Mathématiques et sciences humaines

Rudolf Wille

Sur la fusion des contextes individuels

Mathématiques et sciences humaines, tome 85 (1984), p. 57-71
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1984__85__57_0>

Math. Sci. hum. (22^e année, n°85, *1984*, p.57-71)

SUR LA FUSION DES CONTEXTES INDIVIDUELS

Rudolf WILLE *

1. CONTEXTES ET TREILLIS DE CONCEPTS

Une façon générale pour représenter des faits consiste à établir des correspondances entre objets et attributs. On en dérive des concepts qui ont une structure hiérarchisée par la relation sous-concept/sur-concept. Cette construction peut être formalisée dans le langage ensembliste par les définitions suivantes (cf. Wille [9]) : on dit qu'un triplet (G,M,I) est un *contexte*, où G et M sont des ensembles et I une relation entre G et M ; les éléments de G (resp. de M) s'appelleront *objets* - resp. *attributs*, et gIm sera lu "l'objet g a l'attribut m". Pour tout $A \subseteq G$ et $B \subseteq G$, on définit

$$A' := \{m \in M \mid gIm \text{ pour tout } g \in A\},$$
$$B' := \{g \in G \mid gIm \text{ pour tout } m \in B\}.$$

On appelle alors une paire (A,B) *concept* du contexte (G,M,I) si $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A' = B$ et $B' = A$; c'est-à-dire que A -resp. B - peuvent être entendus comme *l'extension* - resp. *la compréhension* - déterminant le concept. Notons $\mathfrak{L}(G,M,I)$ l'ensemble de tous les concepts de (G,M,I). Enfin, la hiérarchie des concepts est donné par

$$(A_1,B_1) \leqslant (A_2,B_2) :\Longleftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \quad (\Longleftrightarrow B_1 \supseteq B_2)$$

pour (A_1,B_1) et (A_2,B_2) de $\mathfrak{L}(G,M,I)$, ce qu'on lit "(A_1,B_1) est un *sous-concept* du *sur-concept* (A_2,B_2)". L'ordre $\leqslant$ constitue un treillis complet sur $\mathfrak{L}(G,M,I)$ qui est baptisé *treillis de concepts* (aussi *treillis de Galois* par Barbut [2]) et noté $\underline{\mathfrak{L}}(G,M,I)$.

---

* L'auteur a bénéficié de l'hospitalité du Centre de Mathématique Sociale de l'E.H.E.S.S. (Paris) lors de l'élaboration de ce travail. Son séjour a été financé par l'Office Allemand d'Echanges Universitaires (DAAD). Il tient à remercier spécialement M. Vincent Duquenne qui l'a assisté dans la rédaction définitive de ce travail.

Dans ce texte, on discutera comment divers contextes (G_s,M_s,I_s) $(s \in S)$ qui décrivent des compréhensions individuelles, peuvent être fusionnés raisonnablement. Ces contextes peuvent représenter, par exemple, les résultats d'un questionnaire. Que seront les objets et les attributs du contexte fusionné ? Bien qu'un objet puisse être commun à plusieurs contextes, son appartenance aux différents contextes individuels le divise en différents objets individuels. Donc, pour le contexte fusionné, on choisira $\bigcup_{s\in S} G_s \times \{s\}$ comme l'ensemble des objets et de même $\bigcup_{s\in S} M_s \times \{s\}$ comme l'ensemble des attributs. La question essentielle reste comment construire la relation I entre ces objets et ces attributs individuels.

La détermination de I sera dépendante de la structure fondamentale dérivée des contextes, à savoir les treillis de concepts, $\underline{\mathfrak{L}}(G_s,M_s,I_s)$ $(s \in S)$. On pourra reconnaître les contextes dans les treillis de concepts par des applications $\alpha_s : G_s \cup M_s \to \underline{\mathfrak{L}}(G_s,M_s,I_s)$ $(s \in S)$ qui ont la propriété :

$$gI_sm \iff \alpha_sg \leq \alpha_sm \qquad \text{(v. Théorème 1.2)}$$

On supposera $G_r = G_s$ et $M_r = M_s$ pour toute paire $r,s \in S$; dans le cas où on n'aurait pas ces égalités, on élargirait les contextes à $(\bigcup_{s\in S} G_s, \bigcup_{s\in S} M_s, I_s)$ $(s \in S)$. Pour fusionner, l'idée suivante est essentielle : pour tout objet g - resp. attribut m -, les concepts α_sg -resp. α_sm - $(s \in S)$ composeront un concept du contexte fusionné décrit par $\alpha g := (\alpha_sg)_{s\in S}$ - resp. $\alpha m := (\alpha_sm)_{s\in S}$ - . On regardera le treillis de concepts du contexte fusionné comme le sous-treillis complet T engendré par ces éléments αg et αm dans le produit direct formé par les $\underline{\mathfrak{L}}(G_s,M_s,I_s)$ $(s \in S)$. De cette manière, la relation I est déterminée, mais il faudra travailler pour l'obtenir explicitement.

Notons certaines propriétés de la fusion. Tout treillis $\underline{\mathfrak{L}}(G_s,M_s,I_s)$ pourra être retrouvé comme une image homomorphe de T où les éléments αg - resp. αm - correspondent aux objets - resp. attributs - de (G_s,M_s,I_s). T est le plus petit treillis avec cette propriété. Lorsque les contextes individuels sont égaux, T est isomorphe à tout $\underline{\mathfrak{L}}(G_s,M_s,I_s)$ $(s \in S)$. Par contre, si T est le produit direct entier, les contextes individuels sont complètement indépendants.

Avant d'analyser le produit sous-direct T, on rappellera des résultats fondamentaux concernant le treillis de concepts pour faciliter l'approche des paragraphes ultérieurs. Premièrement, on répétera sans démonstration des résultats sur la correspondance de Galois associée à un contexte (CF. Birkhoff [4], Barbut et Monjardet [3]).

PROPOSITION 1.1.

Pour un contexte (G,M,I), on a

(1) $A_1 \subseteq A_2$ entraine $A_1' \supseteq A_2'$ pour toute paire $A_1, A_2 \subseteq G$,

(1') $B_1 \subseteq B_2$ entraine $B_1' \supseteq B_2'$ pour toute paire $B_1, B_2 \subseteq M$,

(2) $A \subseteq A''$ et $A' = A''$ pour tout $A \subseteq G$,

(2') $B \subseteq B''$ et $B' = B''$ pour tout $B \subseteq M$.

Rappelons qu'un sous-ensemble D d'un treillis complet T est *supremum-dense* (*infimum-dense*) si $T = \{\bigvee X \mid X \subseteq D\}$ $(T = \{\bigwedge X \mid X \subseteq D\}$.

Le théorème suivant se trouve en substance dans Banaschewski [1] et Schmidt [6] ; il sera formulé dans les termes de Wille [9].

THEOREME 1.2.

Soit (G,M,I) un contexte. Alors $\mathfrak{L}(G,M,I)$ est un treillis complet ayant ses infimums et supremums décrits par

$$\bigwedge_{j\in J} (A_j, B_j) = \Big(\bigcap_{j\in J} A_j, \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)'\Big),$$

$$\bigvee_{j\in J} (A_j, B_j) = \Big(\Big(\bigcap_{j\in J} B_j\Big)', \bigcap_{j\in J} B_j\Big).$$

Réciproquement, pour un treillis complet T, on a $T \cong \mathfrak{L}(G,M,I)$ si et seulement si il existe des applications $\gamma : G \to T$ et $\mu : M \to T$ telles que γG est supremum-dense dans T, μM est infimum-dense dans T, et $gIm \iff \gamma g \leq \mu m$ pour tout $g\in G$ et $m \in M$.

