

PIERRE PARLEBAS

**Les jeux de paume : systèmes des scores, morphismes et paradoxes**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 92 (1985), p. 41-68

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1985\\_\\_92\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1985__92__41_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LES JEUX DE PAUME : SYSTEMES DES SCORES,  
MORPHISMES ET PARADOXES

Pierre PARLEBAS\*

*"Car vous savez que ce noble jeu a toujours fait le divertissement des personnes de la première qualité, et bientôt vous verrez que s'il est utile pour l'exercice du corps, il est très capable et très digne aussi de fixer les méditations de l'esprit".* C'est en ces termes insolites que Jacques Bernoulli introduit sa *Lettre à un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume* ([1] p.2), lettre qui clôt le célèbre *Ars conjectandi*, ouvrage posthume publié en 1713, dans lequel l'auteur jette les fondements d'une science de la décision.

Pas plus que Pascal, Bernoulli n'hésite à choisir ses exemples dans l'univers des jeux. *"J'entre dans le détail de toutes les particularités de mon sujet"*, écrit-il à propos de son étude du jeu de Paume, *"sans craindre le reproche que l'on me pourrait faire de vous entretenir trop sur une bagatelle"*. Ce brillant divertissement physique de l'époque associe en effet l'aristocratie de ses pratiquants à la noblesse de sa pratique. Jeu des rois, la Paume apparaissait le roi des jeux. Prenant en compte les coups remportés par les joueurs, Bernoulli développe son célèbre *"schéma d'urne"* en évaluant des probabilités de réussite *"a posteriori"*, *"par l'observation de l'événement plusieurs fois réitérée"*. Dans cette *Lettre à un Amy* de 35 pages, le tripot devient le véritable laboratoire du mathématicien épris d'action rationnelle et efficace.

Le problème identifié par Bernoulli, dans la lignée des travaux fondateurs de Pascal sur la règle des partis (1654), peut être interprété aujourd'hui comme une illustration de l'universel du système des scores. Le problème

---

U.E.R. de Mathématiques, Logique Formelle et Informatique, Université PARIS V.  
Laboratoire : "Jeu sportif et Science de l'action motrice", Institut National du Sport et de l'Education physique", Paris 12<sup>ème</sup>.

avait ainsi été posé de façon magistrale il y a près de trois siècles, et cela bel et bien dans le domaine du jeu sportif. Pouvons-nous le reprendre à la lumière des pratiques et des données actuelles ?

Tout comme les autres universaux des jeux sportifs, le système des scores admet une modélisation précise. Les contraintes liées aux règles du jeu peuvent en effet être converties en structures de fonctionnement rigoureuses. Dans un article précédent [3], nous avons présenté les propriétés mathématiques de ce système des scores dans le cas du set de volley-ball. Nous allons maintenant replacer chaque set dans le contexte du match, puis nous essaierons de généraliser le modèle à toute une classe de jeux sportifs, la famille des jeux de paume.

## I. LE SYSTEME DES SCORES DU MATCH

Les analyses précédentes ont porté sur le set de volley-ball. Celui-ci est l'élément de base du match : dès que commencé, il se déroule de façon autonome et s'achève par la désignation de son vainqueur.

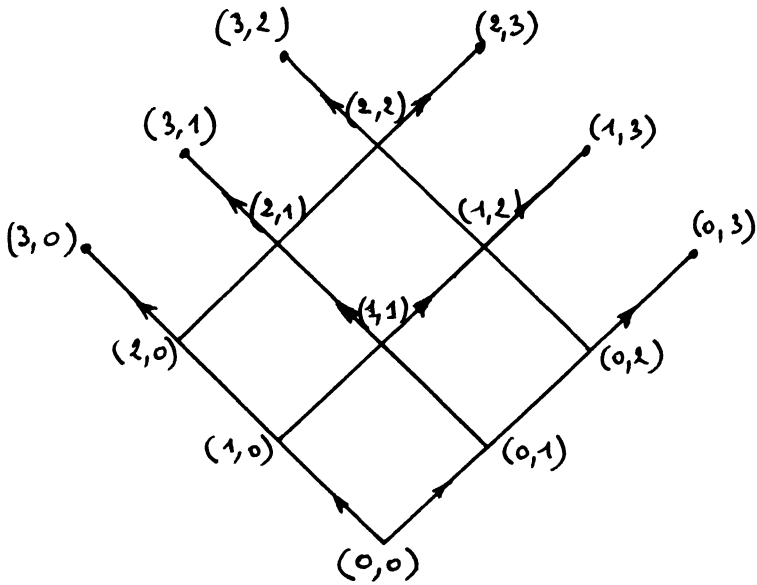
*"Tous les matchs internationaux se jouent en 3 sets gagnants"* : cette disposition de la règle 12 du code de jeu accroît de façon spectaculaire l'étendue de la durée possible d'une rencontre; celle-ci ne se termine que lorsqu'une équipe a remporté 3 manches. Au point de vue du nombre de points marqués, le total peut ainsi varier de 45 ( $15 \times 3$ ) à 140 ( $28 \times 5$ ), sans tenir compte d'éventuelles prolongations possibles.

### 1. Le réseau du match

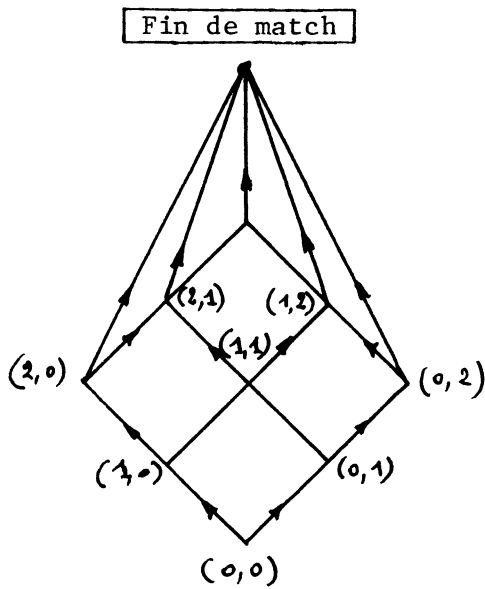
Ainsi que le montre le graphe des scores de match (fig. 1), cette règle entraîne des chemins de longueur variant entre 3 et 5. Ce réseau est l'ensemble-produit des 2 ordres totaux  $(0,1,2,3) \times (0,1,2,3)$  auquel on a retiré le couple  $(3,3)$ . Il s'agit d'un inf.-demi-treillis fini possédant 15 sommets dont 6 sont maximaux (6 fins de match possibles).

En regroupant tous les scores terminaux en une seule classe d'équivalence, on obtient alors un treillis à dix sommets qui résume tous les possibles et met en évidence les trois longueurs de chemin observables : 3, 4 ou 5 (fig. 1). Un match peut donc se dérouler en 3, 4 ou 5 sets : c'est là une source évidente de variabilité de durée.

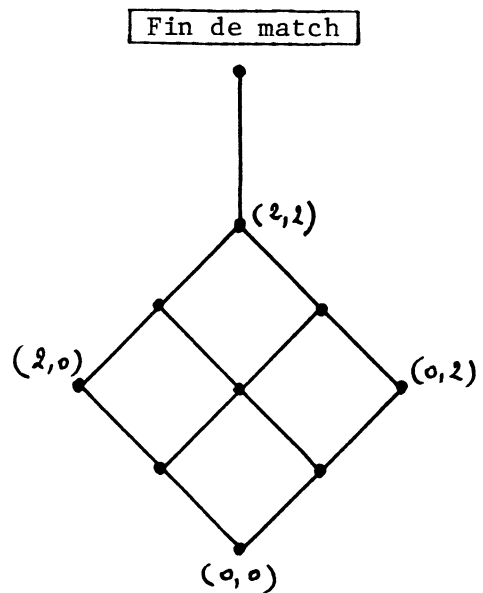
Il est à noter qu'aucun match ne peut se terminer par un score "à égalité"; le troisième set gagné par une équipe consacre systématiquement la victoire de celle-ci. C'est là une originalité du volley-ball qui est le seul de nos sports collectifs à posséder ce trait particulier.



Cet inf-demi-treillis possède 6 éléments maximaux (scores finaux). Il est fini et sans boucle. On dénombre 20 chemins maximaux dont la longueur varie de 3 à 5.



Tous les scores maximaux sont regroupés en une seule classe d'équivalence : le sommet "fin de match" (maximum du réseau).



Structure de treillis répondant au réseau des scores de match.

Fig. 1 - Système du match de volley-ball en trois sets gagnants.

Ce modèle possède une structure de treillis; il est dénué de circuit. Tout en ménageant une variabilité importante, il encadre les sets du match dans un dispositif fini et contrôlable.

Par comparaison au réseau du set, deux remarques s'imposent. Le treillis du match est un treillis fini : d'une part, les circuits de prolongation des 2 points d'écart n'apparaissent pas et d'autre part, les boucles des sommets ont toutes disparu. Les sources d'indétermination, dues à la présence des cycles, ont ainsi été supprimées.

Au point de vue du nombre de sets joués, le match possède une marge de variation importante : de 3 à 5. Celle-ci est cependant inférieure à un rapport allant du simple au double. Dans l'augmentation des durées de match, en tant que cause isolée, cette règle des 3 sets gagnants est à coup sûr pesante, mais peut-être moins déterminante qu'on l'affirme parfois.

## 2. L'organigramme du match

Cette organisation peut, elle aussi, être traduite sous forme d'organigramme (fig. 2). Celui-ci confirme bien entendu les conclusions précédentes : il n'existe plus de circuits d'indétermination. On constate que les deux boucles d'itération possèdent un seuil d'arrêt fixe qui débouche sur la fin du match dès que ce seuil des 3 sets gagnés est atteint.

En faisant "tourner" cet organigramme, on peut formuler de nouvelles propriétés complétant les premières et portant cette fois-ci sur le match :

### Propriété 9

Au cours de la totalité d'un match (en 3, 4 ou 5 sets), la différence entre le nombre de rotations respectivement effectuées par les deux équipes est au plus égale à 2 .

On sait en effet qu'après le tirage au sort du début de match, les équipes bénéficient à tour de rôle de la première mise en jeu du set et que l'éventuel 5ème set donne lieu à un nouveau tirage au sort. Plongées dans l'organigramme du match, ces dispositions, conjuguées aux propriétés 3 et 5, entraînent que la différence des changements de service remportés peut être nulle, égale à 1 ou égale à 2 .

