M. BARBUT

Sur les indicateurs de l’inégalité : croissance logistique et mesure de l’inégalité, et de quelques effets « paradoxaux » dans la comparaison des inégalités

Mathématiques et sciences humaines, tome 90 (1985), p. 5-17
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1985__90__5_0>

Math. Sci. hum. (*23*^{e} année, n°90, *1985*, p.5-17).

SUR LES INDICATEURS DE L'INEGALITE : CROISSANCE LOGISTIQUE ET MESURE DE L'INEGALITE, ET DE QUELQUES EFFETS "PARADOXAUX" DANS LA COMPARAISON DES INEGALITES

M. BARBUT *

Dans l'article [3] paru dans Mathématiques et Sciences humaines n°88 (1984), j'ai étudié la question suivante : si une population est divisée en deux classes et k catégories ($k \geq 2$), quelle est la relation entre la fonction de concentration (au sens de M.O. Lorenz et C. Gini) de la distribution (selon les catégories) de la population de la première classe par rapport à la distribution de la population globale, et celle de la distribution de la seconde classe, également par rapport à la distribution de la population globale ?

Cette situation se rencontre très souvent : population active divisée suivant le sexe, par exemple, et les catégories socio-professionnelles (C.S.P.) ; revenus des ménages divisés en revenu disponible et prélèvement obligatoire d'une part, en niveaux de revenus d'autre part ; population d'une tranche d'âges divisée entre "admis" d'un ordre d'enseignement donné, et "non-admis" (ou "exclus") d'une part, et C.S.P. des parents d'autre part, etc.

Ce sont d'ailleurs des questions méthodologiques que posent certains sociologues de l'Education (Cf. [1] par exemple) qui ont été à l'origine de mon étude [3].

Or, je montrai dans celle-ci que les deux fonctions de concentration, que je nomme *adjointes* l'une de l'autre, sont en dualité ; et qu'il peut

* Centre de Mathématique Sociale, 54, boulevard Raspail 75270 PARIS Cédex 06

arriver que pour certaines lois de variation des distributions parentes, elles varient nécessairement en sens inverse l'une de l'autre.

Ce dernier résultat a paru paradoxal à quelques lecteurs (Cf. J.C. Combessie, [2]).

Dans la présente note, je montre dans une première partie qu'il s'étend au cas, parfois considéré comme réaliste, où les taux par catégorie d'individus dans la première classe croissent, en fonction du temps, selon une même loi logistique ; et même à une famille plus large de modes de variation de ces taux.

Dans la seconde partie, j'attire l'attention sur le caractère quasiment inéluctable de cet effet réputé "paradoxal" (de variations en sens opposés, dans certains cas, d'une fonction de concentration et de son adjointe) ; en effet il est facile de démontrer que tout indicateur (ou indice, ou mesure, etc...) de l'inégalité (d'une distribution par rapport à une autre) ne présentant pas cet effet, serait générateur d'incohérences dont je fournis quelques exemples, dans la comparaison des inégalités. Ce qui, en un certain sens, montre à la fois le bien fondé de la critique de certaines mesures de l'inégalité faites par J.C. Combessie dans [1] et [2], mais aussi qu'il n'y a aucun espoir de construire l'indicateur qui n'aurait aucun des effets qu'il considère comme paradoxaux.

Bien entendu, dans cette étude comme dans [3], tout ce qui est dit ici en termes de mesure des inégalités et de la concentration, pourrait l'être, mutatis mutandis, et si le contexte s'y prête, en termes d'écarts à l'indépendance, ou d'écarts à l'uniformité.

I - CROISSANCE LOGISTIQUE ET FONCTIONS DE CONCENTRATION.

Reprenons des notations qui sont à peu près celles de l'article [3]. La population, d'effectif total Z, est divisée en deux classes et k ($k \geq 2$) catégories, selon le tableau :

Cat. / Cla.	1	2 .... i .... k	Total
I	x_1	x_2 .... x_i .... x_k	X
II	y_1	y_2 .... y_i .... y_k	Y
Total	z_1	z_2 .... z_i .... z_k	Z

Désignons par $\varepsilon_i = \frac{x_i}{z_i}$ les taux par catégorie, et par $\eta_i = 1 - \varepsilon_i = \frac{y_i}{z_i}$ les taux complémentaires. Le taux moyen de la première classe est :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{X}{Z} = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \, p_i \quad (\text{où } p_i = \frac{z_i}{Z}).$$