Démonstration. Il est clair que $\leq$ est un ordre sur $\mathfrak{L}(G,M,I)$. Soient $(A_j, B_j) \in \mathfrak{L}(G,M,I)$ $(j\in J)$. A cause de la proposition 1.1., $\bigcap_{j\in J} A_j \subseteq \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)''$ et $\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)'' \subseteq A_k'' = A_k$ pour tout $k \in J$. Donc $\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)'' = \bigcap_{j\in J} A_j$; c'est-à-dire $\Big(\bigcap_{j\in J} A_j, \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)'\Big) \in \mathfrak{L}(G,M,I)$. Si $(A,B) \leq (A_j, B_j)$ pour tout $j \in J$ $((A,B) \in \mathfrak{L}(G,M,I))$, on a $A \subseteq \bigcap_{j\in J} A_j$ et $(A,B) \leq \Big(\bigcap_{j\in J} A_j, \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)'\Big)$.

Cela vérifie l'égalité pour l'infimum ; pour le supremum, même démonstration. Soit alors φ un isomorphisme de $\mathfrak{L}(G,M,I)$ sur un treillis complet T. On définit des applications $\gamma : G \to T$ et $\mu : M \to T$ par $\gamma g := \varphi(\{g\}'', \{g\}')$ pour tout $g \in G$ et $\mu m := \varphi(\{m\}', \{m\}'')$ pour tout $m \in M$. Comme $A = \bigcup_{g\in A} \{g\}''$ - resp. $B = \bigcup_{m \in B} \{m\}''$ - pour tout $(A,B) \in \mathfrak{L}(G,M,I)$, γG est supremum-dense dans T - resp. μM est infimum-dense dans T-. De plus, $gIm \iff \{g\}'' \subseteq \{m\}' \iff \gamma g \leq \mu m$.

Inversement, soit T un treillis complet et soient $\gamma : G \to I$ et $\mu : M \to T$ des applications ayant les propriétés désirées. On définit une application φ de $\mathfrak{L}(G,M,I)$ dans T par $\varphi(A,B) := \bigvee \gamma A$ pour tout $(A,B) \in \mathfrak{L}(G,M,I)$. Il est clair que φ est isotone. Pour $X \in T$, on définit $\Psi X := (\{g \in G | \gamma g \leqslant X\}, \{m \in M | X \leqslant \mu m\}$. Comme γG est supremum-dense dans T et μM est infimum-dense dans T, $\bigvee\gamma \{g \in G | \gamma g \leqslant X\} = X = \bigwedge\mu \{m \in M | X \leqslant \mu m\}$. Donc, en vertu de l'équivalence $gIm \Longleftrightarrow \gamma g \leqslant \mu m$, ΨX est un concept de (G,M,I) et $\varphi \Psi X = X$ pour tout $X \in T$. Evidemment, $(A,B) \leqslant \Psi\, \varphi(A,B)$ pour $(A,B) \in \mathfrak{L}(G,M,I)$; comme $\gamma g \leqslant \bigvee\gamma A \leqslant \mu m$ entraine gIm, on a de même $(A,B) = \Psi\, \varphi(A,B)$. De plus, Ψ est isotone. On peut donc résumer en disant que φ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}(G,M,I)$ sur T et $\varphi^{-1} = \Psi$.

2. CONSTRUCTION DE PRODUIT SOUS-DIRECT

Le résultat de base est que si l'on se donne les images d'une famille de générateurs d'un produit sous-direct par leurs projections, sur les facteurs on peut construire ce produit sous-direct. Pour discuter cette construction, il convient de définir la notion de P-treillis complet. Soit P un ensemble ordonné, avec certains supremums et certains infimums distingués, et soit α une application isotone de P dans un treillis complet T qui respecte les opérations distinguées. Si T est engendré par αP, la paire (T,α) s'appellera un *P-treillis complet*. Soient (T_1,α_1) et $T_2,\alpha_2)$ des P-treillis complets, un morphisme complet φ de T_1 dans T_2 est un *P-morphisme* si $\varphi\, \alpha_1 = \alpha_2$. (T_1,α_1) et (T_2,α_2) sont *isomorphes* si φ est un isomorphisme entre T_1 et T_2 (cf. Wille [7]).

Soit $\mathfrak{L}$ une classe de treillis complets telle qu'il existe un ensemble de représentants des classes isomorphes. $\mathfrak{L}_P$ dénotera la classe (catégorie) des P-treillis complets dont le treillis est dans $\mathfrak{L}$ (et des P-morphismes entre ces P-treillis complets). Pour $(T,\alpha) \in \mathfrak{L}_P$, $\widetilde{(T,\alpha)}$ est la classe des P-treillis dans $\mathfrak{L}_P$ isomorphes à (T,α). $\widetilde{\mathfrak{L}}_P$ dénotera l'ensemble de tous les $\widetilde{(T,\alpha)}$ avec $(T,\alpha) \in \mathfrak{L}_P$. S'il existe un P-morphisme de (T_1,α_1) dans (T_2,α_2), on définira $\widetilde{(T_1,\alpha_1)} \geqslant \widetilde{(T_2,\alpha_2)}$.

PROPOSITION 2.1. $(\widetilde{\mathfrak{L}}_P, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.

Démonstration. Il est clair que la relation $\leqslant$ est réflexive et transitive. Soient $\varphi : (T_1,\alpha_1) \to (T_2,\alpha_2)$ et $\Psi : (T_2,\alpha_2) \to (T_1,\alpha_1)$ des P-morphismes. On définit $S := \{(x,y) \in T_1 \times T_2 | \varphi x = y \text{ et } \Psi y = x\}$. S contient l'ensemble $\{(\alpha_1 p, \alpha_2 p) | p \in P\}$, et S est évidemment un sous-treillis complet de $T_1 \times T_2$. Comme T_1 est engendré par $\alpha_1 P$, $T_1 = \{x | (x,y) \in S\}$ et de même $T_2 = \{y | (x,y) \in S\}$, $\varphi = \Psi^{-1}$ et $\widetilde{(T_1,\alpha_1)} = \widetilde{(T_2,\alpha_2)}$. Donc $\leqslant$ est également antisymétrique.

THEOREME 2.2.

Soit $\mathcal{T}$ fermé pour l'opération de produit sous-direct indicé par l'ensemble I. Pour (T,α) et (T_i,α_i) $(i \in I)$ de $\mathcal{T}_P$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe un isomorphisme φ de T sur un produit sous-direct des T_i $(i \in I)$ avec $\varphi\alpha p = (\alpha_i p)_{i\in I}$ pour tout $p \in P$.

(ii) $\widetilde{(T,\alpha)}$ est le supremum des $\widetilde{(T_i,\alpha_i)}$ $(i \in I)$ dans $(\widetilde{\mathcal{T}}_P, \leqslant)$.

((iii) (T,α) est un produit des (T_i,α_i) $(i \in I)$ dans la catégorie $\mathcal{T}_P$.)