L'arbre des sets successifs (fig. 3), révèle que la différence entre les nombres de changements de services remportés par les deux adversaires est pré-déterminée dans des limites très étroites :

- l'équipe perdante ne remporte jamais plus de changements de service que l'équipe gagnante
- la différence entre ces nombres de changements de service est égale à :
  - 0 ou 1 pour les matchs en 5 sets,
  - exactement 1 pour les matchs en 4 sets,

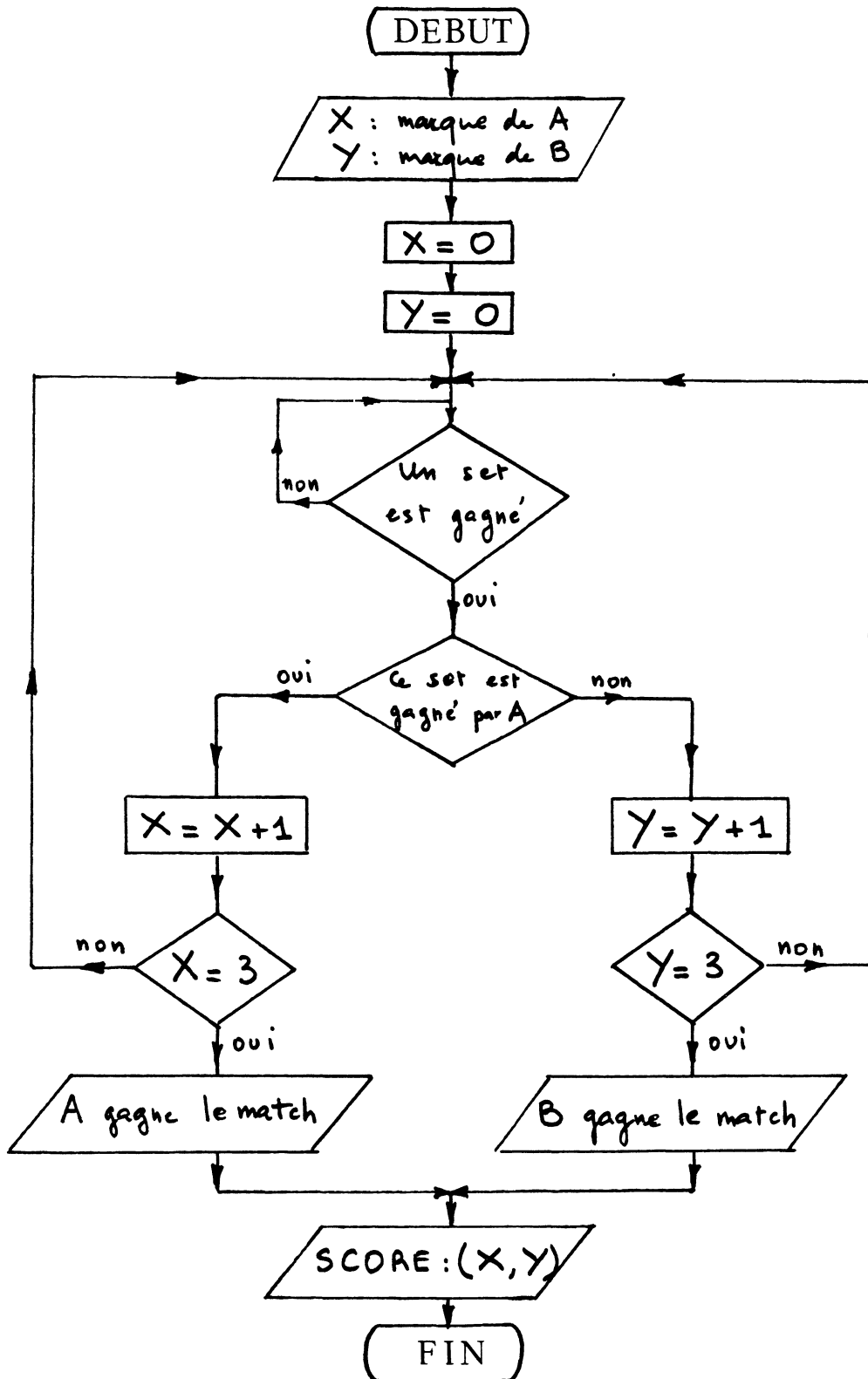


Fig. 2 - Organigramme du système du match.

Trois sets gagnés assurent automatiquement de la victoire, ce qui demande parfois d'effectuer un total de cinq manches. Ce réseau est dénué de cycles sans fin.

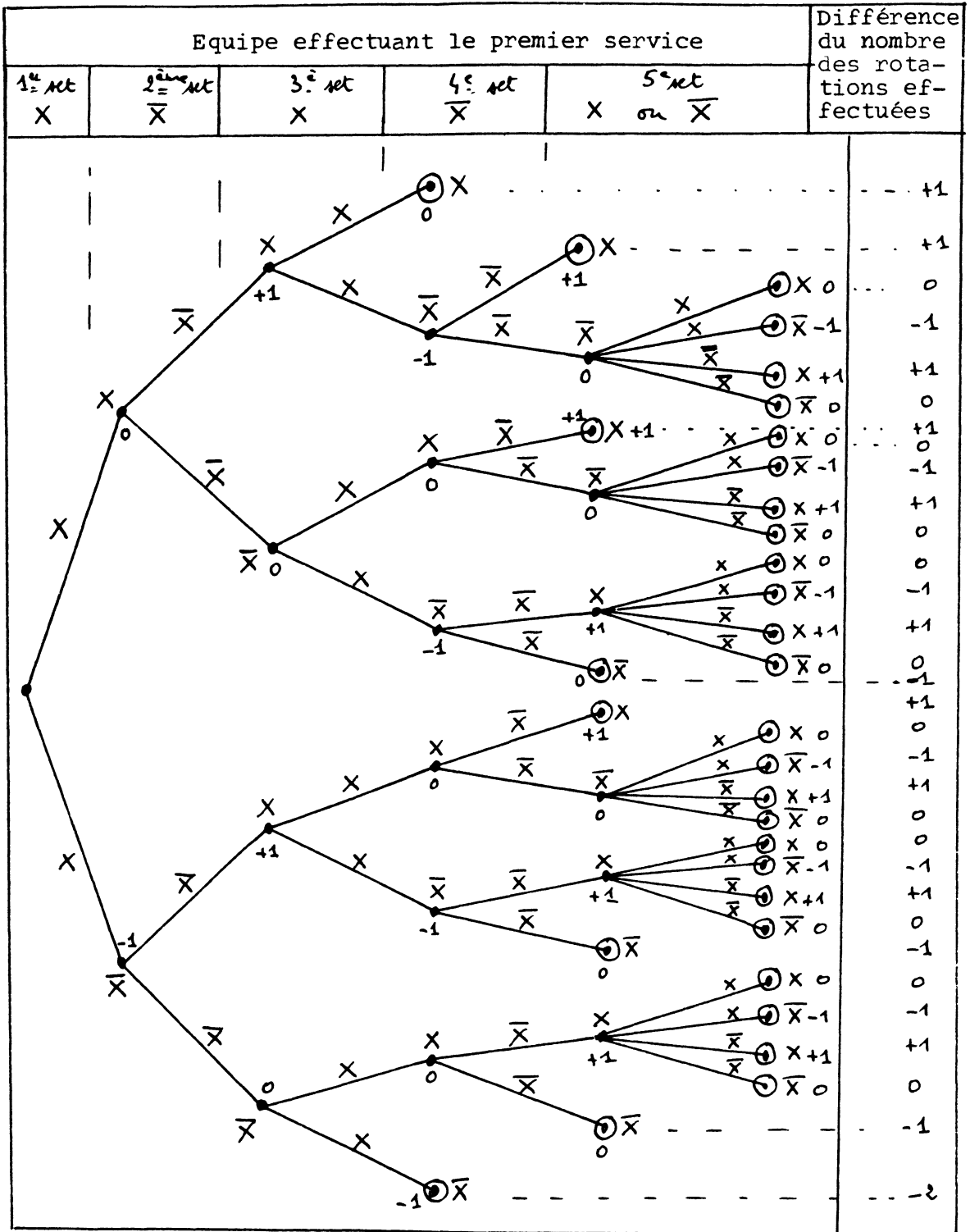


Fig. 3 - Arbre des sets successifs d'un match de volley-ball permettant d'évaluer la différence des rotations effectuées par les deux équipes.

Tous les possibles ont été pris en compte, en fonction de l'équipe qui effectue le premier service et de l'équipe qui gagne le set. A chaque sommet sont associés l'équipe gagnant le set (X ou  $\bar{X}$ ) et l'écart séparant les nombres de rotations effectuées par les deux équipes (par convention, l'écart est positif quand il est favorable à X et négatif quand il est favorable à  $\bar{X}$ ). En fin de match, l'écart maximum n'est que de 2 unités.

- 1 ou 2 pour les matchs en 3 sets.

Le nombre de coups remportés par une équipe étant égal au nombre de ses points auxquels s'ajoutent les changements de service en sa faveur, on a donc aussi :

#### Propriété 10

A la fin d'un match, la différence  $d_c$  entre le nombre de coups respectivement remportés par l'une et l'autre équipe est égale à la différence  $d_p$  de leurs points respectifs, à deux unités près au maximum. Il vient :

$$0 \leq |d_c - d_p| \leq 2$$

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, cet écart vaut :

- 0 ou 1 lors des matchs en 5 sets,
- exactement 1 dans les matchs en 4 sets,
- 1 ou 2 lors des matchs en 3 sets.

La différence des coups entre équipes suit donc de très près la différence des points dont elle ne s'écarte, au maximum, en fin de match, que de 2 unités. Voilà qui confirme le rôle quantitatif insignifiant que jouent les coups "blancs", c'est-à-dire les changements de service, dans le fait de départager les adversaires.

## II. LA FAMILLE DES JEUX DE PAUME

Par "jeux de paume", nous entendons les jeux de balle qui se déroulent au score-limite, avec renvoi du projectile au-delà d'un filet ou contre un fronton : volley-ball, tennis, ping-pong, squash, courte paume, balle au tambourin, badminton, jeux de pelote basque ... Sous l'angle qui nous préoccupe ici, l'un des traits essentiels de tous ces jeux est de posséder un système des scores soumis à la contrainte de la marque-limite, et non à celle du temps-limite caractérisant les autres sports collectifs classiques.

Outre les jeux qui se pratiquent à main nue, cette classe d'équivalence regroupe aussi, malgré son appellation générique conventionnelle (jeu "de paume"), des spécialités qui nécessitent une raquette, un gant, une palette ou une chistera. La plupart de ces activités dérivent ouvertement de l'ancien et célèbre jeu de paume; ce n'est cependant pas le cas du volley-ball inventé de toutes pièces par William Morgan au Collège de Massachussets en 1895. Cette classe ne vise pas en effet à rassembler des sports reliés par une filiation historique, mais à regrouper les jeux dont la logique interne du système des scores est très proche.