De même, celui de la seconde classe est :

$$\bar{\eta} = \frac{Y}{Z} = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \, p_i = 1 - \bar{\varepsilon} \; .$$

Supposons maintenant que chaque taux ε_i varie en fonction du temps t selon une loi logistique :

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\omega_i^{(t-t_i)}}{1+\omega_i^{(t-t_i)}} \qquad (\omega > 1).$$

Cette hypothèse est parfois faite en Sociologie de l'Education, dans le cas où les catégories 1, 2, ... , i , k sont les catégories socio-professionnelles, et où les deux classes sont celles des "admis" et celle des "exclus" d'un ordre d'enseignement donné, selon la C.S.P. de leurs parents ; on peut voir, par exemple, à ce sujet, les travaux de M.Cherkaoui [4].

Rappelons brièvement que lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$, le taux $\varepsilon_i(t)$, suivant une loi logistique de paramètre ω_i supérieur a 1, croît uniformément de 0 à 1, en passant par la valeur $\frac{1}{2}$ au temps t_i, qui est ainsi un temps médian (fig. 1).

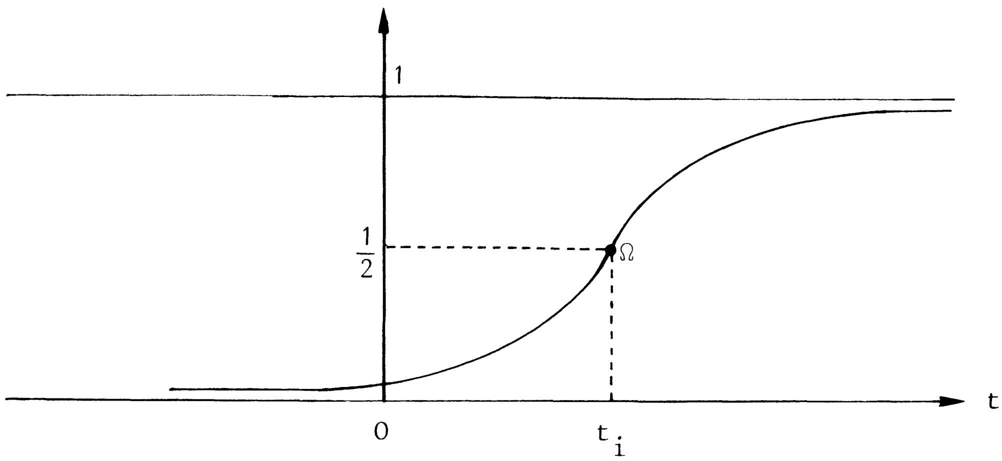

Figure 1

Le point $\Omega = (t_i, 1/2)$ est centre de symétrie de la courbe, la pente de la tangente en Ω est $\frac{\omega_i}{4}$: on voit ainsi que le paramètre ω_i est proportionnel à la vitesse maximum de croissance du taux $\varepsilon_i(t)$.

Dans la suite, je fais l'hypothèse simplificatrice que le paramètre ω_i de la logistique est le même pour toutes les catégories. Dans ces conditions, les k logistiques :

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\omega^{(t-t_i)}}{1+\omega^{(t-t_i)}} \qquad (\omega > 1)$$

se déduisent les unes des autres par translation ; en posant :

$$\varepsilon\,(\tau) = \frac{\omega^{\tau}}{1+\omega^{\tau}}$$

on a, pour tout i :

$\varepsilon_i(t) = \varepsilon(\tau_i)$ où $\tau_i = t-t_i$

si donc à un instant quelconque t l'ordre des taux ε_i est celui des indices i :

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \dots \geq \varepsilon_k$$

les écarts τ_i aux temps médians t_i sont dans le même ordre :

$$\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_k\ .$$

Si le temps s'accroît de Θ, et que l'on passe de t à $t' = t + \Theta$, chacun des écarts s'accroıt lui aussi de Θ, et passe de τ_i à $\tau'_i = \tau_i + \Theta$. On a donc encore :

$\tau'_1 \geq \tau'_2 \geq \dots \geq \tau'_k$

et l'ordre des $\varepsilon_i(t') = \varepsilon'_i = \varepsilon(\tau'_i)$ est, la logistique étant une fonction monotone croissante du temps, le même que celui des ε_i.