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit π_j la projection du produit direct des T_i $(i \in I)$ sur T_j. Alors $\pi_j\varphi$ est un P-morphisme de (T,α) dans (T_j,α_j), et $\widetilde{(T,\alpha)}$ est un majorant commun des $\widetilde{(T_i,\alpha_i)}$ $(i \in I)$. Soit $\widetilde{(U,\beta)}$ un autre majorant commun ; il y a donc des P-morphismes Ψ_i de (U,β) dans (T_i,α_i) $(i \in I)$. On définit $S := \{(u,t) \in U \times T \mid \Psi_i u = \pi_i\varphi t$ pour tout $i \in I\}$. Pour (u,t_1) et (u,t_2) de S, on a nécessairement $t_1 = t_2$ car $\pi_i\varphi t_1 = \Psi_i u = \pi_i\varphi t_2$ pour tout $i \in I$; S est donc une application $U \to T$, et c'est de plus un *P-morphisme* de (U,β) dans (T,α) parce qu'il contient l'ensemble $\{(\beta p,\alpha p) \mid p \in P\}$ et qu'il est un sous-treillis complet de $U\times T$. La condition (ii) est donc vérifiée.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit U le sous-treillis engendré par les éléments $(\alpha_i p)_{i\in I}$ dans le produit direct des T_i $(i \in I)$ et soit $\beta p := (\alpha_i p)_{i\in I}$ pour $p \in P$. Comme $\widetilde{(U,\beta)}$ est un majorant commun des $\widetilde{(T_i,\alpha_i)}$ $(i \in I)$, il existe un P-morphisme Ψ de (U,β) dans (T,α). Pour chaque P-morphisme σ_i de (T,α) dans (T_i,α_i) $(i \in I)$, $\sigma_i\Psi\beta p = \sigma_i\alpha p = \alpha_i p = \pi_i\beta p$ $(p \in P)$ implique que $\sigma_i\Psi = \pi_i$ pour tout $i \in I$. D'où Ψ est un isomorphisme, et il suffit de prendre $\varphi := \psi^{-1}$, ce qui achève la démonstration.

Ce théorème clarifie la nature d'un produit sous-direct en le caractérisant comme une "fusion minimale" des facteurs, mais n'aide pas à le construire effectivement. Il est généralement très couteux de l'engendrer dans le produit direct par les opérations supremum et infimum (comme d'ailleurs toute génération de sous-treillis par les deux opérations). On va développer une méthode pour pouvoir l'engendrer avec une seule des deux opérations (cf. Wille [8]).

PROPOSITION 2.3. Soient T_1 et T_2 des treillis complets. Lorsque τ est un Λ-morphisme surjectif de T_1 sur T_2, il lui est associé un V-morphisme injectif $\underline{\tau}$ de T_2 dans T_1 par $\underline{\tau}y := \Lambda\, \tau^{-1}y$ $(y \in T_2)$.

Démonstration. Puisque, pour tout $y \in T_2$, on a $\tau\underline{\tau}y = y$, $\underline{\tau}$ est une application injective de T_2 dans T_1. Pour $X \subseteq T_1$, on a $\underline{\tau}V\tau X \geqslant V\underline{\tau}\tau X$. Ensuite $\underline{\tau}\tau x \leqslant x$ et $\tau\underline{\tau}\tau x = \tau x$ $(x \in T_1)$ impliquent $\underline{\tau}V\tau X = \underline{\tau}V\tau\underline{\tau}\tau X \leqslant \underline{\tau}\tau V\underline{\tau}\tau X \leqslant V\underline{\tau}\tau X$.
Donc $\underline{\tau}V\tau X = V\underline{\tau}\tau X$, et $\underline{\tau}$ est un V-morphisme.

On appelle une famille de morphismes complets $\tau_i : T \to T_i$ ($i \in I$) entre treillis complets *séparante* si toute paire $x \neq y$ de T, il existe $i \in I$ avec $\tau_i x \neq \tau_i y$. Rappelons qu'un sous-ensemble D est *supremum-dense* dans un treillis complet T si $T = \{\bigvee X \mid X \subseteq D\}$.

PROPOSITION 2.4.

Soit $\tau_i : T \to T_i$ ($i \in I$) une famille séparante de morphismes complets entre treillis complets ; alors l'ensemble $G(\tau_i \mid i \in I) := \{\underline{\tau}_i \tau x \mid x \in T \text{ et } i \in I\} \setminus \{0\}$ est supremum-dense dans T.

Démonstration. Soit $x \in T$ tel que $x \neq \bigvee\{\underline{\tau}_i \tau_i x \mid i \in I\}$. Il existe alors $j \in I$ avec $\tau_j x \neq \tau_j \bigvee\{\underline{\tau}_i \tau_i x \mid i \in I\} = \bigvee\{\tau_j \underline{\tau}_i \tau_i x \mid i \in I\} = \tau_j x$ (car $\tau_j \underline{\tau}_j \tau_j = \tau_j$ et $\underline{\tau}_i \tau_i x \leq x$, pour tout $x \in T$), ce qui est une contradiction.
Donc $x = \bigvee\{\underline{\tau}_i \tau_i x \mid i \in I\}$ pour tout $x \in T$.

Pour un produit sous-direct, la famille des projections est évidemment séparante, et la proposition 2.4. en décrit alors un ensemble supremum-dense. Si l'on se donne les facteurs, que faut-il se donner de plus pour construire cet ensemble supremum-dense et donc le produit sous-direct ? Du fait qu'un isomorphisme φ de T sur un produit sous-direct des $\tau_i T$ ($i \in I$) est défini par $\varphi x := (\tau_i x)_{i \in I}$ ($x \in T$), on montrera qu'il suffit de connaitre les $\bigvee$-morphismes $\tau_j \underline{\tau}_i$ de $\tau_i T$ dans $\tau_j T$ ($i,j \in I$). Pour les caractériser, il faut examiner la construction d'un produit sous-direct par une famille quelconque de $\bigvee$-morphismes entre ses facteurs.
Soient T_i ($i \in I$) des treillis complets et soient $\tau_{ji} : T_i \to T_j$ ($i,j \in I$) $\bigvee$-morphismes satisfaisant les conditions suivantes :

(1) τ_{ii} est l'identité pour tout $i \in I$.

(2) $\tau_{ki} \geq \tau_{kj}\tau_{ji}$ pour tout triplet $i,j,k \in I$.

PROPOSITION 2.5. $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I) := \{(\tau_{ji}x)_{j \in I} \mid x \in T_i \text{ et } i \in I\} \setminus \{0\}$ est supremum-dense dans le produit sous-direct $S(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$ des T_i ($i \in I$) engendré par $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$.

Démonstration. Comme $\tau_{ii}x = x$ pour tout $i \in I$ et $x \in T_i$, la fermeture de $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$ par $\wedge$ et $\vee$ dans le produit direct des T_i ($i \in I$) est un produit sous-direct. Soit τ_i la projection de $S(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$ sur T_i ($i \in I$), et soit $\underline{\tau}_i$ le $\bigvee$-morphisme de T_i dans $S(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$ défini par $\underline{\tau}_i x := (\tau_{ji}x)_{j \in I}$ ($x \in T_i$). Notons que $\underline{\tau}_i \tau_i t \leq t$ pour tout $t \in G(\tau_{ji} \mid i,j \in T)$ et $\tau_i \underline{\tau}_i x = x$ pour tout $x \in T_i$, ce qui s'obtient (respectivement) par $\underline{\tau}_i \tau_i (\tau_{jk}x)_{j \in I} = \underline{\tau}_i \tau_{ik} x = (\tau_{ji}\tau_{ik}x)_{j \in I} \leq (\tau_{jk}x)_{j \in I}$ à cause de (2) et par $\tau_i \underline{\tau}_i x = \tau_i (\tau_{ji}x)_{j \in I} = \tau_{ii}x = x$ à cause de (1). Soient E_r ($r \in R$) des sous-ensembles de $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$. Montrons que $\bigwedge_{r \in R} \bigvee E_r$ est aussi le supremum d'un sous-ensemble de $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I)$.