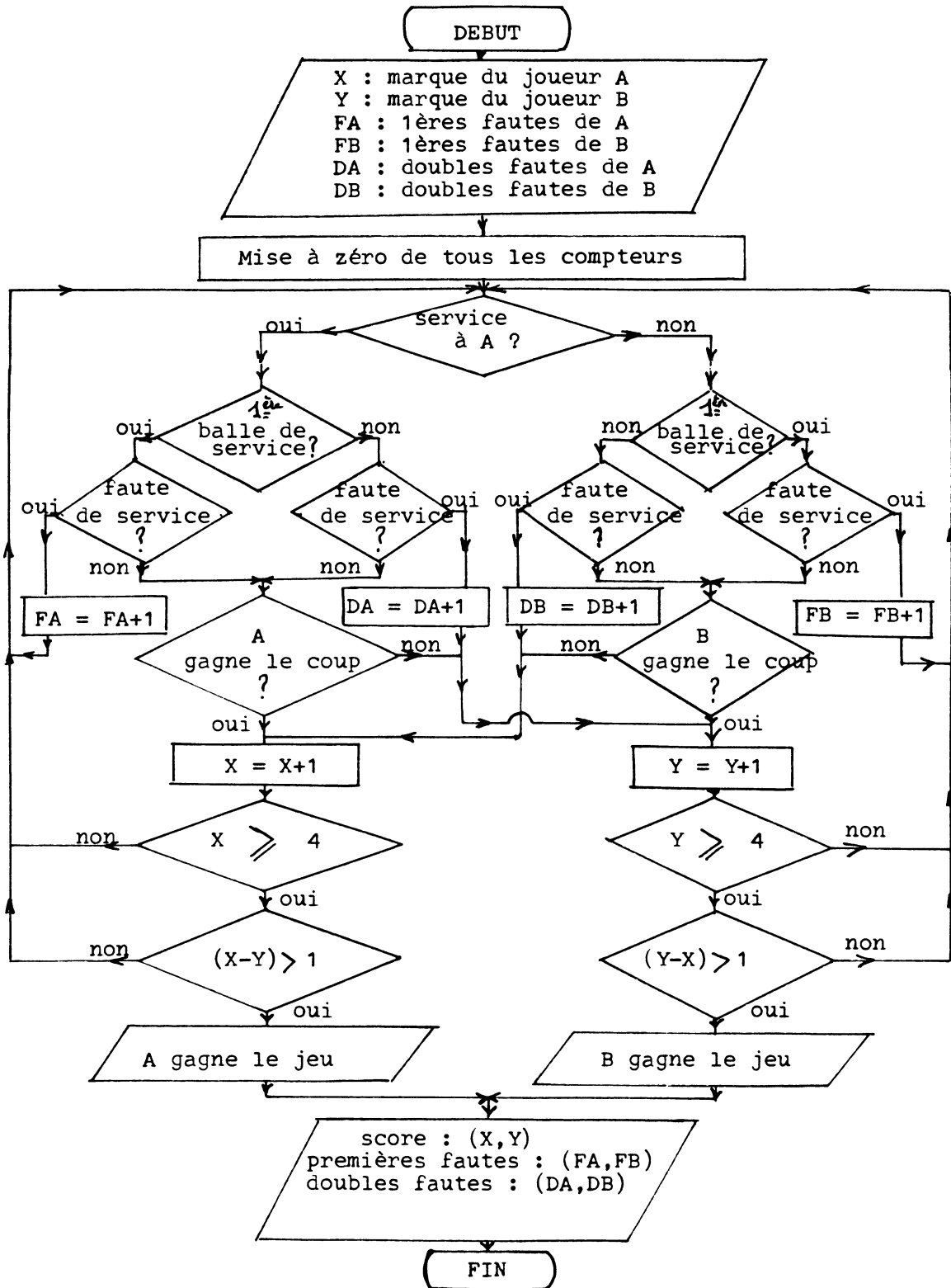


Fig. 4 - Organigramme d'un jeu de tennis.

Les fautes sur premier et second services sont ici dénombrées. Le circuit des changements de service, observé au volley-ball, a disparu : chaque coup joué (sauf "faute" au premier service) compte systématiquement 1 point. La condition des deux points d'écart rend possible une prolongation interminable.

L'exemple du volley-ball a permis de mettre en pleine lumière la subtilité des mécanismes des scores et de leurs règles d'arrêt conditionnelles. Sous l'angle de la comptabilité des marques, le volley-ball fait partie de la grande famille des jeux de paume. Il semble souhaitable d'en compléter l'étude par l'examen du tennis dont le foudroyant développement actuel est révélateur, dans la structure même de ses scores, de la logique et de la spectacularité du duel sportif.

Au cours des dernières années, la Fédération de tennis a modifié ses règles de supra-jeu afin de mieux contrôler la durée des matchs; déjà apparente au volley-ball, cette préoccupation était devenue obsédante sur les courts dont l'environnement financier ne pouvait tolérer trop d'imprévu. Comment cette organisation du système des scores, qui se veut être aussi une gestion du temps, s'opère-t-elle au tennis ?

### 1. Les réseaux du tennis

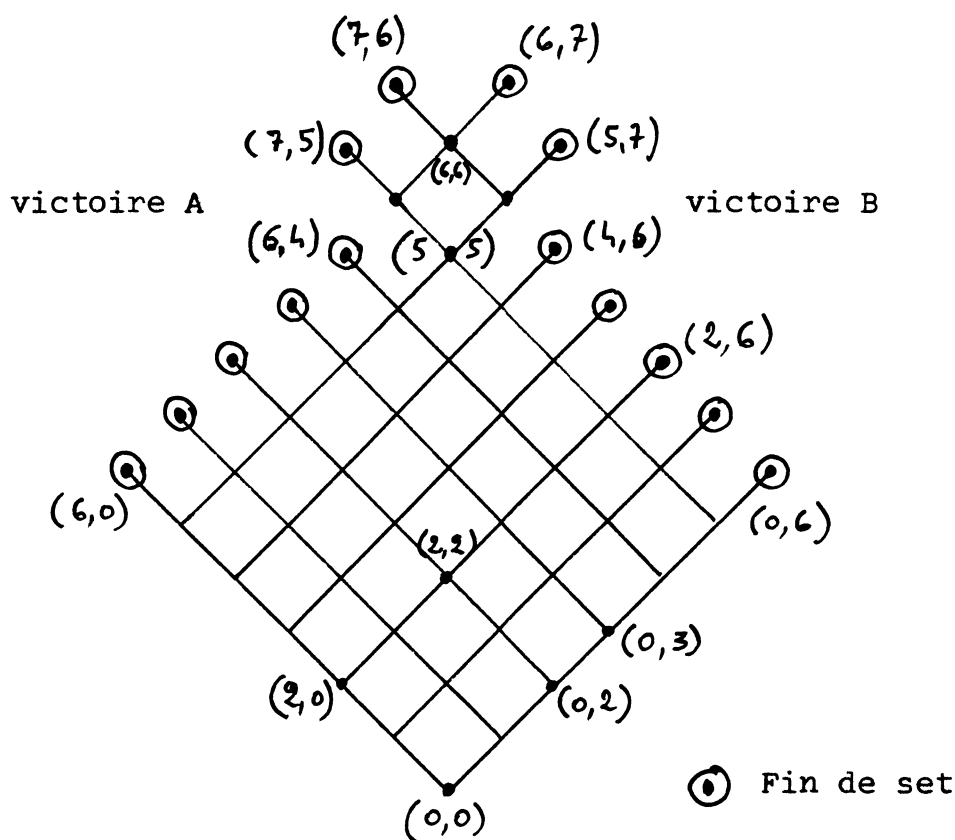
Jeu au score-limite dont le très sophistiqué système des marques est proche de celui du volley-ball, le tennis dispose de trois réseaux dont chacun possède une structure de treillis. On observe, d'une part le réseau du "jeu" en quatre points gagnants et celui du set en six jeux gagnants (tous deux assortis de la règle des deux points d'écart), d'autre part le réseau du match en trois sets gagnants, à clôture non conditionnelle. Quelles sont les particularités de ce système des scores ?

#### a) Caractéristiques classiques

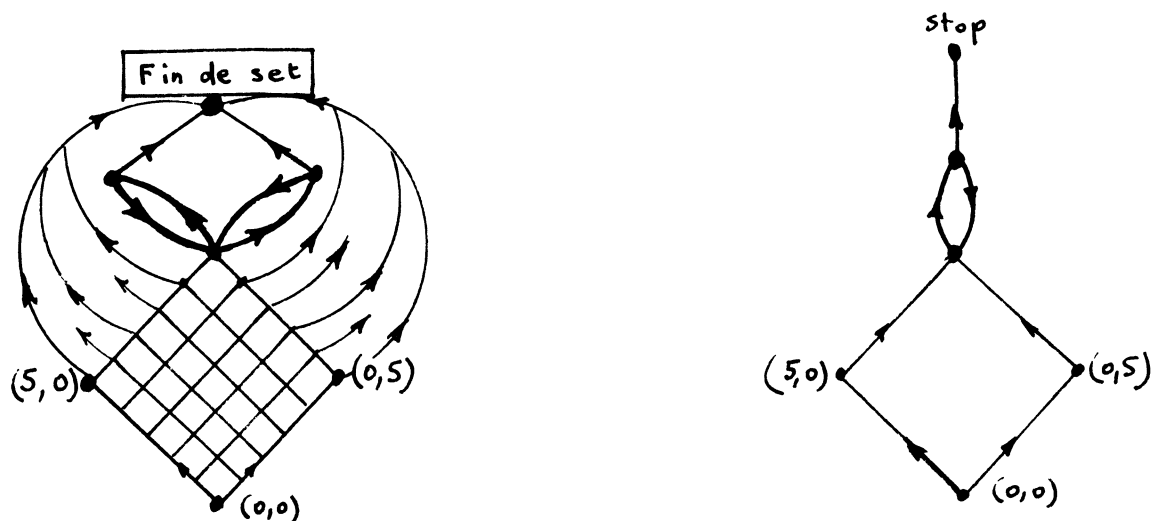
Deux traits sont à noter :

- *Le réseau du "jeu" : absence de circuit attaché à chaque sommet. Tout coup perdu par un joueur entraîne l'attribution d'un point à son adversaire (en dehors de la première balle de service ratée qui laisse le score intact). Cette suppression des circuits "infinis" qui seraient liés au changement de service, diminue massivement le nombre des possibles. L'organigramme de la figure 4 détaille le cheminement de ces opérations au cours du "jeu".*

- *L'emboîtement de trois réseaux dont deux sont à clôture conditionnelle. Un "jeu" ne peut s'achever que lorsque l'un des pratiquants possède au moins deux points d'avance et une manche ne peut être conclue là encore que lorsque l'un des acteurs détient un avantage d'au moins deux "jeux" (fig. 5). Jeux et manches multiplient ainsi les occasions de prolongations et conjuguent leurs causes d'allongement temporel possible. L'institution va tenter d'élever une digue pour contenir ce flux des scores qui pourrait déborder l'horaire prévu.*



Set avec jeu décisif. A la marque d'arrêt 6, la clôture est soumise à la règle des deux points d'écart; elle devient absolue à la borne 7. La micro-prolongation, avec un seul point d'écart, n'intervient que si la ligne des scores atteint le sommet (6,6).