Donnons maintenant un accroissement "infinitésimal" δt positif du temps. Chaque ε_i croît de :

$$\delta\varepsilon_i = \omega\varepsilon_i(1 - \varepsilon_i)\,\delta t = \lambda\varepsilon_i(1 - \varepsilon_i) = \lambda\varepsilon_i\eta_i .$$

On a posé, pour alléger l'écriture : $\lambda = \omega\delta t$

Chaque ε_i devient $\varepsilon'_i = \varepsilon_i + \delta\varepsilon_i = \varepsilon_i + \lambda\varepsilon_i\eta_i$. Supposons, comme dans [3], que la distribution marginale $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_k)$, où $p_i = \frac{z_i}{Z}$, est invariante.

La fonction de concentration (au sens de C. Gini et M.O. Lorenz) étant définie comme dans [3], on a :

$$\forall\, j\,,\ 1 \leq j \leq k \qquad Q_j = \sum_{i=1}^{j} q_i \quad \text{avec} \quad q_i = \frac{x_i}{X}\,,$$

soit encore : $$Q_j = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \sum_{i=1}^{j} p_i\varepsilon_i \qquad (\forall\, i,\ p_i\varepsilon_i = q_i\bar{\varepsilon}).$$

Après accroissement δt du temps, elle devient :

$$Q'_j = \sum_{i=1}^{j} q'_i = \frac{1}{\bar{\varepsilon}'} \sum_{i=1}^{j} p_i\varepsilon'_i = \frac{1}{\bar{\varepsilon}'} \sum_{i=1}^{j} p_i(\varepsilon_i + \lambda\varepsilon_i\eta_i) = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}'} Q_j + \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}'} \sum_{i=1}^{j} q_i\eta_i$$

Or : $$\bar{\varepsilon}' = \sum_{i=1}^{k} p_i\varepsilon'_i = \sum_{i=1}^{k} p_i(\varepsilon_i + \lambda\varepsilon_i\eta_i) = \bar{\varepsilon} + \lambda \sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i$$

On en déduit, pour l'accroissement de Q_j :

$$\delta Q_j = Q'_j - Q_j = \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}'} \left[\sum_{i=1}^{j} q_i\eta_i - Q_j \sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i\right] = \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}'}\, U_j.$$

Etudions le signe de U_j.

On a :

$$U_1 = q_1(\eta_1 - \sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i) \leq 0.$$

En effet : $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ est une distribution, et $\sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i$ est donc un barycentre de $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$.

Or les $\eta_i = 1 - \varepsilon_i$ sont dans l'ordre inverse des ε_i ; c'est-à-dire que : $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_k$.

De même :

$$U_k = 0 \text{ et } U_{k-1} = q_k(\sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i - \eta_k) \leq 0.$$

Les différences premières des U_j sont d'ailleurs :

$$U_j - U_{j-1} = \frac{\lambda\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}'} (\eta_j - \sum_{i=1}^{k} q_i\eta_i)\ q_j.$$

La fonction U_j décroît donc avec j tant que η_j est inférieur au barycentre $\sum_1^k q_i\eta_i$, puis elle croît ; comme U_1 est négatif et U_k nul, elle est constamment négative ou nulle.

Ainsi, lorsque les taux ε_i par catégorie croissent selon une même loi logistique en fonction du temps, et si tous les ε_i ne sont pas égaux entre eux, la fonction de concentration de $\vec{q}$ par rapport à $\vec{p}$ décroît uniformément : l'inégalité (au sens de C. Gini) diminue, ce qui est conforme au résultat attendu intuitivement.

Si au départ, tous les ε_i sont égaux entre eux, ils le restent et la concentration est constamment nulle.

Quant à la fonction de concentration *adjointe* (dans la définition donnée en [3]), celle qui porte non sur les "admis" mais sur les "exclus" dans l'exemple évoqué supra, elle *augmente* évidemment ; en effet, les taux relatifs à la seconde classe sont les :

$\varepsilon_i(t) = 1 - \eta_i(t)$

et l'on a donc, pour un accroissement positif δt du temps :

$$\delta\eta_i = -\omega\varepsilon_i\eta_i\ \delta t = -\omega\eta_i(1 - \eta_i)\ \delta t.$$

Les η_i subissent la transformation inverse de celle qui affecte les ε_i ; si celle-ci diminue la concentration de la première classe, elle ne peut qu'accroître celle de la seconde.