Soit $t_i := \underline{\tau}_i \bigwedge_{r\in R} \bigvee \tau_i E_r$ (i ∈ I). Il est clair que $t_i \in G(\tau_{ji} | i,j \in I) \cup \{0\}$. On a $t_i \leqslant \bigwedge_{r\in R} \underline{\tau}_i \bigvee \tau_i E_r = \bigwedge_{r\in R} \bigvee \underline{\tau}_i \tau_i E_r \leqslant \bigwedge_{r\in R} \bigvee E_r$ et $\tau_t t_i = \tau_i \underline{\tau}_i \tau_i \bigwedge_{r\in R} \bigvee E_r = \tau_i \bigwedge_{r\in R} \bigvee E_r$. Donc $\bigwedge_{r\in R} \bigvee E_r = \bigvee_{i\in I} t_i$ ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 2.6.
Soit τ_i la projection de $S(\tau_{ji} | i,j\in I)$ sur T_i (i ∈ I), et $\underline{\tau}_i x := \bigwedge \tau_i^{-1} x$ $(x \in T_i)$. Alors, $\underline{\tau}_i x = (\tau_{ji} x)_{j\in I}$ pour tout $x \in T_i$ et $\tau_{ji} = \tau_j \underline{\tau}_i$ (i,j ∈ I).

Démonstration. Soit $t \in S(\tau_{ji} | i,j \in I)$ et $\tau_i t = x$. En vertu de la proposition 2.5., il existe $K \subseteq I$ et une famille $(x_k)_{k\in K}$ avec $t = \bigvee_{k\in K} (\tau_{\ell k} x_k)_{\ell\in I}$. Alors, $\tau_{ji} x =$

$$\tau_{ji}\tau_i t = \tau_{ji}\tau_i \bigvee_{k\in K} (\tau_{\ell k}\, x_k)_{\ell\in I} = \bigvee_{k\in K} \tau_{ji}\tau_i (\tau_{\ell k} x_k)_{\ell\in I} = \bigvee_{k\in K} \tau_{ji}\tau_{ik} x_k \leqslant$$

$$\bigvee_{k\in K} \tau_{jk} x_k, \text{ d'où } (\tau_{ji} x)_{j\in I} \leqslant t.$$

Comme $\tau_i (\tau_{ji} x)_{j\in I} = \tau_{ii} x = x$, on a $(\tau_{ji} x)_{j\in I} = \bigwedge \tau_i^{-1} x = \underline{\tau}_i x$. En outre, on a $\tau_j \underline{\tau}_i x = \tau_j (\tau_{ki} x)_{k\in I} = \tau_{ji} x$, ainsi $\tau_{ji} = \tau_j \underline{\tau}_i$ (i,j ∈ I).

THEOREME 2.7. Soient $\tau_i : (T,\alpha) \to (T_i,\alpha_i)$ (i ∈ I) des P-morphismes entre des P-treillis complets. Si $(\widetilde{T,\alpha})$ est le supremum des $(\widetilde{T_i,\alpha_i})$ (i ∈ I), alors $\tau_j \underline{\tau}_i$ est le plus grand des V-morphismes $\sigma : T_i \to T_j$ tels que $\sigma\alpha_i p \leqslant \alpha_j p$ pour tout p ∈ P (i,j ∈ I).

Démonstration. Soit Σ_{ji} l'ensemble de tous les V-morphismes σ de T_i dans T_j tels que $\sigma\alpha_i p \leqslant \alpha_j p$ pour tout p ∈ P (i,j ∈ I). Comme $\tau_j \underline{\tau}_i \alpha_i p = \tau_j \underline{\tau}_i \tau_i \alpha p \leqslant \tau_j \alpha p = \alpha_j p$ (p ∈ P), on a $\tau_j \underline{\tau}_i \in \Sigma_{ji}$. Il existe une plus grande application σ_{ji} dans Σ_{ji} donnée par $\sigma_{ji} x = \bigvee\{\sigma x | \sigma \in \Sigma_{ji}\}$ $(x \in T_i)$.
Montrons d'abord que la famille $(\sigma_{ji})_{i,j\in I}$ satisfait les conditions (1) et (2). Soit $S_i := \{x \in T_i | \sigma_{ii} x = x\}$ (i ∈ I). Comme Σ_{ii} contient l'identité de T_i, on a $\sigma_{ii} x \geqslant x$ pour tout $x \in T_i$; en particulier $\sigma_{ii}\alpha_i p = \alpha_i p$ (p ∈ P). Pour cette raison $\alpha_i P \subseteq S_i$. Pour $X \subseteq S_i$, S_i contient $\bigvee X$ et $\bigwedge X$ car $\sigma_{ii} \bigvee X = \bigvee \sigma_{ii} X = \bigvee X$ et $\bigwedge X = \bigwedge \sigma_{ii} X \geqslant \sigma_{ii} \bigwedge X \geqslant \bigwedge X$. Alors, S_i est un sous-treillis complet de T_i et, parce qu'il contient un ensemble de générateurs de T_i, on a donc $S_i = T_i$; c'est-à-dire que (1) est satisfaite comme $\sigma_{kj}\sigma_{ji} \in \Sigma_{ki}$, (2) se vérifie immédiatement. En vertu des propositions 2.5. et 2.6., cela caractérise le produit sous-direct $S(\sigma_{ji} | i,j \in I)$ des T_i (i ∈ I) et, pour les projections σ_i de $S(\sigma_{ji} | i,j \in I)$ sur T_i (i ∈ I), on a $\sigma_{ji} = \sigma_j \underline{\sigma}_i$ (i,j ∈ I). Construisons une application injective Ψ de $S(\sigma_{ji} | i,j \in I$ dans T avec $s = (\tau_i \Psi s)_{i\in I}$ pour tout $s \in S(\sigma_{ji} | i,j \in I)$: soit $\Psi s := \bigvee_{i\in I} \underline{\tau}_i \sigma_i s$.

On obtient $\sigma_j S = \tau_j\tau_j\sigma_j S \leqslant \tau_j \Psi S = \bigvee_{i\in I} \tau_j\tau_i\sigma_i S \leqslant \bigvee_{i\in I} \sigma_j\sigma_i\sigma_i S = \sigma_j\sigma_j\sigma_j S = \sigma_j S$;
donc $\sigma_j S = \tau_j \Psi S$ et $S = (\tau_i \Psi S)_{i\in I}$. Alors, pour l'isomorphisme φ défini par $\varphi t := (\tau_i t)_{i\in I}$ $(t\in T)$, φT contient S comme sous-treillis complet. Mais, pour tout $p \in P$, on a $\tau_k \alpha p = \alpha_k p = \bigvee_{i\in T} \sigma_{ki}\, \alpha_i p = \bigvee_{i\in I} \sigma_k\, (\sigma_{ji}\alpha_i p)_{j\in I} = \sigma_k \bigvee_{i\in I} (\sigma_{ji}\alpha_i p)_{j\in I} =$

$\tau_k \Psi \bigvee_{i\in I} (\sigma_{ji}\alpha_i p)_{j\in I}$; donc $\varphi\alpha P \subseteq S$. Pour cette raison $\varphi T = S$ et $\varphi^{-1} = \Psi$. Comme

$\tau_i = \sigma_i \varphi$ $(i\in I)$, d'après la proposition 2.6., $\tau_j\tau_i = \sigma_j\sigma_j = \sigma_{ji}$ pour tout $j,i \in I$.