Set avec jeux normaux. Le réseau du set est dénué d'arrêt absolu. A la marque 6, si l'écart est inférieur à 2, la manche se prolonge (de façon illimitée) jusqu'à ce qu'un joueur domine son adversaire de deux jeux.

Fig. 5 - Clôture du set de tennis par jeux normaux ou jeu décisif.

Chaque set s'achève dès qu'un joueur affiche 6, sous réserve de devancer son adversaire d'au moins deux jeux. En l'absence de cette condition, le set normal est prolongé jusqu'à l'obtention de ces deux points d'écart, le set avec "tie-break" est arrêté abruptement dès le gain du 7ème jeu.

b) Une innovation récente

La digue prend nom de "jeu décisif" (ou "tie-break"). Expérimentée dès 1970 au cours des tournées professionnelles, cette procédure de supra-jeu est entrée en vigueur le 1er janvier 1975, après approbation de l'Assemblée générale de la Fédération Internationale de Lawn-tennis : elle reste localement soumise à l'acceptation des fédérations nationales.

Cette règle rend "décisif" le "jeu" qui se déroule après que le score ait atteint (6,6) : le vainqueur de ce jeu décisif sera le vainqueur de la manche. La figure 5 illustre le mécanisme d'arrêt abrupt de ce type de set. Quand un joueur obtient la marque 6, ou sinon 7, avec une marge minimum de deux points d'avance, le système classique reste inchangé (victoire en (6,2) ou en (7,5) par exemple); sinon, le score passe par le point d'articulation du graphe, le score (6,6), point de passage obligé du jeu décisif; un seul score terminal est alors accepté : le score {7,6} . Cette règle empêche le flot des scores de déborder outre mesure.

Comme le montre la figure 6, le souci de spectacularité réapparaît dans l'organisation interne de ce jeu décisif : il se déroule en 7 points gagnants, soumis lui-même à la règle des deux points d'écart! Cette résurgence de la règle conditionnelle n'est pas un vain codicille; le public peut être ainsi tenu en suspens de façon prolongée : récemment, en 1980, J. Mc Enroe a battu B. Borg dans un jeu décisif de quatrième set en (18,16); le record semble appartenir à un jeu décisif de Wimbledon au cours duquel Borg, en 1974, battit son adversaire en (20,18) (38 points au lieu des 7 points minimum indispensables !).

Le jeu décisif avait été primitivement exclu de l'éventuel dernier set d'un match qui en comporterait cinq. Le législateur ne souhaitait pas imposer cette butée contraignante aux adversaires dont l'affrontement se révélait aussi âpre et disputé. Les pressions extérieures furent les plus fortes : le jeu décisif a été réintroduit en fin du cinquième set éventuel des grandes compétitions, notamment aux Etats-Unis.

Permettant de mieux contrôler le déroulement des matchs tout en réintroduisant la clôture conditionnelle dans sa propre organisation, le jeu décisif est une patente illustration des aspects contradictoires de la spectacularité sportive : il s'agit d'offrir un spectacle à l'issue incertaine, aux renversements de situation toujours possibles, aux péripéties dramatisables, mais dans un cadre global solidement maîtrisé et bien géré temporellement.



## 2) Une diversité foisonnante

Après avoir étudié le système du volley-ball et l'avoir complété par celui du tennis, pourquoi nous arrêter là ? Au squash, le set se joue en 9 points, au badminton en 15, et en 21 au ping-pong; le jeu de pala et le yoko-garbi se disputent en 50 points, la cesta-punta en 40, la palette en 30 points, le pasaka et le rebot en 13 jeux gagnants (chacun de ceux-ci se déroulant en 4 points gagnants). Et l'on pourrait en outre distinguer de nombreuses variations locales. Voilà bien des dissemblances. Faut-il étudier les particularités de toutes ces pratiques par le menu ? Comment comprendre de telles disparités ?

Le cas des jeux sportifs regroupés sous le terme générique de Pelote basque, et dont nous venons de citer quelques exemplaires, est tout à fait illustratif de notre interrogation; les systèmes des scores de ces jeux exhibent une diversité foisonnante. Fondée en 1921, la Fédération Française de Pelote basque n'a jamais réussi à standardiser les jeux locaux sous une forme unique et précise comme l'ont obtenu toutes les autres fédérations. Elle reconnaît une petite vingtaine de jeux différents qui se déroulent en "Trinquet" (Pasaka, Palette, Sare), en "Place libre" (Pala, Grand Chistera, Rebot, Yoko-garbi) ou en "Mur à gauche" (Pala, Cesta-punta, Remonte), chacun possédant son originalité, notamment dans le système des scores. Certains se jouent en camps séparés, face à face comme à la Paume (Rebot, Pasaka), d'autres en côte à côte, contre un mur ou un fronton (Yoko-garbi, Grand Chistera, Pala). Une partie d'entre eux se pratique en duel d'individus (en Trinquet), d'autres par équipes de deux (Yoko-garbi), de trois (Yoko-garbi, Grand gant), de quatre ou cinq (Rebot).

La Pelote basque survit pour l'essentiel en Euskarie : sept provinces basques dont trois françaises et quatre espagnoles. Epousant davantage une région qu'une nation, fortement imprégnées de la langue locale, se mêlant à la vie du terroir et à ses rythmes propres, ces pratiques du cru sont la vivante illustration d'un patrimoine culturel de type ludomoteur, rebelle à l'uniformité imposée par la centralisation. Les jeux de Pelote basque représentent un exemple remarquable de la persistance d'une culture ludo-corporelle encore vivace, bien que certains de ses aspects soient aujourd'hui déclinants. N'ayant accepté que des contraintes d'unification légères, les jeux sportifs euskariens sont comme une butte-témoin que les forces d'érosion institutionnelles n'ont pas encore réussi à fondre dans le paysage commun (certains d'entre eux, tel le rebot, ont conservé le système des "chasses" de l'ancienne Paume !). L'étude approfondie des pratiques ludomotrices de

cette région serait à coup sûr riche d'enseignement : les jeux de Pelote basque pourraient être, pour l'observateur des jeux sportifs, ce que les Galapagos furent pour Darwin.

La multiplicité des formules de jeux et de leurs systèmes des scores risque de submerger l'observateur. Un autre représentant de la vaste famille des jeux de Paume, la Balle au tambourin, localisé essentiellement dans la vallée de l'Hérault, et dont le siège fédéral est situé à Montpellier, se compose de jeux disputés en 60 points, eux aussi comptés en multiples de 15. Les parties se déroulent en 19 jeux gagnants; on relève une particularité très rare dans les jeux sportifs au score-limite : il y a match nul si la ligne des scores atteint le sommet (18,18). Subtilité insolite, la règle d'arrêt est parfois liée au choix de l'un des joueurs : au badminton par exemple, si le score affiche (13,13), le participant ayant le premier marqué 13 décide lui-même si la partie se terminera en 15 ou en 18 points. Cette touche de fantaisie, qu'on retrouve dans le squash, évite une prolongation interminable tout en accordant une flânerie supplémentaire à la marque.

L'observateur rend les armes : les systèmes des scores offrent un foisonnement inextricable ! Chaque spécialité revendique son originalité et les pratiques affluent par dizaines. Modes de clôture et dispositions du supra-jeu semblent s'ingénier à cultiver la différence. Les catégories simples et unifiantes des systèmes des scores que nous avons identifiées au début de ce chapitre ne sont-elles pas alors le fruit illusoire d'un jugement trop hâtif ?

### III. MORPHISMES DE RESEAUX

L'arbre ne doit pas cacher la forêt. Dans l'étonnante floraison des cas particuliers, on peut reconnaître en effet d'incontestables communautés de structures. Les broderies variées s'appuient sur les mêmes motifs.

Considérons par exemple le système des matchs du volley-ball en trois sets gagnants (fig. 1 et 2); les systèmes correspondants du tennis, du ping-pong, du badminton et du squash en sont l'exacte réplique. Il s'agit ici d'un rigoureux isomorphisme de structures.

Les systèmes des sets et des jeux offrent plus de variété : "boucles" éventuelles à chaque sommet (volley-ball, badminton, squash), bornes de clôture variables (4 ou 6 au tennis, 9 au squash, 4 et 13 au rebot et au pasaka, 15 au volley-ball et au badminton, 21 au ping-pong ...), possibilité offerte dans certains cas à l'un des joueurs de choisir la borne d'arrêt des scores (badminton, squash ...). Mais ces différences ne sont que vétilles au regard

des traits majeurs de l'ensemble : en effet, supports de marques, règles de fonctionnement du score et mécanismes de clôture présentent des analogies structurales évidentes. Il est aisé d'en témoigner en mettant à découvert des morphismes de réseaux entre les systèmes de scores des différents jeux sportifs (fig. 7).

En choisissant par exemple comme module de référence le "jeu" du tennis (en quatre points gagnants), la correspondance entre les multiples structures des scores est aisément obtenue par épimorphisme. Ainsi que l'illustre la figure 7, les propriétés essentielles du système des scores sont conservées dans la plupart des situations (treillis du support, "pas" de la marque uniforme, règle de l'écart conditionnel des deux points, arrêt au score-limite). En outre, l'emboîtement de plusieurs réseaux (2 et parfois 3) dont nous verrons bientôt les conséquences originales, se retrouve dans l'ensemble des jeux de paume.