Remarquons que dans le cas général, si le temps t tend vers l'infini, tous les $\varepsilon_i(t)$ tendent vers un, et la fonction de concentration de la distribution $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots , q_k)$ de la première classe par rapport à celle

$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ de la marge tend vers la fonction identique (la concentration tend vers zéro).

Par contre bien que tous les $\eta_i(t)$ tendent vers zéro, la fonction de concentration adjointe, qui croît, ne tend pas vers la fonction identique.

D'ailleurs, chaque rapport $\frac{\eta_i(t)}{\eta_j(t)}$ tend, pour $i \neq j$, vers $\omega^{t_i - t_j}$ *différent de 1*, alors que $\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_j(t)}$ tend lui vers un : chaque q_i tend vers p_i, tandis que $r_i = \frac{y_i}{Y}$ tend vers $\frac{p_i}{1+\omega^{-t_i}} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{p_j}{1+\omega^{-t_j}} \right)^{-1}$.

Contrairement à celle des "admis", la distribution des "exclus" a pour limite une distribution *inégalitaire* (par rapport à la distribution marginale $\vec{p}$).

Cet exemple, comme celui étudié dans [3] où les $\delta\varepsilon_i$ sont les mêmes quel que soit i :

$\forall\, i \,,\ \delta\varepsilon_i = \Delta$

sont deux cas particuliers d'une condition *suffisante* pour qu'il y ait inversion entre les sens de variation d'une fonction de concentration et de son adjointe ; à savoir que les variations $\delta\varepsilon_i$ des taux par catégorie soient des fonctions symétriques en ε_i et η_i :

$\delta\varepsilon_i = f_i(\varepsilon_i, \eta_i)$ où $f_i(\varepsilon, \eta) = f_i(\eta, \varepsilon)$ $(\varepsilon + \eta = 1)$

Si ces conditions sont remplies, et si, quel que soit le vecteur $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k)$ des taux par catégorie de la première classe, le passage de $\vec{\varepsilon}$ à $\vec{\varepsilon} + \delta\vec{\varepsilon}$ accroît (resp. diminue) la concentration de celle-ci, il est clair que ce passage diminue (resp. accroît) celle de la seconde classe.

II - LES SITUATIONS "PARADOXALES" SONT INELUCTABLES.

Ainsi, les fonctions de concentration de M.O. Lorenz et C. Gini ont cette propriété, parfois jugée paradoxale, que pour une classe étendue de variations des taux par catégorie, la fonction de concentration et son adjointe varient en sens inverse l'une de l'autre.

On peut donc se poser le problème de la construction d'indicateurs de l'inégalité (ou de la concentration) qui ne présentent pas ce paradoxe

(Cf. J.C. Combessie, [1] et [2]).

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ les distributions d'effectifs des k catégories dans la première classe et la seconde classe respectivement ; les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^k$ de dimension k, et plus précisément au cône $\mathbb{R}_+^k$ de cet espace (où $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls).

Le vecteur :

$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ $\qquad (\forall\ i,\ z_i = x_i + y_i)$

est la distribution marginale des effectifs par catégorie pour la population globale.

Appelons indicateur de l'inégalité *de* $\vec{x}$ *par rapport à* $\vec{z}$ toute application C de $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^k$ dans un ordre *total ou partiel* T possédant un minimum $\bar{\omega}$ et qui fasse correspondre à chaque couple de distribution $\vec{x}$ et $\vec{z}$ un élément $C(\vec{x},\vec{z})$ de T ; C doit en outre vérifier un certain nombre de propriétés (axiomes) naturels destinés à traduire la représentation que l'on se fait du concept d'inégalité.

Lorsque l'on veut construire un *indice numérique* de l'inégalité, T est l'ensemble des réels positifs ou nuls, et l'application C entre dans la catégorie de ce que l'on appelle souvent un "mesurage" (measurement).

Prendre pour T un ordre partiel a pour intérêt d'obtenir quelques résultats applicables non seulement aux mesures numériques de l'inégalité, mais à des classes beaucoup plus larges d'indicateurs ; par exemple l'ensemble des fonctions de concentration de C. Gini et M.O. Lorenz, ordonnées par la comparaison uniforme : c'est un ordre partiel, inclus dans le treillis des fonctions de répartition sur l'intervalle fermé [0,1].