On peut résumer la méthode pour engendrer le produit sous-direct avec seulement le supremum (dualement avec l'infimum) : si (T_i,α_i) sont des P-treillis complets,

. déterminer τ_{ji} comme le plus grand des V-morphismes $\sigma : T_i \to T_j$ avec $\sigma\alpha_i p \leqslant \alpha_j p$ pour tout $p \in P$ $(i,j \in I)$,

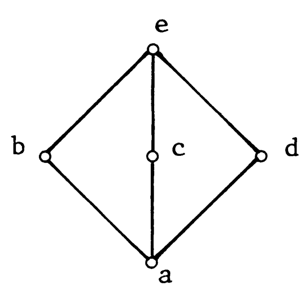
. former l'ensemble $G(\tau_{ji} \mid i,j \in I) := \{(\tau_{ji}x)_{j\in I} \mid x \in T_i \text{ et } i \in I\}$,

. engendrer $T := \{\bigvee X \mid X \subseteq G(\tau_{ji} \mid i,j \in I)\}$ et définir $\alpha : P \to T$ par $\alpha p := (\alpha_i p)_{i\in I}$ pour tout $p \in P$.

Alors, (T,α) est un P-treillis complet, et $\widetilde{(T,\alpha)}$ est le supremum des $\widetilde{(T_i,\alpha_i)}$ $(i \in I)$; c'est-à-dire que T est l'unique produit sous-direct des T_i $(i \in I)$ engendré par αP.

On illustrera cette méthode par un exemple avec deux $\{1,2,3,4\}$ - treillis :

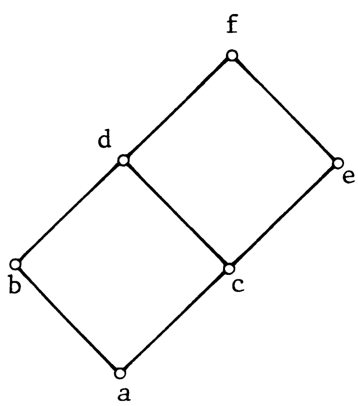
T_1:



α_1:

1	2	3	4
b	c	c	d

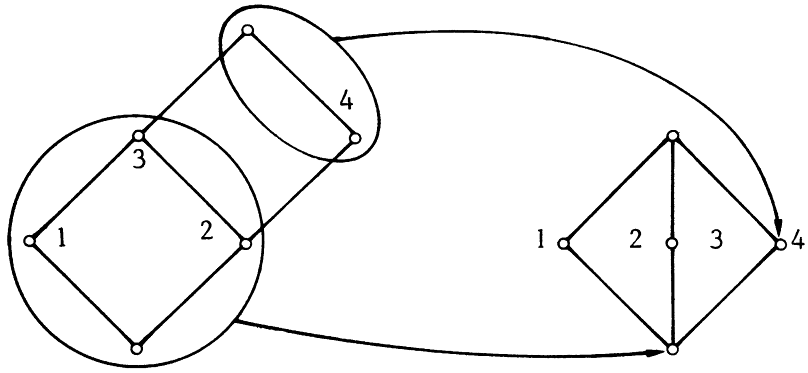
T_2:



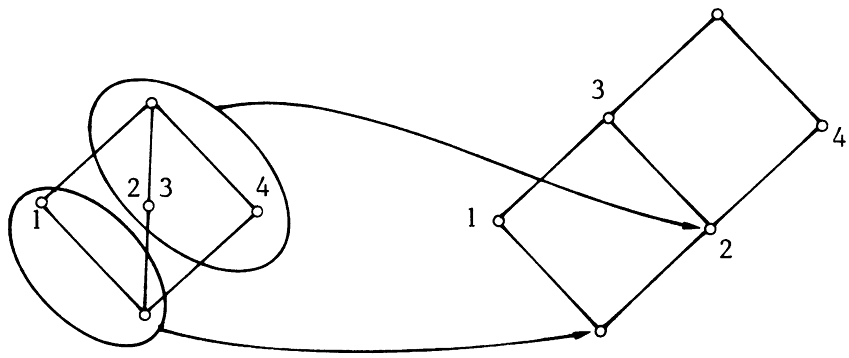
α_2:

1	2	3	4
b	c	d	e

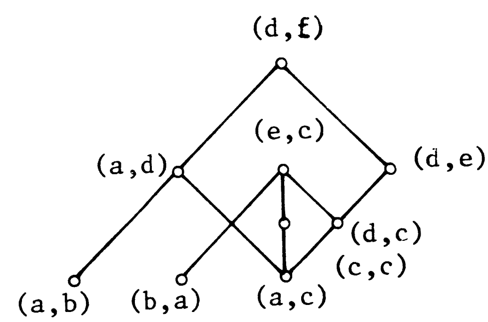
τ_{12}:



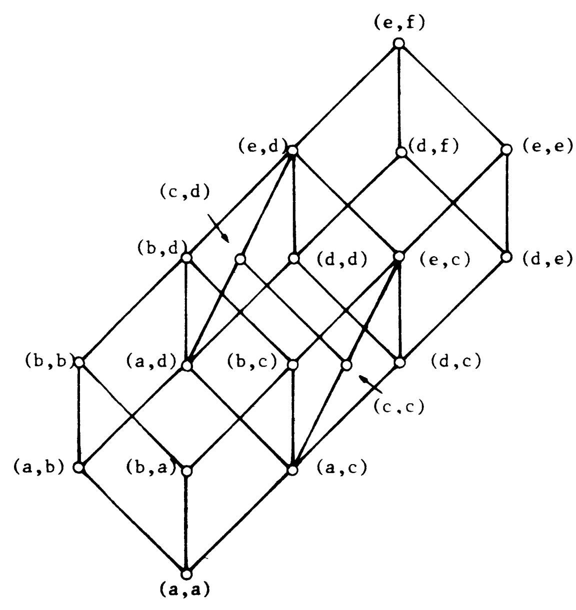
τ_{21}:



$G(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22})$:



$T := \langle G(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}) \rangle$:



3. FUSION DES CONTEXTES

Pour fusionner, on peut supposer qu'on a des contextes $\Gamma_s := (G,M,I_s)$ $(s \in S)$ (v. paragraphe 1). On définit, pour éviter des ambiguités,

$$A^s := \{m \in M \mid gI_s m \text{ pour tout } g \in A\} \quad (A \subseteq G),$$
$$B^s := \{g \in G \mid gI_s m \text{ pour tout } m \in B\} \quad (B \subseteq M).$$