En revanche, lorsque la clôture du match s'effectue au temps-limite, comme il est habituel dans la majorité des sports collectifs (rugby, football, handball ...), le support de marque est unique et ne comporte pas d'emboîtement de plusieurs réseaux. La règle d'arrêt de ces jeux est une simple borne de durée : les organigrammes des figures 8 et 9, dont les pas de la marque ne sont pas toujours uniformes (rugby, basket), en simulent les opérations marquantes.

#### IV. LE PARADOXE DES SCORES

##### 1. Barouf à Monmatch

Sous le titre "*Barouf à Bombach*", Henry Rouanet a présenté une illustration provocante de l'incohérence apparente de données organisées en tableaux croisés [5]. A l'intérieur de chacun des deux lycées de la ville de Bombach, expose H. Rouanet, les garçons réussissent comparativement mieux que les filles au baccalauréat (on observe dans l'un des lycées, 30% de réussite pour les garçons contre 10% pour les filles, et dans l'autre, 90% de succès pour les garçons contre 70% pour les filles). Mais si l'on regroupe ces mêmes élèves tous ensemble, les résultats deviennent paradoxaux : ce sont les filles qui réussissent mieux que les garçons ! (60% de succès à leur bénéfice contre 40% au crédit des garçons).

Ce résultat heurte profondément le sens commun. L'analyse révèle que cette contradiction apparente, dite "paradoxe de Simpson", est due à un effet de pondération : la réussite prise en compte pour chaque groupe d'élèves est en effet une proportion de proportion. Marie-Claude Bert en a démonté le mé-



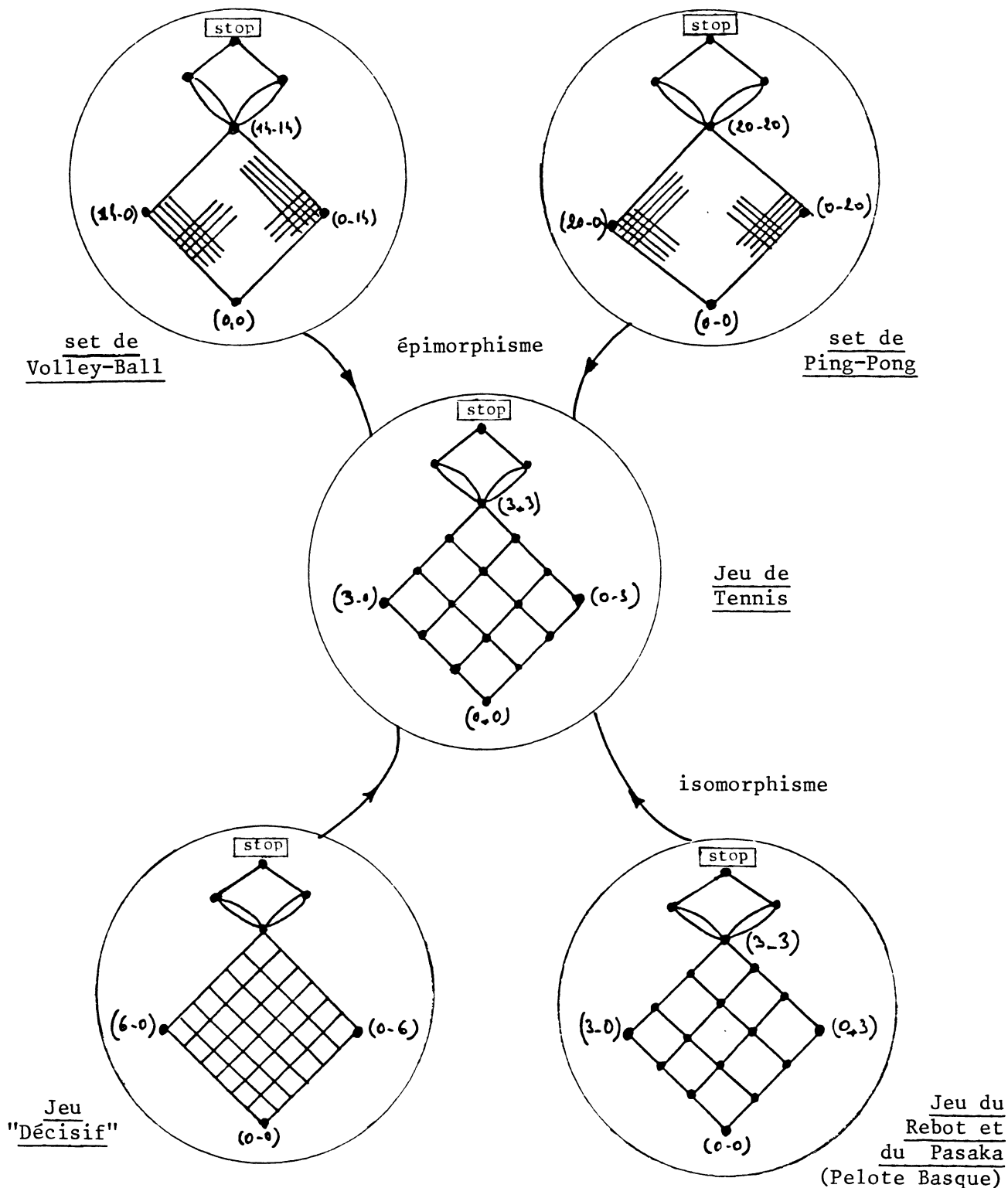


Fig. 7 - Morphismes entre les systèmes de scores des "jeux de paume"

La plupart des "jeux de paume" reprennent les traits de logique interne du "jeu" de tennis emprunté au jeu de courte paume (structure de treillis, "pas" de la marque uniforme, arrêt au score-limite, condition d'arrêt des 2 points d'écart souvent reprise), à quelques différences près n'affectant pas l'organisation générale (valeur du score-limite variable). La correspondance entre structures est obtenue par épimorphisme ou même par isomorphisme. Sous l'angle du système des scores, les jeux de paume représentent bien une classe d'équivalence.

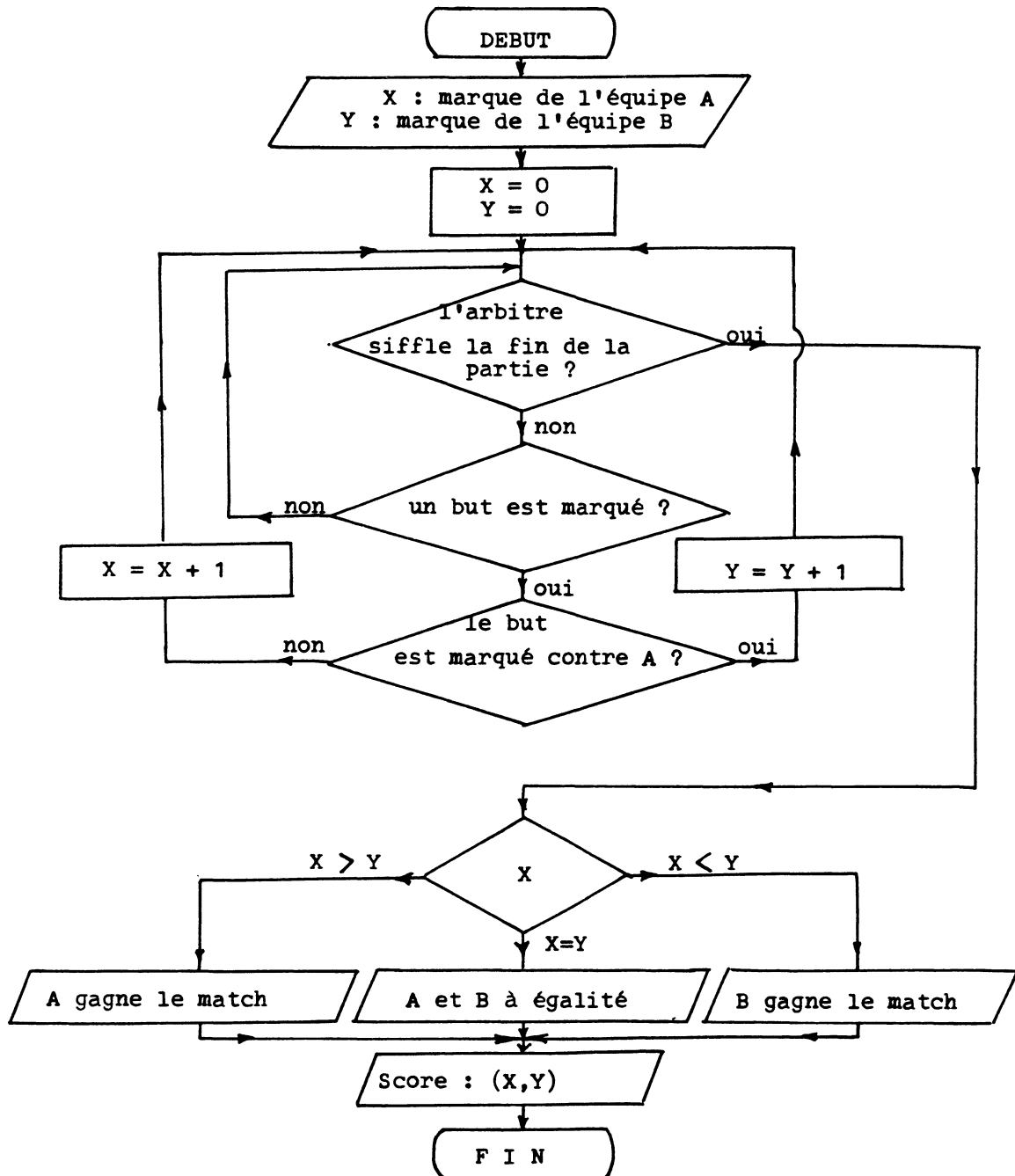


Fig. 8 - Organigramme des scores du football et du handball

L'arrêt, "au temps-limite", n'est plus dépendant de l'état du score, comme au volley-ball ou au tennis. Cet organigramme vaut pour tous les jeux au temps-limite dont le pas est de valeur 1. Le match nul est ici accepté (et même un score terminal (0,0)). Une disposition du supra-jeu pourra éventuellement supprimer le match "nul" : prolongation, tirs au but (football, basket ball).