Il a été proposé beaucoup d'axiomatiques de la mesure des inégalités (voir par exemple [5]) ; il n'est pas dans mon propos d'en construire une de plus, mais seulement de montrer comment les indicateurs qui ne présentent pas le "paradoxe" que $C(\vec{x},\vec{z})$ et l'indicateur *adjoint* $C(\vec{y},\vec{z})$ puissent dans certains cas avoir des variations de sens opposés engendrent *nécessairement* des contradictions avec l'idée que l'on a communément de l'inégalité et de la comparaison des inégalités entre elles.

Avant d'aborder ce point, voici deux propriétés qui me semblent devoir être vérifiées par tout indicateur de l'inégalité d'une distribution $\vec{x}$ par rapport à une distribution $\vec{z}$.

1 - Si $0 \leq \lambda \leq 1$, alors, quel que soit $\vec{z}$ dans $\mathbb{R}_+^k$, $C(\lambda\vec{z},\vec{z}) = \overline{\omega}$.
Ceci traduit le fait que si les x_i sont proportionnels aux z_i ($\forall$ i, $\lambda z_i = x_i$), l'inégalité de $\vec{x}$ par rapport à $\vec{z}$ est minimum (elle serait nulle pour un indicateur numérique).

2 - Si $\lambda > 0$, alors quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{z}$ dans $\mathbb{R}_+^k$, avec $\vec{x} \leq \vec{z}$ ($\forall$ i, $x_i \leq z_i$), $C(\lambda\vec{x},\lambda\vec{z}) = C(\vec{x},\vec{z})$.
Ce qui signifie que si tous les effectifs en jeu varient proportionnellement, l'inégalité de $\vec{x}$ par rapport à $\vec{z}$ ne change pas.

Posons alors, comme supra :

$$X = \sum_1^k x_i \ , \ Z = \sum_1^k z_i \ , \ p_i = \frac{z_i}{Z} \ , \ q_i = \frac{x_i}{X} \ , \ \varepsilon_i = \frac{x_i}{z_i} \ , \ \overline{\varepsilon} = \frac{X}{Z} \ .$$

On a immédiatement, comme conséquence de (2) :

$$C\ (\vec{x},\vec{z}) = C(\frac{\vec{x}}{Z},\vec{p}) = C(\overline{\varepsilon}\vec{q},\vec{p})$$

Le vecteur $\overline{\varepsilon}\vec{q}$ a pour coordonnées les nombres $\varepsilon_i p_i$; donc un indicateur vérifiant cette condition (2) n'est fonction que du vecteur $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k)$ des taux par catégories, et de la distribution marginale $\vec{p}$. On pourra poser : $C(\vec{x},\vec{z}) = f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$.

Il est clair qu'inversement tout indicateur qui n'est fonction que de $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{p}$ vérifie la condition (2) ; cet axiome est donc admis (implicitement, le plus souvent) par tous ceux qui basent leurs raisonnements quant à la comparaison des inégalités sur la seule considération des taux ε_i de la classe I par catégorie, et de la répartition globale $\vec{p}$ de la population entre ces catégories.

Passons maintenant à la question des "paradoxes".

L'inégalité de la distribution $\vec{x}$ des effectifs de la première classe (les "admis", dans les cas traités en Sociologie de l'Education) par rapport à la distribution marginale $\vec{z}$ est repérée, dans l'ordre (total ou partiel) T par $C(\vec{x},\vec{z})$.

Celle de la distribution $\vec{y}$ des effectifs de la seconde classe (les "exclus"), par $C(\vec{y},\vec{z})$, avec $\vec{z} = \vec{x}+\vec{y}$.

Ce qui est considéré comme paradoxal, c'est d'une part qu'à valeur constante de $C(\vec{x},\vec{z})$, l'indicateur *adjoint* $C(\vec{y},\vec{z})$ puisse varier ; et d'autre part que $C(\vec{x},\vec{z})$ puisse croître (resp. décroître) alors que son adjoint $C(\vec{y},\vec{z})$ décroît (resp. croît).

Pour que l'indicateur C soit à l'abri de ces paradoxes, il est donc nécessaire que $C(\vec{y},\vec{z})$ soit une *fonction monotone* (non décroissante) de $C(\vec{x},\vec{z})$:
$C(\vec{y},\vec{z}) = F\,(C(\vec{x},\vec{z}))$.
F est une application de T dans T (plus précisément, de $T' = C(\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_+^k)$ dans T').