Soit $P := G \cup M$, et soient $\alpha_s g := (\{g\}^{ss}, \{g\}^s)$ pour $g \in G$ et $\alpha_s m := (\{m\}^s, \{m\}^{ss})$ pour $m \in M$ $(s \in S)$. Alors, $(\underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s), \alpha_s)$ $(s \in S)$ sont des P-treillis complets en vertu du théorème 1.2. D'après le théorème 2.2., on peut les fusionner par le supremum en un P-treillis complet (T,α). On construira maintenant un contexte dont le treillis de concepts est isomorphe à T. Pour cela on utilisera les V-morphismes $\mathfrak{S}_{sr}: \underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_r) \to \underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s)$ $(r,s \in S)$ analogues à ceux discutés au paragraphe 2, où $\mathfrak{S}_{sr}$ est le plus grand des V-morphismes $\mathfrak{S}: \underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_r) \to \underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s)$ avec $\mathfrak{S}_{sr}\alpha_r p \leq \alpha_s p$ pour tout $p \in P$. Pour toute paire $r,s \in S$, on définit une relation I_{rs} entre $G\times\{r\}$ et $M\times\{s\}$ par

$$(g,r)\ I_{rs}(m,s) :\Longleftrightarrow \mathfrak{S}_{sr}\alpha_r g \leq \alpha_s m.$$

Comme $\mathfrak{S}_{ss}$ est l'identité de $\underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s)$, on a $(g,s)\ I_{ss}(m,s) \Longleftrightarrow gI_s m$.

Alors, le *contexte fusionné* des $\Gamma_s (s \in S)$, noté $\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s$, est le triplet $(G \times S, M \times S, \bigcup_{r,s\in S} I_{rs})$; de plus, pour tout $g \in G$, on pose αg concept de $\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s$ avec l'extension $\{(g,s) \mid s \in S\}''$ et, pour tout $m \in M$, on pose αm concept de $\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s$ avec la compréhension $\{(m,s) \mid s \in S\}''$.

THEOREME 3.1.

$(\underline{\mathfrak{B}}(\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s), \alpha)$ est un P-treillis complet qui est un représentant du supremum des $\widehat{(\underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s), \alpha_s)}$ $(s \in S)$; si τ_r est le P-morphisme de $(\underline{\mathfrak{B}}(\bigcirc_{s\in S}\Gamma_s),\alpha)$ dans $(\underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_r),\alpha_r)$ et $\tau_r(A,B) = (C,D)$, alors $A \cap (G \times \{r\}) = C \times \{r\}$ et $B \cap (M \times \{r\}) = D \times \{r\}$.

Démonstration. Soit T le produit sous-direct des $\underline{\mathfrak{B}}(\Gamma_s)$ $(s \in S)$ construit par la famille $(\mathfrak{S}_{sr})_{r,s\in S}$ comme dans le paragraphe 2. On définit

$\gamma : G \times S \to T$ par $\gamma(g,r) := (\mathfrak{S}_{sr}\alpha_r g)_{s\in S}$ pour tout $g \in G$ et $r \in S$.

Comme $\alpha_r m = \bigvee \{\alpha_r g \mid gI_r m\}$ pour tout $m \in M$, l'image de γ est supremum-dense dans T d'après la proposition 2.5. T pourra aussi être construit dualement par des Λ-morphismes $\mathfrak{S}^{sr}$ $(r,s \in S)$ ce qui définira l'application $\mu : M \times S \to T$ avec $\mu(m,r) = (\mathfrak{S}^{sr}\alpha_r m)_{s\in S}$ dont l'image est infimum-dense dans T. Si l'on prouve $(g,r)\ I_{rs}(m,s) \Longleftrightarrow \gamma(g,r) \leqslant \mu(m,s)$, on aura un isomorphisme Ψ de T sur $\underline{\mathfrak{L}}\,(\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s)$ avec $\Psi\gamma(g,r) = (\{(g,r)\}'',\{(g,r)\}')$ resp. $\Psi\mu(m,s) = (\{(m,s)\}',\{(m,s)\}'')$ en vertu du théorème 1.2. $\gamma(g,r) \leqslant \mu(m,s)$, c'est-à-dire $(\sigma_{qr}\alpha_r g)_{q\in S} \leqslant (\sigma^{qs}\alpha_s m)_{q\in S}$, implique immédiatement $\sigma_{sr}\alpha_r g \leqslant \sigma^{ss}\alpha_s m = \alpha_s m$, d'où $(g,r)I_{rs}(m,s)$. Par contre, $\sigma_{sr}\alpha_r g \leqslant \alpha_s m$ entraine, à cause de la proposition 2.6., et en notant σ_q la projection de T sur $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma_q)$ $(q \in S)$ et $\overline{\sigma}_q x := \bigvee \sigma_q^{-1} x$ $(x \in \underline{\mathfrak{L}}\,(\Gamma_q))$, $\overline{\sigma}_s\alpha_s m \geqslant \overline{\sigma}_s\sigma_s\underline{\sigma}_r\alpha_r g \geqslant \underline{\sigma}_r\alpha_r g$; on en déduit $\sigma^{qs}\alpha_s m = \sigma_q\overline{\sigma}_s\alpha_s m \geqslant \sigma_q\underline{\sigma}_r\alpha_r g = \sigma_{qr}\alpha_r q$ pour tout $q \in S$; c'est-à-dire

$\mu(m,s) \geqslant \gamma(g,r)$. Alors, l'isomorphisme Ψ fait correspondre aux générateurs de T des générateurs de $\underline{\mathfrak{L}}(\bigcirc_{s\in S} \Gamma_s)$; en particulier, $\Psi(\alpha_s g)_{s\in S} = \bigvee_{s\in S} \Psi\gamma(g,s) = \alpha g$

pour tout $g \in G$ resp. $\Psi(\alpha_s m)_{s\in S} = \bigwedge_{s\in S} \Psi\mu(m,s) = \alpha m$ pour tout $m \in M$. Cela

achève la démonstration de la première assertion du théorème. Comme $\sigma_r = \tau_r\Psi$, on a $(g,r) \in A \Longleftrightarrow \Psi\gamma(g,r) \leqslant (A,B) \Longleftrightarrow \underline{\sigma}_r\alpha_r g = (\sigma_{sr}\alpha_r g)_{s\in S} \leqslant \Psi^{-1}(A,B) \Longleftrightarrow \alpha_r g \leqslant (C,D) \Longleftrightarrow g \in C$; donc $A \cap (G \times \{r\}) = C \times \{r\}$, et dualement $B \cap (M \times \{r\}) = D \times \{r\}$.

Le théorème justifie le terme de contexte fusionné. Mais il pourra être incommode de travailler avec cette définition. Il faut une méthode pour déterminer la relation I_{rs} sans avoir à connaitre les treillis de concepts $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma_r)$ et $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma_s)$. Pour cela on analysera la connexion générale entre les $\vee$-resp. $\wedge$-morphismes de $\underline{\mathfrak{L}}(G_1,M_1,I_1)$ dans $\underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$ et les relations $I \subseteq G_1 \times M_2$. On appellera I une *liaison* de (G_1,M_1,I_1) vers (G_2,M_2,I_2) lorsque pour tout $g \in G_1$, $\{m \in M_2 | gIm\}$ est une compréhension de (G_2,M_2,I_2) et, pour tout $m \in M_2$, $\{g \in G_1 | gIm\}$ est une extension de (G_1,M_1,I_1). On utilisera les abréviations $A^2 := \{m \in M_2 | gIm \text{ pour tout } g \in A\}$ $(A \subseteq G_1)$ et $B^1 := \{g \in G_1 | gIm \text{ pour tout } m \in B\}$ $(B \subseteq M_2)$.