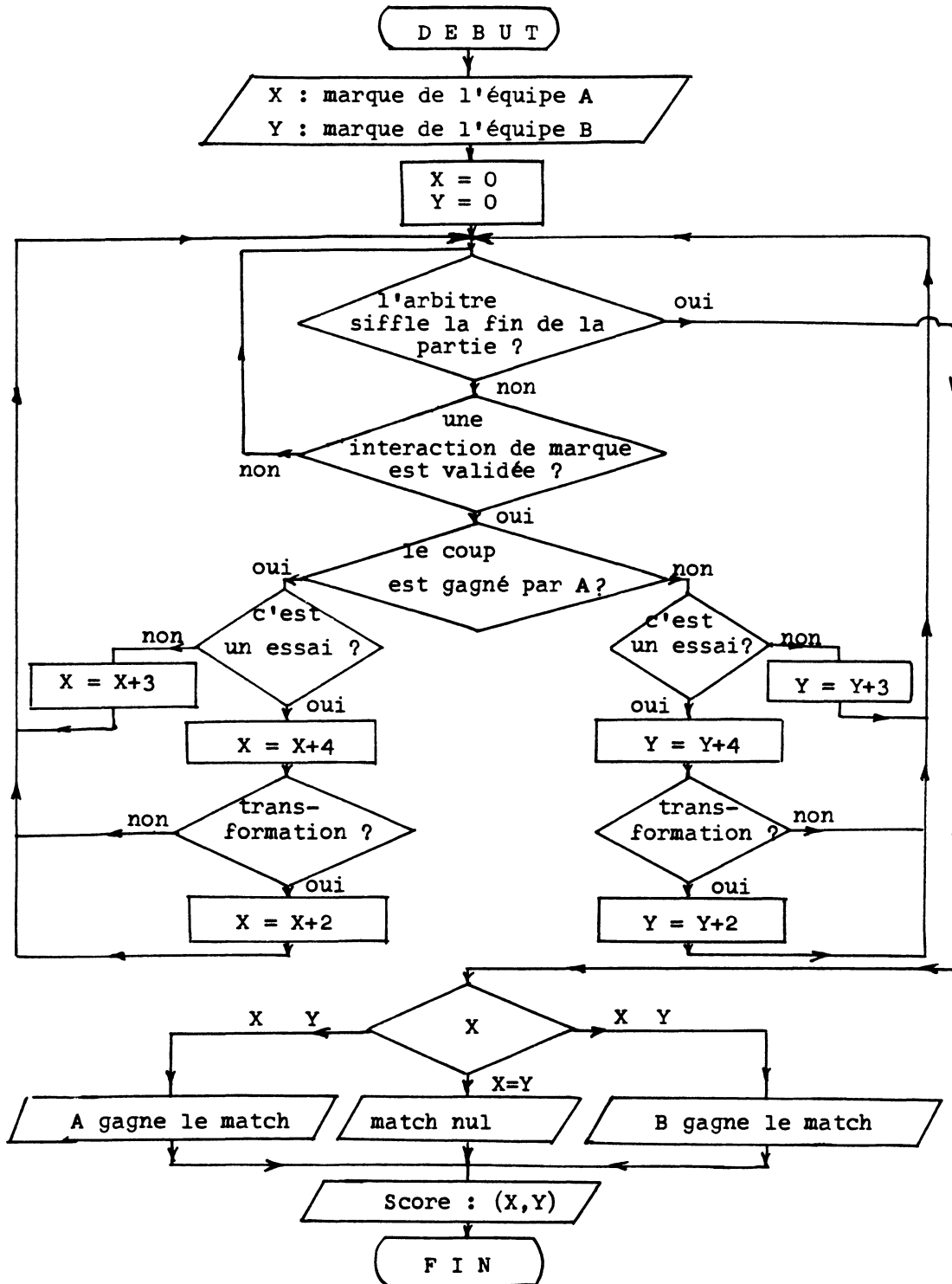


Fig. 9 - Organigramme des scores de rugby.

On retrouve le schéma fondamental du football avec un élément de complexité supplémentaire : les trois valeurs du "pas" de la marque (3,4 et 2).

canisme en déterminant les conditions mathématiques de son apparition [2]. Cette situation déconcertante a soulevé un vif intérêt et a donné lieu à une gerbe d'articles, à dominante mathématique ou sociologique, publiés dans le *Bulletin de Méthodologie Sociologique* (H. Rouanet, M.C. Bert, J.P. Olivier, B. Leclerc, J.C. Combessie, K.M. Van Meter) [6]. Ces cas d'incohérence ont retenu notre attention dans la mesure où ils semblent proches de contradictions tout aussi déconcertantes relevées dans les scores de certains matchs sportifs. Les paradoxes peuvent être aussi bruyants dans les résultats d'un match que dans ceux du bac. Observons-en quelques manifestations.

Les résultats du set de volley-ball cité dans l'article précédent sont extraits d'un match international féminin qui s'est déroulé en 5 sets. Sur l'ensemble de la rencontre, la France a remporté 51 points contre 66 pour la R.D.A. L'adversaire de la France a donc remporté 56,4% du total des points : or c'est l'équipe de France qui a gagné ce match ! La figure 10 expose ces données et y ajoute l'exemple encore plus troublant d'un match de tennis. Dans ce dernier, on constate qu'à chacun des 5 sets, c'est le joueur A qui a toujours remporté le plus grand nombre de points, et parfois de façon outragante : or, c'est ce joueur qui a perdu ce match !

Ces résultats sont choquants : le vainqueur n'est pas celui qui s'est révélé objectivement le meilleur en remportant le plus grand nombre de points. Une telle constatation est manifestement insolite dans le cas du sport, réputé par excellence le domaine du franc-jeu et de la transparence du mérite, le domaine où triomphe l'équité de la compétition. L'image du champion sportif est traditionnellement associée à une victoire incontestable acquise par l'évidente supériorité d'une performance, sans biais ni argutie de prétoire : le vainqueur est celui qui court le plus vite, saute le plus haut, marque le plus de points ou de buts. Brisure de ce beau cristal, nos constats précédents font figure de petit scandale. La défaite en points d'un joueur ou d'une équipe peut parfois se traduire par son triomphe final. Comment rendre compte de ce paradoxe ?

## 2. En volley-ball

A la fin d'un set, on ne relève jamais d'incohérence : l'équipe gagnante a toujours remporté plus de points (au moins deux de plus) que l'équipe perdante (propriété 7). Cependant, l'opération qui compose les résultats des différents sets pour aboutir à la sanction du match, ne correspond pas à la sommation des points acquis. En fin de chaque set, les marques des deux équipes sont abandonnées au profit d'une binarisation des issues par victoire ou défaite (1 ou 0).

Total des points gagnés par l'équipe de France	Total des points gagnés par l'équipe de R.D.A.	Vainqueur final du match
51	66	équipe de France

Volley-ball : résultats du match France-R.D.A. (5 sets) (janvier 1985)

	Points remportés par le joueur A	Points remportés par le joueur B	Joueur ayant remporté le plus grand nombre de points	Joueur vainqueur du match
1er set	24	28	joueur B	Joueur A
2è set	24	26	joueur B	
3è set	2	24	joueur B	
4è set	4	26	joueur B	
5è set	24	27	joueur B	
Total	78	131	joueur B	

Tennis : match en 5 sets

Fig. 10 - Paradoxes dans les scores de volley-ball et de tennis

Dans les deux cas, c'est le joueur (ou l'équipe) qui a remporté le plus petit nombre de points qui est déclaré vainqueur. L'exemple le plus saisissant est celui du tennis, car la "défaite" en points du vainqueur final a lieu à chacun des 5 sets.

Le réseau du match est un treillis de treillis : il réalise l'emboîtement de deux modules : l'enchâssement des sets dans le match. En binarisant le résultat de chaque set, le treillis abandonne les différences de points à la marque. Au début de chaque manche le compteur est remis à zéro. Compte tenu des marges d'écart possibles entre vainqueur et perdant d'un set, l'équipe qui a remporté seulement un set sur quatre, ou a fortiori deux sets sur cinq peut accumuler un nombre de points largement supérieur au total de l'équipe qui a pourtant gagné trois manches.

#### Propriété 11

A la fin d'un match, l'équipe perdante peut totaliser un nombre de points supérieur au nombre de points possédés par l'équipe gagnante.

La propriété 7 permet de calculer les deux bornes, supérieure et infé-

rieure , de l'intervalle des points séparant les deux adversaires. Il vient :

• match en 3 sets :

maximum de l'écart :  $15 \text{ (points)} \times 3 \text{ (sets)} = 45 \text{ points}$

minimum de l'écart :  $2 \text{ (points)} \times 3 \text{ (sets)} = +6 \text{ points}$

• match en 4 sets :

max :  $(15 \text{ (points)} \times 3 \text{ (sets)}) - (2 \text{ (points)} \times 1 \text{ (set)}) = 45 - 2 = +43 \text{ points}$

min :  $(2 \text{ " } \times 3 \text{ " } - (15 \text{ " } \times 1 \text{ " } ) = 6 - 15 = -9 \text{ "}$

• match en 5 sets :

max :  $(15 \text{ (points)} \times 3 \text{ (sets)}) - (2 \text{ points)} \times 2 \text{ (sets)} = 45 - 4 = +41 \text{ points}$

min :  $(2 \text{ " } \times 3 \text{ " } ) - 15 \text{ " } \times 2 \text{ " } ) = 6 - 30 = -24 \text{ "}$

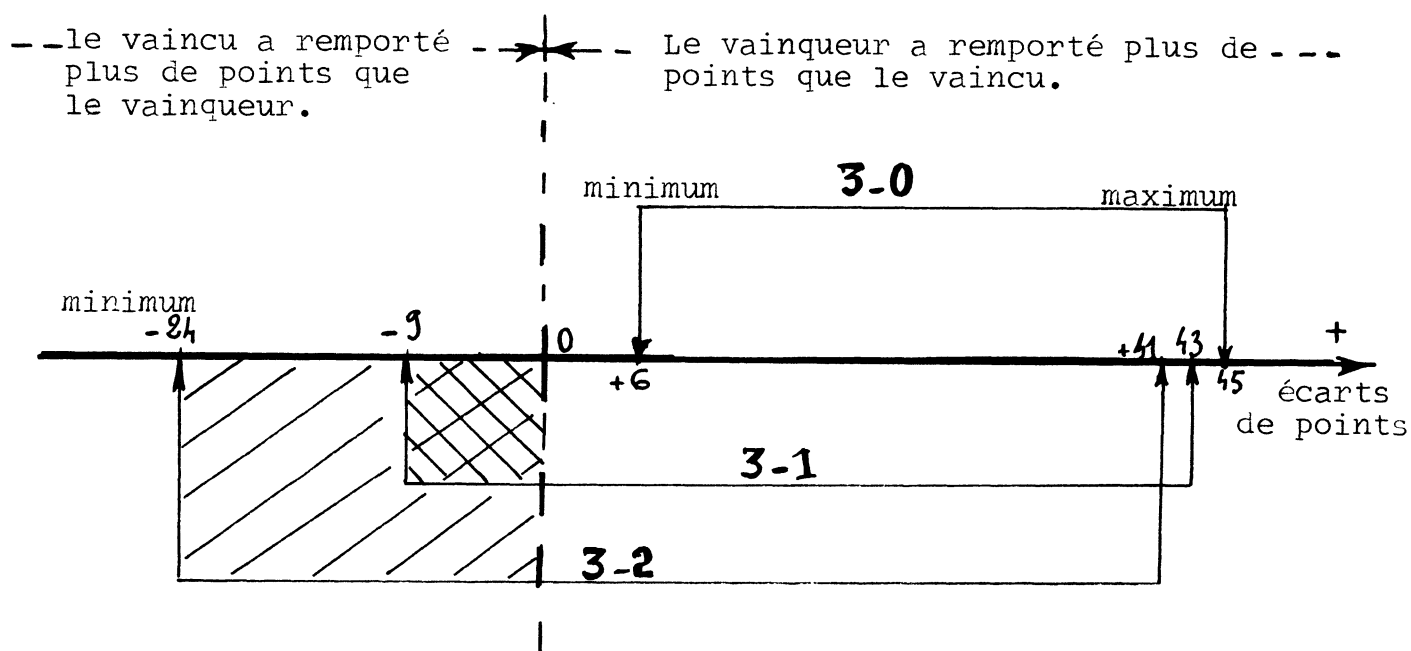


Fig. 11 - Ecarts de points minimum et maximum séparant le perdant du gagnant en fonction du nombre de sets du match de volley-ball.

