psychology, 3, (1962), 81-87.

[10] FALMAGNE J.C., "Foundations of Fechnerian psychophysics", in Krantz, Atkinson, Luce, Suppes, Contemporary developments in mathematical psychology, vol. II, San Francisco, Freemann, (1974), 127-159.

[11] FALMAGNE J.C., "Random conjoint measurement and loudness summation", Psychol. Review, 83 n°1, (1976), 65-79.

[12] FALMAGNE J.C., "Probabilistic choice behavior theory : axioms as constraints in optimisation", in Castellan, Restle, Cognitive theory, vol.3, Hillsdale, New-York, L. Elbaum Ass. P., (1978), 93-114.

[13] FISHBURN P.C., "Additive representations of real valued functions on subsets of products sets", J. of Math. Psychology, n°8, (1971), 382-388.

[14] GALANTER E., MESSICK S., "The relation between category and magnitude scales of Loudness", Psychological Review, 68 n°6, (1961), 363-372.

[15] HAMERLE A., TUTZ G., "Goodness of fit tests for probabilistic measurement models", J. of Math. Psychology, 21, (1980), 153-167.

[16] KRANTZ D.H., "Measurement structures and psychological Laws", Science, n°175, (1972), 1427-1435.

[17] KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A., Foundations of measurement, vol.1, New-York, London, Ac.Press, (1971).

[18] LANGDON F.J., "The problem of measuring the effects of trafic noise", in Alexandre, Barde, Langdon, Lamure, Road traffic noise, London, Applied Sciences, (1975), 27-69.

[19] LEVELT W.J., RIEMERSMA J.B., BUNT A.A., "Binaural additivity of Loudness", Br. J. of Math. and Stat. Psychology, 25, (1972), 51-68.

[20] LUCE R.D., GALANTER E., "Discrimination, Psychological scaling" in Luce, Bush, Galanter, Handbook of Mathematical Psychology, vol.1, New-York, J. Wiley, (1963), 191-243, 245-307.

[21] MARKS L., "Stimulus range, number of categories and form of the category scale", The Am. J. of Psychology, 81 n°4, (1968), 467-479.

[22] MAURIN M., "An another leastsquare solution for the successive intervals following Adams and Messick", 3th european meeting of the Psychometric society, Jouy en Josas, France, 1983.

[23] MAURIN M., DELEPINE P., MORLOT P., Echelles de catégories ordonnées et intervalles successifs, Bron, IRT-CERNE, (1984).

[24] MAURIN M., TOUBOUL E., "Codage optimal et sur-optimal sur un tableau invariant", Mathématiques et Sciences Humaines, n°85, (1984), 19-55.

[25] NARENS L., "Meaningfulness and the Erlanger program of Felix Klein", 16th EMPG meeting, 8-11 september 1985, Montpellier.

[26] PALLU DE LA BARRIERE, Cours d'automatique théorique, Paris, Dunod, (1966).

[27] ROBERT F.J., Measurement theory, Reading, Massachusetts, Addison Wesley P. Co., (1979).

[28] SCHONEMANN P.H., TUCKER L.R., "A maximum likelihood solution for the method of successive intervals, allowing for unequal stimulus dispersion", Psychometrika, 32 n°4, (1967), 403-417.

[29] STEVENS S.S., "A metric for the social concensus", Science, 151, (1966), 530-541.

[30] STEVENS S.S., "Issues in psychophysics", Psychological Review, 78 n°5, (1971), 426-450.

[31] SUPPES P., ZINNES J.L., "Basic measurement theory", in Luce, Bush, Galanter, Handbook of mathematical psychology, vol 1, New-York, J. Wiley, (1963), 1-76.

[32] TAKANE Y., "Maximum likelihood additivity analysis", Psychometrika, 17 n°3, (1982), 225-241.

[33] THOMPSON W.A., SINGH J., "The use of limit theorems in paired comparison model building" Psychometrika, 32 n°3, (1967), 255-264.

[34] TIBERGHIEN G., Initiation à la psychophysique, Paris, Presses Universitaires de France, (1984).

[35] TORGERSON W.S., Theory and methods of scaling, New-York, J. Wiley, (1958).

[36] ULLMO J., La pensée scientifique moderne, Paris, Flammarion, (1969).

[37] VALLET M., MAURIN M., PAGE M.A., FAVRE B., PACHIAUDI G., "Annoyance from and habituation to road traffic noise from urban expressways", J. of sound and vibrations, 60, (1978), 423-440.

[38] VERNET M., LAURENS J.F., BRUYERE J.C., AUPETIT J., Gêne due au bruit des deux roues, étude pour le CETUR, Bron, IRT-CERNE, (1983).

[39] VIJN P., "Ordinal data, ordered scale points and order statistics", Psychometrika, 48 n°3, (1983), 437-449.