La relation entre les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est réciproque : chacun de ces vecteurs est la différence de l'autre à $\vec{z}$. On a donc aussi :
$C(\vec{x},\vec{z}) = F\,(C(\vec{y},\vec{z}))$
de sorte que F est *involutive* :
$\forall\, t \in T'\ ,\ t = F\,(F(t))$.

F est monotone non décroissante et involutive. Il en résulte immédiatement que tout élément de T' comparable à son image par F est un point fixe de l'application F.

En effet, si par exemple : $t \leq F(t)$,
alors (monotonie de F) : $F(t) \leq F(F(t))$
donc (involution) : $t = F(t)$.

En particulier, pour le minimum $\overline{\omega}$ de T, qui appartient à T' (d'après la propriété 1 énoncée supra), on a :
$\overline{\omega} = F(\overline{\omega})$.

A partir de là, deux cas sont possibles :
- ou bien T est un ordre total (cas des indicateurs numériques) ; F est la fonction identique, et l'on a *toujours* (quels que soient $\vec{x}$ et $\vec{z}$) :
$C(\vec{x},\vec{z}) = C(\vec{y},\vec{z})$.

- ou bien T est un ordre partiel ; alors $C(\vec{x},\vec{z})$ et son adjoint $C(\vec{y},\vec{z})$ ne *sont comparables* que *lorsqu'ils sont égaux*.

Au moyen des vecteurs $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{p}$, et posant : $\vec{\eta} = \vec{u} - \vec{\varepsilon}$ ($\vec{u} = (1,1,\ldots,1)$, $\forall i, \eta_i = 1 - \varepsilon_i$), ceci s'énonce encore : $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ et son adjoint $f(\vec{\eta},\vec{p})$ ne sont comparables que lorsqu'ils sont égaux.

Conséquence : considérons la situation dans laquelle la catégorie 1 est, par exemple, la moins nombreuse ; i.e. :

$p_1 = \min_{1 \leq i \leq k} p_i$

et où les taux d'"admis" par catégorie sont :

$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_k = 0$

la distribution des admis sera considérée par tout le monde comme *très inégalitaire*.

Si maintenant ces taux deviennent (à $\vec{p}$ invariant) :

$\varepsilon'_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = \ldots = \varepsilon'_k = 1$

la distribution devient, tout le monde l'admettra, *beaucoup plus égalitaire*, tout au moins lorsque le nombre des catégories est supérieur ou égal à 3 ; et un "bon" indicateur de l'inégalité donnerait donc, dans la comparaison des deux situations :

$f(\vec{\varepsilon},\vec{p}) > f(\vec{\varepsilon}',\vec{p})$.

Or, on vient de le voir, un indicateur f ne présentant pas les paradoxes exigerait, puisque $\vec{\varepsilon}' = \vec{u} - \vec{\varepsilon}$ est l'adjoint de $\vec{\varepsilon}$, que $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ et $f(\vec{\varepsilon}',\vec{p})$ soient ou égaux, ou non comparables : selon cet indicateur, nos deux situations ne peuvent être que non comparables, ou fournir le même degré d'inégalité.

Autre conséquence de la symétrie en $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\eta}$ de l'indicateur de l'inégalité: On admet souvent qu'augmenter tous les taux ε_i par catégorie d'une même valeur positive h *diminue* (ou, en tout cas, *n'augmente pas*) l'inégalité ; ce qui se traduit par :

si $\vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon} + \vec{u}\,h$ $(h > 0)$, alors, quel que soit $\vec{\varepsilon}$,

$f(\vec{\varepsilon}',\vec{p}) \leq f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$

si $\vec{\eta}$ et $\vec{\eta}'$ sont respectivement les adjoints de $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\varepsilon}'$, on a :

$\vec{\eta} = \vec{\eta}' + \vec{u}\,h$

et par conséquent :

$f(\vec{\eta}',\vec{p}) \geq f(\vec{\eta},\vec{p})$

Dans ces conditions, et dans le cas où T est un ordre total (indicateurs numériques), l'égalité $f(\vec{\varepsilon},\vec{p}) = f(\vec{\eta},\vec{p})$ pour tout $\vec{\varepsilon}$ implique que

$f(\vec{\varepsilon}',\vec{p}) = f(\vec{\varepsilon}+\vec{u}\,h,\vec{p}) = f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$

quels que soient **h** et $\vec{\varepsilon}$.