Dans le cas des matchs en trois sets, cet intervalle varie de +6 à +45; ce qui signifie que le vainqueur supplante son adversaire de 6 points au minimum; dans ce cas, le nombre de points du gagnant est toujours supérieur à celui du perdant. En revanche, dans les matchs en quatre ou cinq sets, le minimum est négatif, ce qui signifie que le vaincu peut totaliser plus de points que le vainqueur. Exemple : A bat B en (15,12), (15,13), (8,15), (9,15) et (15,12); l'écart vaut -5 : B , battu, a cependant remporté 5 points de plus que A .

Ces résultats sont illustrés par la figure 11. Le vainqueur d'un match en trois sets remporte toujours davantage de points que son adversaire (au moins six de plus), ce qui n'est plus nécessairement le cas d'un match en 4 ou 5 sets (la différence peut atteindre le total de 24 points au détriment du vainqueur!). Dans notre exemple opposant les équipes de la R.D.A. et de la France, l'écart est déjà considérable : 15 points au bénéfice du vaincu.

### 3. En tennis

Selon quelles marges la supériorité d'un joueur peut-elle se manifester au tennis ? Calculons la différence de points, minimum puis maximum, pouvant séparer les deux adversaires. Le tableau de la figure 12 rend compte de ces intervalles. Au cours d'un "jeu", le vainqueur gagne toujours plus de points que le vaincu (au minimum 2, et 4 au maximum). Ce n'est plus le cas pour le set, et encore moins pour le match. Un joueur qui aurait 50 ou 60 points de moins que son adversaire pourrait quand même être le vainqueur du match ! (Cf.fig.13). Cette caractéristique qui ne laisse pas d'étonner, déjà présente bien qu'avec plus de discrétion au volley-ball, prend ici d'étonnantes proportions.

Alors que le réseau du match de volley-ball est constitué d'un enchaînement de deux modules, le système du tennis met en place trois niveaux successifs de scores, réalisant ainsi deux emboîtements de trois modules. Le "jeu" s'ajoute au set et au match déjà présents au volley-ball.

Examinons l'étage original par rapport au volley-ball, c'est-à-dire le "jeu". Chaque sommet du réseau du set s'appuie sur l'issue d'un "jeu" à structure de treillis en 4 points gagnants (nous négligerons les possibilités de prolongation qui ne modifient pas le résultat global). Le vainqueur de chaque jeu remporte au minimum deux points de plus que son adversaire; mais les jeux s'organisent à leur tour sur le treillis du set à l'aide d'une binarisation de leurs résultats en 0 (défaite) ou 1 (victoire). Le vainqueur de tout set a remporté un minimum de 24 points (sur 6 jeux) et un maximum de 32 points (sur 10 jeux); le capital comptable du vaincu oscille quant à lui de 0 (sur 6 jeux) à 28 (sur 10 jeux). Ainsi que le montre la figure 14, se dessine pour chaque set une "zone paradoxale" comprise entre 24 et 28 points, autorisant un surclassement du vainqueur par le vaincu (au nombre de points gagnés).

Bien entendu, ce type de résultat peut se combiner avec l'effet de clôture dû à la composition des sets dans le treillis du match. A ce titre, le paradoxe du tennis est encore plus spectaculaire que celui du volley-ball, car la récursivité à trois niveaux peut entraîner la victoire aux points du vaincu non seulement en fin de match, mais aussi à chacun des 4 ou 5 sets de la rencontre !

	maximum possible	minimum possible
J E U	(4,0) → + 4 points	+ 2 points
S E T	(6,0) → + 24 points	(6,4) → + 12 + (-16) = - 4 points <u>jeu décisif :</u> (7,6) 14-24 = - 10 points
M A T C H	3 - 0 24 x 3 = + 72 points	3 x -4 = - 12 points <u>jeu décisif :</u> 3 x -10 = - 30
	3 - 1 72 - (-4) = +76 points	- 12 + (-24) = - 36 points <u>jeu décisif :</u> - 30 + (-24) = -54
	3 - 2 72 - (-8) = +80 points	- 12 + (-48) = - 60 points <u>jeu décisif :</u> - 30 + (-48) = - 78

Fig. 12 - Tennis : écarts de points possibles entre le vainqueur et le vaincu.

Le point de vue adopté est celui du vainqueur : un nombre négatif représente donc le nombre de points supplémentaires remportés par le vaincu. On n'a pas pris en compte ici les prolongations de sets qui ajouteraient encore aux écarts observés. On notera que le vaincu peut remporter beaucoup plus de points que son vainqueur.



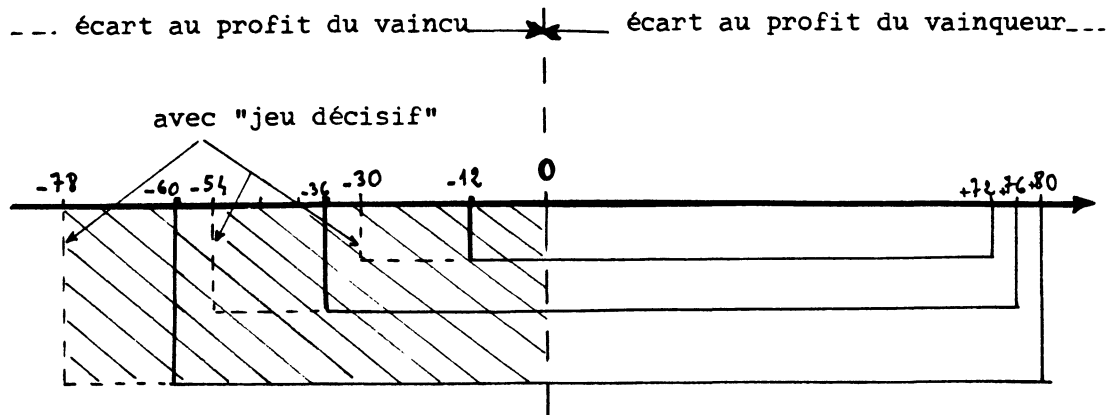


Fig. 13 - Marges des écarts de points possibles entre vainqueur et vaincu dans un match de tennis.

Le point de vue adopté étant celui du vainqueur, un intervalle négatif indique que le vaincu a dominé le vainqueur quant au nombre de points gagnés. L'amplitude des écarts négatifs est nettement plus accusée qu'au volley-ball (fig. (fig. 10.1) L'intervention du "jeu décisif" accroît encore la marge des écarts possibles.

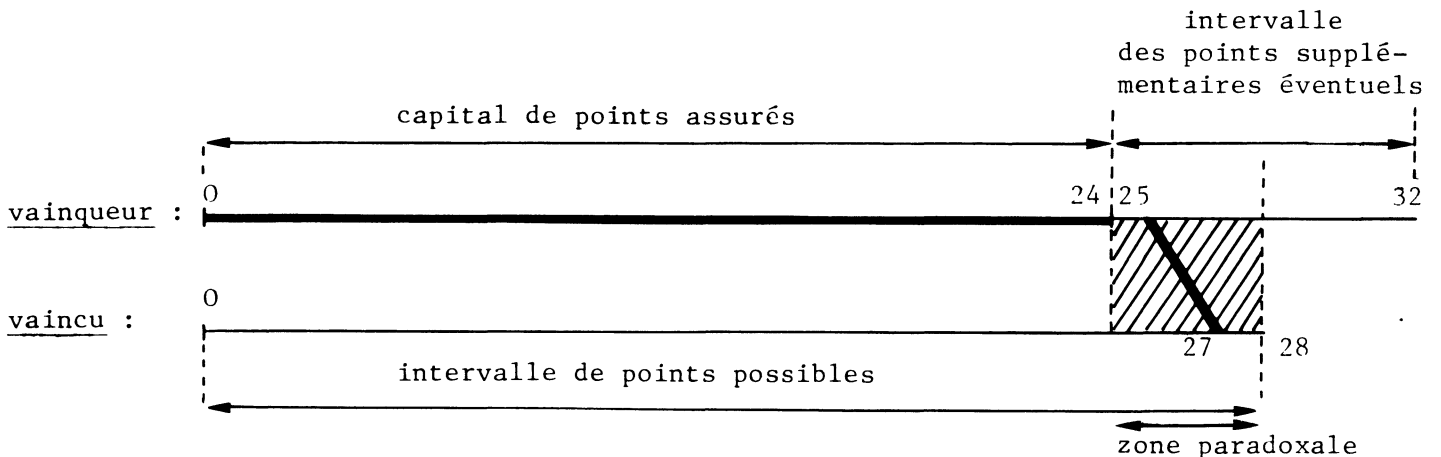


Fig.14 - Nombre de points gagnables par chacun des deux adversaires au cours d'un set de tennis.

Si le vainqueur possède à coup sûr au moins 24 points, le vaincu peut en remporter de 0 à 28 ; il peut ainsi dépasser le capital du vainqueur, tout en perdant le set. C'est cet éventuel décalage qui crée la "zone paradoxale" comprise entre 24 et 28 points (sur le schéma, le résultat est paradoxal au bénéfice du vaincu par 27 à 25).