PROPOSITION 3.2. Pour $I \subseteq G_1 \times M_2$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) I est une liaison de (G_1,M_1,I_1) vers (G_2,M_2,I_2).

(ii) L'application σ_I définie par $\sigma_I(A,B) := (A^{22},A^2)$ pour tout $(A,B) \in \underline{\mathfrak{L}}\,(G_1,M_1,I_1)$ est un $\vee$-morphisme de $\underline{\mathfrak{L}}(G_1,M_1,I_1)$ dans $\underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$, et $\{g\}^{112} = \{g\}^2$ pour tout $g \in G_1$.

(iii) L'application σ^I définie par $\sigma^I(A,B) := (B^1,B^{11})$ pour tout $(A,B) \in \underline{\mathfrak{L}}\,(G_2,M_2,I_2)$ est un $\wedge$-morphisme de $\underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$ dans $\underline{\mathfrak{L}}(G_1,M_1,I_1)$, et $\{m\}^{221} = \{m\}^1$ pour tout $m \in M_2$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $A^2 = \bigcap_{g \in A} \{g\}^2$ implique $A^{222} = A^2$ parce que les $\{g\}^2$ $(g \in G_1)$ sont des compréhensions de (G_2,M_2,I_2) ; donc $(A^{22},A^2) \in \underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$. Soient $(A_k,B_k) \in \underline{\mathfrak{L}}(G_1,M_1,I_1)$ $(k \in K)$. Comme σ_I est isotone, $\sigma_I \bigvee_{k \in K} (A_k,B_k) \geqslant \bigvee_{k\in K} \sigma_I (A_k,B_k)$; c'est-à-dire $(\bigcap_{k \in K} B_k)^{12} \subseteq \bigcap_{k \in K} A_k^2$. Soit $m \in \bigcap_{k \in K} A_k^2$; alors $A_k \subseteq \{m\}^1$ pour tout $k \in K$ et, d'après la proposition 1.1., $\bigcap_{k \in K} B_k \supseteq \{m\}^{11}$. Comme $\{m\}^1$ est une extension de (G_1,M_1,I_1), on a $(\bigcap_{k\in K} B_k)^1 \subseteq \{m\}^{111} = \{m\}^1$, d'où $m \in \{m\}^{12} \subseteq (\bigcap_{k \in K} B_k)^{12}$. On obtient donc $(\bigcap_{k\in K} B_k)^{12} = \bigcap_{k \in K} A_k^2$, c'est-à-dire que σ_I est un V-morphisme de $\underline{\mathfrak{L}}(G_1,M_1,I_1)$ dans $\underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$. Soit $g \in G_1$; il est clair que $\{g\}^{112} \subseteq \{g\}^2$. Pour $m \in \{g\}^2$, l'extension $\{m\}^1$ contient $\{g\}^{11}$, donc $m \in \{g\}^{112}$, et l'on a bien $\{g\}^{112} = \{g\}^2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Comme $\sigma_I(\{g\}^{11}, \{g\}^1) \in \underline{\mathfrak{L}}(G_2,M_2,I_2)$, $\{g\}^{112} = \{g\}^2$ implique que $\{g\}^2$ est une compréhension de (G_2,M_2,I_2) pour tout $g \in G_1$. Soit $m \in M_2$. En utilisant $\{m\}^{11} = \bigcap_{g \in \{m\}^1} \{g\}^1$, on déduit $\{m\}^{1112} = (\bigcap_{g\in\{m\}^1} \{g\}^1)^{12}$ $= \bigcap_{g\in\{m\}^1} \{g\}^{112} = \bigcap_{g \in \{m\}^1} \{g\}^2$; donc $m \in \{m\}^{1112}$ et $\{m\}^1 \supset \{m\}^{111}$. Alors $\{m\}^1$ est une extension de (G_1,M_1,I_1).

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) se montre dualement.

PROPOSITION 3.3.
Les liaisons de (G_1,M_1,I_1) vers (G_2,M_2,I_2) sont stables pour l'intersection.

Démonstration.
Soient I_r $(r \in R)$ des liaisons de (G_1,M_1,I_1) vers (G_2,M_2,I_2). Pour $g \in G$, on a $\{m \in M_2 | g\ (\bigcap_{r\in R} I_r) m\} = \bigcap_{r \in R} \{m \in M_2 | g I_r m\}$; donc $\{m \in M_2 | g(\bigcap_{r\in R} I_r) m\}$ est une compréhension de (G_2,M_2,I_2) car l'intersection des compréhensions est aussi une compréhension. Dualement, pour $m \in M_2$, $\{g \in G_1 | g(\bigcap_{r \in R})\ I_r) m\}$ est une extension de (G_1,M_1, I_1).

THEOREME 3.4. Soit $(G \times S, M \times S, \bigcup_{r,s \in S} I_{rs})$ le contexte fusionné des contextes $\Gamma_s := (G,M,I_s)$. Alors, pour tout $s \in S$, $(g,s)\ I_{ss}\ (m,s) \Longleftrightarrow g\ I_s\ m$ et, pour toute paire $r,s \in S$, I_{rs} est la plus petite des liaisons I de

$(G \times \{r\}, M \times \{r\}, I_{rr})$ vers $(G \times \{s\}, M \times \{s\}, I_{ss})$ satisfaisant la condition suivante :

$$(*) \quad (g,r)\ I\ (m,s) \text{ si } gI_r m \text{ ou } gI_s m.$$

Démonstration. La première assertion est évidente. Soit $r,s \in S$, et soit $\mathcal{J}$ l'intersection de toutes les liaisons I de $(G \times \{r\}, M \times \{r\}, I_{rr})$ vers $(G \times \{s\}, M \times \{s\}, I_{ss})$ satisfaisant la condition (*). D'après la proposition 3.3., $\mathcal{J}$ est aussi une liaison, qui satisfait (*). En vertu de la proposition 3.2., un V-morphisme σ de $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma_r)$ dans $\underline{\mathfrak{L}}(\Gamma_s)$ est donné par $\sigma(A,B) = (C,D) :\, = \Longleftrightarrow$ $\sigma\,(A \times \{r\}, B \times \{r\}) = (C \times \{s\}, D \times \{s\})$.

Comme $gI_s m$ implique $(g,r)\ \mathcal{J}\ (m,s)$ à cause de (*), on a $\sigma\alpha_r g \leqslant \bigwedge \{\alpha_s m \mid gI_s m\} = \alpha_s g$. Pour $m \in M$, on a $(g,r)\ \mathcal{J}\ (m,s)$ pour tout $g \in \{m\}^r$ à cause de (*), d'où $\sigma\alpha_r m \leqslant \alpha_s m$. On a donc prouvé que $\sigma \leqslant \sigma_{sr}$. En conséquence, pour tout $g \in G$, $\{m \in M \mid (g,r)\ \mathcal{J}\ (m,s)\} \supseteq \{m \in M \mid (g,r)\ I_{rs}\ (m,s)\}$; donc $I_{rs} \subseteq \mathcal{J}$. Comme $\sigma_{sr}(A,B) = (C,D) \Longleftrightarrow \sigma_{I_{sr}}\ (A \times \{r\}, B \times \{r\}) = (C \times \{s\}, B \times \{s\}$, en vertu de la proposition 3.2., I_{rs} est une liaison de $(G \times \{r\}, M \times \{r\}, I_{rr})$ vers $(G \times \{s\}, M \times \{s\}, I_{ss})$. On vérifie aisément que I_{rs} satisfait (*). Donc $I_{rs} = \mathcal{J}$ ce qui achève la démonstration.

