MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

HERMANN WEYL

Le fantôme de la modalité

Mathématiques et sciences humaines, tome 74 (1981), p. 37-60

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__74__37_0>

Math. Sci. hum. (*19*[e] année, n°74, *1981*, p.37-60)

LE FANTOME DE LA MODALITE*

Hermann WEYL**

Husserl, dans sa philosophie, a entrepris de percer à jour les fondements phénoménologiques de l'arithmétique et de la logique. Aussi, l'occasion qui se présente ici au mathématicien de faire une mise au point des tentatives de la logique symbolique pour rendre compte d'un concept aussi important que celui de *possibilité*, n'est pas hors de propos. La manipulation symbolique est neutre au regard de l'interprétation philosophique; il n'y a donc aucune raison pour qu'elle reste l'apanage des positivistes. C'est ce que pensait O.Becker lorsque, le premier, il s'attaqua à la question en combinant le calcul logique et la phénoménologie[1]. Mon essai de conjuration du fantôme évanescent de la modalité suivra un plan quelque peu différent.

I. LES ASSISES SOLIDES DE LA LOGIQUE CLASSIQUE.

La logique classique des propositions, telle qu'elle a été formalisée par G. Frege et plus tard, par Russell et Whitehead dans les *Principia Mathematica*, est fondée sur la croyance qu'une proposition met en question des faits du domaine de la réalité répondant sans ambiguïté à oui ou non, d'où il s'ensuit qu'une proposition est soit vraie soit fausse. Jusqu'à ce que paraissent les *Principia Mathematica*, tout le monde croyait, ou du moins espérait, que les propositions mathématiques étaient de cette nature, ne laissant pas

---

* Traduit de l'anglais par Françoise Colas, Laboratoire de Linguistique Formelle, Paris 7.

** 1885†1955, Ecole Polytechnique de Zürich et Université de Princeton, "The Ghost of Modality", *Philosophical Essays in Memory of Edmund Husserl*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusets, 1940, pp.278-303. Traduction littérale : Le fantôme de la modalité. (n.d.t).

1. O.Becker, "Zur Logik der Modalitäten", *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, XI (1930), 397.

de place à l'indétermination exprimée par les termes "possible", "peut-être" et autres équivalents.

Ainsi, une proposition n'a que deux valeurs de vérité : 1 (oui ou vrai) et 0 (non ou faux). Le sens de $\sim$ (non), $\cup$ (ou), $\cap$ (et), $\rightarrow$ (si..alors) est défini par les tables suivantes qui assignent une des valeurs 0 ou 1 aux propositions

(1) $\sim a, \quad a \cup b, \quad a \cap b, \quad a \rightarrow b$

lorsque la valeur de vérité des propositions arbitraires a, b est connue :

(2)

a	$\sim a$
1	0
0	1

$\sim a$
négation

$a \backslash b$	1	0
1	1	1
0	1	0

$a \cup b$
disjonction

1	0
0	0

$a \cap b$
conjonction

1	0
1	1

$a \rightarrow b$
implication

L'importance très particulière de $\rightarrow$ réside dans le fait suivant, que nous appelons *schéma d'inférence* :

(F) *Si les propositions a et $a \rightarrow b$ sont vraies, alors b est vraie.*

L'opération unaire $\sim$ et les opérations binaires $\cup$, $\cap$, $\rightarrow$ sont appelées opérations de logique élémentaire parce que les valeurs de vérité de (1) dépendent seulement des valeurs de vérité des arguments a et b. On pourrait faire l'économie de deux opérations binaires parce qu'elles peuvent s'exprimer à l'aide de la troisième et de la négation.