Le mécanisme de la contradiction des scores possède donc son originalité. Le paradoxe de Monmatch est nettement différent de celui de Bombach. Ce dernier repose sur un effet de pondération (une proportion de proportion), alors que le premier est dû à un effet de clôture (arrêt à une valeur-seuil soumis à la condition des deux points d'écart) combiné à la propriété de récursivité du système des scores : le match est un treillis constitué de treillis, eux-mêmes constitués de treillis (Cf. Fig. 15).

On peut sans doute considérer la *"Lettre à un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume"* de J. Bernoulli comme la première étude mathématique portant sur les scores d'un jeu sportif, sur la mesure de la force des joueurs et sur leurs espérances respectives de réussite. L'auteur propose d'apprécier l'espérance de gain des joueurs par les fréquences empiriques des coups remportés par chacun d'eux au cours d'un grand nombre d'échanges. Bernoulli compare lui-même cette situation du Jeu de Paume au tirage de billets noirs ou blancs dans un sac. Comme dans ce schéma d'urne, les fréquences observées sont interprétées en termes de probabilités. *"Je vois par exemple deux hommes, qui jouent à la paume, écrit-il, je les observe longtemps, et je remarque, que l'un d'eux gagne 200 ou 300 coups, pendant que l'autre n'en gagne que cent : je juge par là, avec assez de certitude, que le premier est deux ou trois fois meilleur que l'autre, ayant pour ainsi dire deux ou trois parties d'adresse, comme autant de cas ou de causes qui lui font gagner la balle, là où l'autre n'en a qu'une"* ([1] p. 3). Directement inspiré de la règle des partis pascalienne, le calcul des espérances de chaque joueur, proposé par J. Bernoulli, possédait une avance de deux bons siècles et demi sur les recherches sportives ultérieures.

Quand J. Bernoulli avance le total de 200 ou 300 coups, il est dans la réalité d'un match de tennis. Sans faire intervenir les prolongations, une manche peut totaliser 60 points, et un match en cinq sets, 300 points. Ce total peut être largement dépassé. Un match disputé en 1949 à Los Angeles, comporta 135 jeux avec un set à (19,17) et un autre à (36,34); il approcha les 900 points ! Aux Jeux Olympiques d'Anvers (1920), le joueur britannique Lowe ne battit le grec Zerlendi qu'après neuf heures trente d'échanges sur le terrain [4]. Le point de vue fréquentiste de Bernoulli permettant d'établir des probabilités a posteriori, peut donc s'appuyer ici sur de copieux comptages.

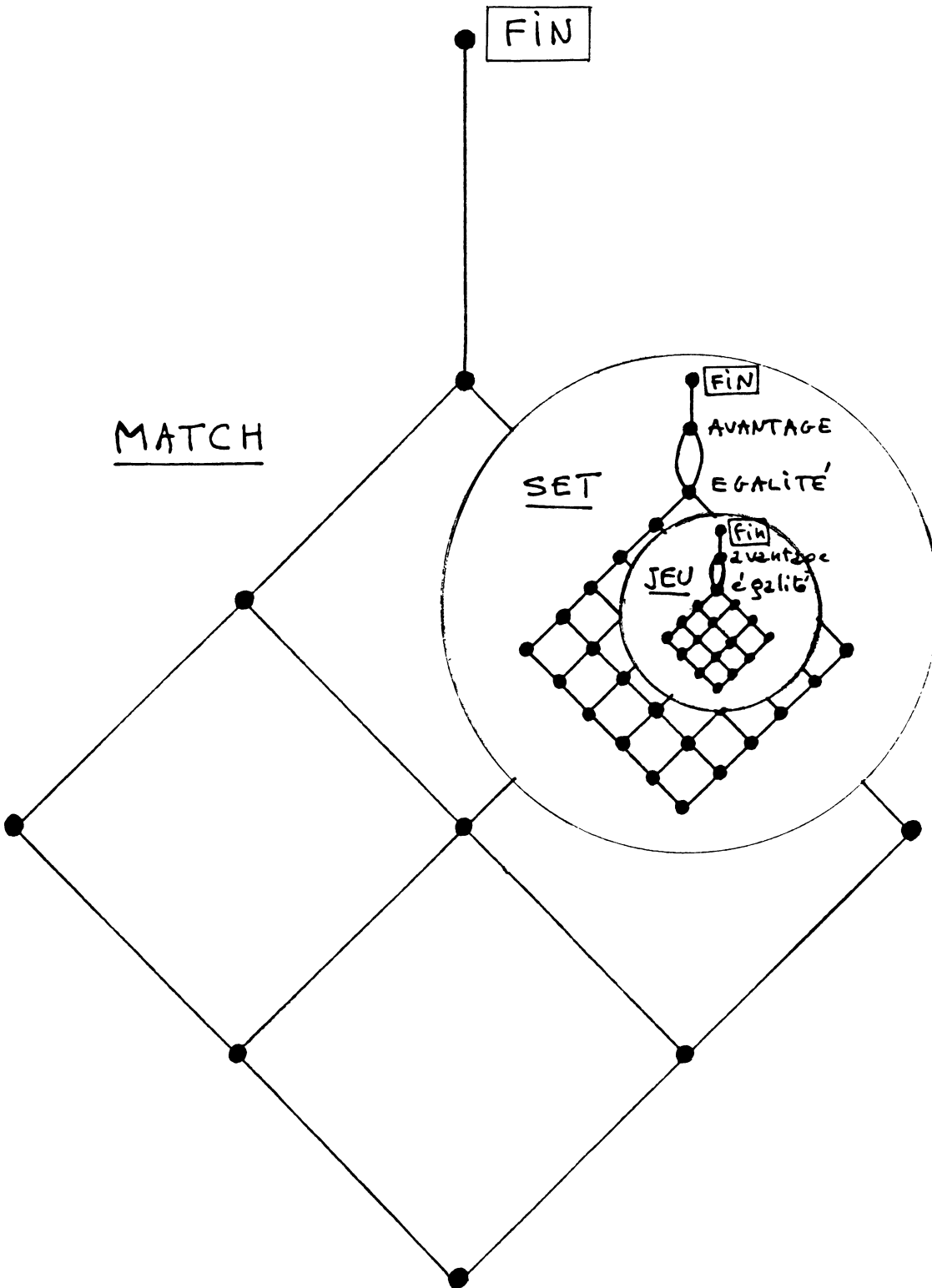


Fig.15 - La structure des scores du match de tennis est un treillis de treillis de treillis.

Chaque sommet du treillis du match représente en effet lui-même un treillis dont chaque sommet représente à son tour un treillis. C'est cette propriété de récursivité due à l'enchâssement de trois modules (jeu, set et match) qui est à l'origine de l'éventuelle apparition de paradoxes dans les scores.

Dans son magistral travail prémonitoire, Bernoulli propose même de calculer en cas de match déséquilibré, la valeur du handicap, c'est-à-dire "*combien l'un doit donner d'avantage à l'autre pour rendre le jeu égal*" ([1] p.11). Cependant, l'irruption du paradoxe a éveillé notre attention. Lorsque Bernoulli affirme "*ce que les quatre coups d'un jeu sont à l'égard de ce jeu, les quatre jeux le sont à l'égard de toute la partie*" (p. 4), nous sommes conduits à formuler quelques réserves. Nous avons constaté qu'il n'en est pas toujours ainsi; l'effet de clôture et de combinaison des différents modules peut entraîner des résultats apparemment aberrants : le joueur le plus fort au sens de Bernoulli et qui manifeste concrètement sa force en remportant davantage de points, perd parfois le set et même le match ! Le paradoxe des scores semble avoir échappé à notre illustre auteur.

Le paradoxe que nous avons relevé ne jette, bien entendu, aucun discrédit sur le système des scores des jeux de paume. L'inventaire à plat des règles du jeu peut ainsi que nous l'avons vu, être réinterprété en termes de méta-règles qui offrent aux différents jeux une nouvelle intelligibilité de synthèse; nous avons détaillé les propriétés de ces méta-règles situées à un niveau surplombant.

Le code de jeu étant posé, les équipes ont tout loisir de s'y ajuster au mieux de leur intérêt, tel qu'elles le perçoivent. Aux joueurs d'adopter une stratégie tenant compte de la zone paradoxale des scores pour remporter la décision finale, fût-ce aux dépens de la comptabilité intermédiaire des points. Le paradoxe des scores peut même être considéré comme une fantaisie qui offre du piquant au jeu en permettant à une équipe moins "forte" mais meilleure stratège de renverser à son avantage une position fortement compromise et finalement de gagner malgré un rapport de forces qui lui est défavorable.

Comment les équipes de volley-ball s'adaptent-elles aux particularités des scores ? Le cheminement de la marque ne peut manquer d'influencer les stratégies des équipes opposées. Comment le système des scores va-t-il interférer avec l'organisation des comportements moteurs d'affrontement, notamment dans l'équilibre de l'attaque et de la défense ? Quel retentissement ces formes originales d'affrontement codifiées ont-elles sur la durée des matchs ? Il s'agit donc de plonger les modèles des scores dans la réalité des rencontres sportives de haute compétition. C'est par cette confrontation entre modèles et réalité que, dans le prochain article, nous clôturerons cette étude de l'un

universaux les plus spectaculaires du jeu sportif : le système des scores.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNOULLI, J., "Lettre à un Amy, sur les Parties du Jeu de Paume", in *Ars Conjectandi*, Bruxelles, Impression anastaltique, Culture et Civilisation, 1968 (1713), 1-35.
- [2] BERT, M.-C., "Barouf à Bombach" (suite), *Bull. Méth. Soc.*, n° 6, avril 1985, 1-35.
- [3] PARLEBAS, P., "Modélisation du jeu sportif : le système des scores du volley-ball", *Math. Sci. Hum.*, n° 91 (1985), 57-80.
- [4] du PELOUX, G., "Le tennis", in *Jeux et Sports*, Encyclopédie de la Pleiade, éditions Gallimard, Paris 1967, 1368-1384.
- [5] ROUANET, H., "Barouf à Bombach", *Bull. Méth. Soc.*, n° 6, avril 1985, 3-4.
- [6] *Bulletin de Méthodologie Sociologique* : n° 6, avril 1985. Articles cités de H. ROUANET, M.C. BERT, J.P. OLIVIER, B. LECLERC, J.C. COMBESSIE, K.M. VAN METER. Revue éditée par le Laboratoire d'Informatique pour les Sciences de l'Homme (C.N.R.S., Paris). Une partie de ces articles avaient été publiée précédemment dans *L'Echo des Messages* (Centre de Mathématique Sociale - EPHE).