On peut alors facilement construire des exemples de situations pour lesquelles, dès que le nombre k de catégories dépasse 2, la comparaison des inégalités selon l'indice apparaîtra aussi absurde que dans le cas précédent.

Par exemple, la situation dans laquelle :

$$\varepsilon_1 = 25\% \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_k = 0$$

doit être considérée comme non comparable, ou aussi égalitaire que celle pour laquelle :

$$\varepsilon_1 = 100\% \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_k = 75\%$$

Les indicateurs pour lesquels $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ ne dépend, à $\vec{p}$ constant, que des écarts $|\varepsilon_i - \varepsilon_j|$ entre taux par catégories vérifient la condition que $f(\vec{\varepsilon} + h\vec{u}, \vec{p})$ ne dépend pas de h.

On peut dire que ce sont les indicateurs admissibles lorsque l'on pense que l'inégalité reste la même lorsque toutes les *différences* entre taux restent les mêmes ; par contre, ils sont interdits si l'on estime que l'inégalité *peut* diminuer *strictement* lorsque l'on augmente tous les taux d'une même quantité suffisamment grande.

Mais on peut raisonner de façon analogue, et ceci rejoint l'étude du début de cette note, lorsque l'on suppose que tous les taux ε_i sont des fonctions logistiques du temps t ; pour un accroissement δt du temps, les taux augmentent, on l'a vu, de :

$$\delta\varepsilon_i = K\,\varepsilon_i\eta_i\,\delta t.$$

L'accroissement $\delta\vec{\varepsilon}$ est donc une fonction symétrique de $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\eta}$. Comme $\delta\vec{\eta} = -\delta\vec{\varepsilon}$, l'hypothèse que la croissance, selon la logistique, de tous les taux ε_i diminue l'inégalité est incompatible avec un indicateur $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ de l'inégalité symétrique en $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\eta}$, sauf à supposer que $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ reste constant lorsque le temps (et les taux) varient.

Or, lorsque t augmente indéfiniment, tous les taux ε_i tendent vers 1 ; donc $f(\vec{\varepsilon},\vec{p})$ serait nul quel que soit $\vec{\varepsilon}$ (on se place toujours dans le cas où T est un ordre total) : l'indicateur de l'inégalité n'indique plus rien du tout.

Ces quelques remarques suffisent, je pense, à comprendre pourquoi le "paradoxe" (qui, à mon sens, n'est qu'apparent : il s'agit seulement de la difficulté psychologique d'assimilation des *dualités* mathématiques) des éventuelles variations en sens inverse d'un indicateur d'inégalité et de son adjoint est une conséquence nécessaire des propriétés que le bon sens commun exige d'un tel indicateur.

D'ailleurs, et ce sera ma remarque finale, pas plus que les fonctions de concentration (et l'indice) de C. Gini, les autres mesures usuelles de l'inégalité (ou de la concentration, ou de l'indépendance) d'une distribution $\vec{q}$ par rapport à une distribution $\vec{p}$ ne satisfont à la condition de symétrie en $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\eta}$.

Que ce soient les distances de la famille :

$$(\Sigma\, |q_i - p_i|^\alpha)^{1/\alpha} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \left(\Sigma\, p_i^\alpha (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \alpha \geq 1$$

ou la distance du Khi-deux :

$$\Sigma \frac{(q_i - p_i)^2}{p_i} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2}\, \Sigma\, p_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$$

ou encore les écarts de type entropique :

$$\Sigma\, q_i \operatorname{Log} \frac{q_i}{p_i} = \Sigma\, p_i \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} \operatorname{Log} \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}$$

tous font jouer un rôle dissymétrique à $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\eta}$, et ne sont donc pas à l'abri du "paradoxe".

BIBLIOGRAPHIE

[1] COMBESSIE, J.C., "L'évolution comparée des inégalités : problèmes statistiques, *Revue Française de Sociologie* 25(2), 1984.

[2] COMBESSIE, J.C., "Paradoxes des fonctions de concentration de C. Gini, *Revue Française de Sociologie* 26 (4), 1985.

[3] BARBUT, M., "Sur quelques propriétés élémentaires des fonctions de concentration de C. Gini, *Mathématiques et Sciences humaines* n°88, 22ème année.

[4] CHERKAOUI, M., *Les changements du système éducatif en France 1950-1980*, Presses Universitaires de France, 1982.

[5] SEN, A., *On Economic Inequality*, Oxford, Clarenton Press, 1973.