Finalement, on illustrera la fusion des contextes par un exemple simple. Imaginons que les participants d'un colloque soient interrogés sur leurs préférences quant aux langues, et que l'on ait obtenu les réponses suivantes :

1. Français	1. Anglais	1. Anglais	1. Allemand
2. Anglais	2. Français	2. Allemand	2. Anglais
3. Allemand	3. Allemand	3. Français	3. Français

On pourra les représenter par les contextes suivants (des échelles de Guttman) :

a	1	2	3
Français	×		
Anglais	×	×	
Allemand	×	×	×

b	1	2	3
Français	×	×	
Anglais	×		
Allemand	×	×	×

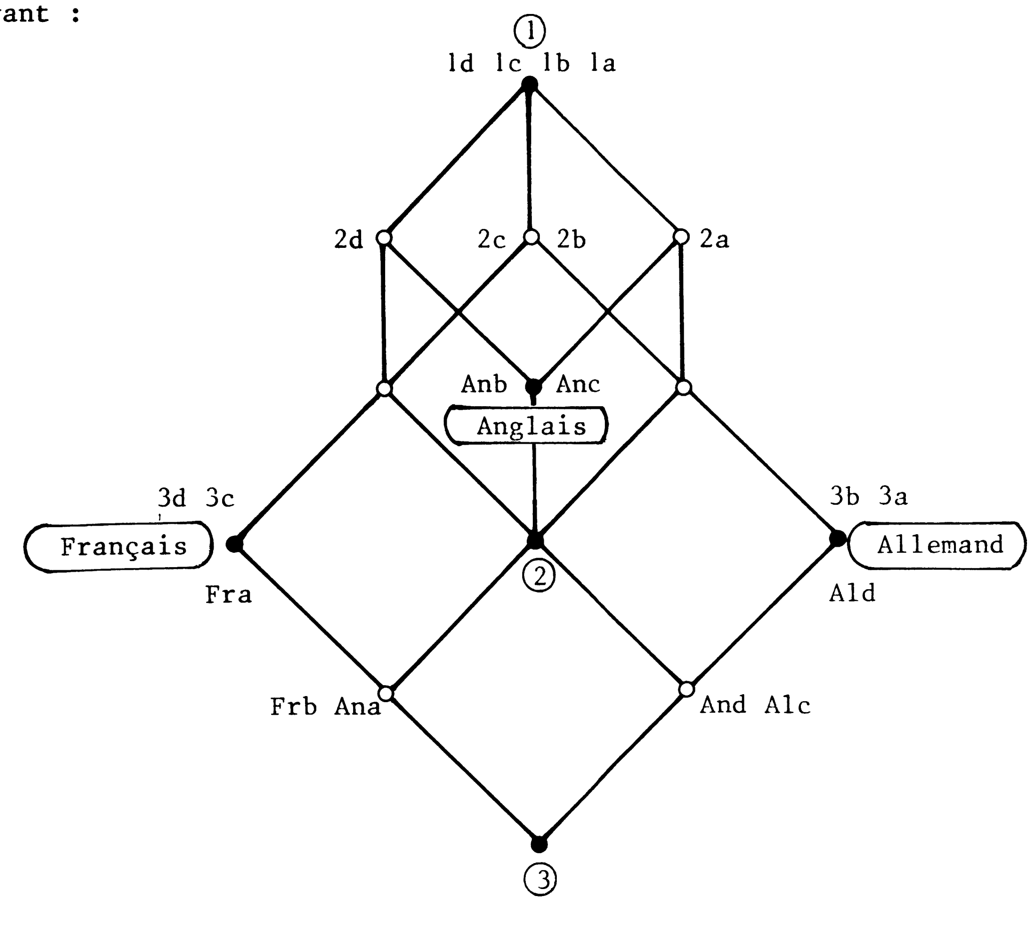
c	1	2	3
Français	×	×	×
Anglais	×		
Allemand	×	×	

d	1	2	3
Français	×	×	×
Anglais	×	×	
Allemand	×		

En utilisant la caractérisation du théorème 3.4., on déduit aisément le contexte fusionné :

	1,a	2,a	3,a	1,b	2,b	3,b	1,c	2,c	3,c	1,d	2,d	3,d
Français, a	×			×	×		×	×	×	×	×	×
Anglais , a	×	×		×	×		×	×	×	×	×	×
Allemand, a	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Français, b	×	×		×	×		×	×	×	×	×	×
Anglais , b	×	×		×			×			×	×	
Allemand, b	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Français, c	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Anglais , c	×	×		×			×			×	×	
Allemand, c	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	
Français, d	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Anglais , d	×	×	×	×	×	×	×	×		×	×	
Allemand, d	×	×	×	×	×	×	×	×		×		

Le treillis de concepts du contexte fusionné a le diagramme de Hasse suivant :



Dans le diagramme, les marques encerclées indiquent les générateurs αp ($p \in P$) ; les autres marques dénotent les images $\Psi\gamma(g,r)$ resp. $\Psi\mu(m,s)$ des objets (g,r) resp. des attributs (m,s). Les P-morphismes τ_r pourront être déterminés aisément en vertu des égalités $\alpha_r = \tau_r\alpha$. Du treillis de concepts, on peut tirer l'interprétation que les participants voient les langues formant une échelle non-orientée :

Français - Anglais - Allemand

Cela rend visible une parenté entre la fusion des contextes individuels et la méthode "unfolding" (cf. Coombs [5]) que nous discuterons ailleurs. Enfin, lorsqu'on veut analyser si un contexte donné est la fusion d'autres contextes, on peut utiliser la méthode de décomposition sous-directe décrite dans Wille [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BANASCHEWSKI, "Hüllensysteme und Erweiterungen von Quasi-Ordnungen", *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, *2*(1956), 117-130.

[2] M. BARBUT, "Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique", Appendice de l'*Analyse hiérarchique* par B. Matalon, Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1965, 125-146.

[3] M. Barbut, B. Monjardet, *Ordre et Classification, algèbre et combinatoire*, tome II, Paris, Hachette, 1970.

[4] G. Birkhoff, *Lattice theory*, third edition, Providence R.I., Amer. Math. Soc., 1967.

[5] C.H. COOMBS, *A theory of data*, New York, Wiley, 1964.

[6] J. SCHMIDT, "Zur Kennzeichnung der Dedekind-MacNeilleschen Hülle einer geordneten Menge", *Arch. Math. 7* (1956), 241-249.

[7] R. WILLE, "Subdirekte Produkte und konjunkte Summen", *J. reine angew. Math.*, *239-240*, (1970), 333-338.

[8] R. WILLE, "Subdirekte Produkte vollständiger Verbände", *J. reine angew. Math.*, *283-284* (1976), 53-70.

[9] R. WILLE, "Restructuring lattice theory : an approach based on hierarchies of concepts ", *in: Ordered sets* (ed. I. Rival), Dordrecht-Boston, Reidel, 1982, 445-470.

[10] R. WILLE, "Subdirect decomposition of concept lattices", *Algebra Universalis*, à paraitre.