Les combinaisons fondamentales qui suivent sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des arguments a, b, c :

Système d'axiomes CT[2]

I (Implication)

1) $a \rightarrow (b \rightarrow a)$
2) $(a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)$
3) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$

II (Négation)

1) $(a \rightarrow b) \rightarrow (\sim b \rightarrow \sim a)$
2) $a \rightarrow \sim\sim a$
3) $\sim\sim a \rightarrow a$

---

2. Cette table est reprise de D.Hilbert et P.Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I (Berlin, 1934), 66.

III (Disjonction)

1) $a \rightarrow \cdot\, a \cup b$

2) $b \rightarrow \cdot\, a \cup b$

3) $(a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \cup b \cdot \rightarrow c))$

IV (Conjonction)

1) $a \cap b \cdot \rightarrow a$

2) $a \cap b \cdot \rightarrow b$

3) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow \cdot\, b \cap c))$

On peut regarder I et II comme les axiomes de l'implication et de la négation tandis que III et IV définissent en quelque sorte $\cup$ et $\cap$ en termes d'implication et de négation.

A la suite de von Neumann[3], on n'introduira pas de variable propositionnelle et, par conséquent, pas non plus de règle de substitution. Une formule telle que I, 1) tend plutôt à vouloir communiquer la chose suivante : Si deux propositions a et b sont données, alors on peut être sûr que la proposition $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ est vraie (sans se poser la question de la vérité de a et b). Selon la convention de Hilbert, les lettres représentant des propositions sont ici partout utilisées pour renvoyer à des "signes de communication". Sans être des objets de la théorie elle-même, elles sont utilisées pour communiquer des faits ou des directions brefs et distincts, pour la plupart d'une généralité hypothétique[4]. Dans un système complètement formalisé, les propositions seraient remplacées par des *formules* dont la description exacte est la suivante : Une formule est une séquence de symboles parmi lesquels figurent $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow$, et d'après cette description (1) est un ensemble de formules si a et b sont des formules. Les formules sont *vérifiées* à l'aide de deux types de règles qui fonctionnent ensemble : un *axiome* est établi au moyen de l'un des schémas d'axiome; une formule est dérivée à partir de deux formules déjà établies au moyen de la règle d'inférence (F). Le système CT comprend uniquement des schémas d'axiomes. Par exemple, la règle I, 1) se lit : Prendre une formule a et une formule b et les combiner en $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ qui ainsi, constitue une formule vérifiée (un axiome). Cette règle d'inférence devient opérationnelle si l'on a deux formules a et b et si a et $a \rightarrow b$ ont été vérifiées auparavant; de cette manière, on peut ensuite poser b comme formule vérifiée. Dans n'importe quelle discipline théorique concrète, les axiomes logiques I-IV constitueraient seulement une partie et probable-

---

3. *Mathematische Zeitschrift*, XXVI (1927), I.
4. L'exposé lucide et détaillé des idées fondamentales de Hilbert se trouve dans Hilbert-Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I et II (Berlin, 1934 et 1939).

ment la plus triviale de tout le système axiomatique. Dans ce jeu de construction de formules validées, la signification des formules n'a pas d'importance. Il faut distinguer clairement les formules symboliques qui n'ont pas de signification en elles-même des règles de procédure qui indiquent comment traiter le matériel symbolique et qui doivent être comprises par quiconque les applique. Dans un certain sens bien défini, le système CT est complet.

Peut-être que Russell a joué de malchance et créé des malentendus en appelant l'opérateur $\rightarrow$ implication. L'implication exprimée par le premier antécédent du syllogisme :

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme

Socrate est mortel

établit que

$$x \text{ est homme} \rightarrow x \text{ est mortel}$$

est vraie pour *tout* individu x. Nous sommes ici en présence de fonctions propositionnelles ou prédicats $U(x)$ référant à un élément arbitraire x d'un certain "champ" ou "espace" ω d'individus ou "points". Par exemple, x peut parcourir l'ensemble des nombres entiers ou l'ensemble des points d'un espace géométrique. Si l'on choisit l'espace des phases d'un système physique, alors l'argument x indique une phase ou état de ce système. La connaissance complète d'un point x consistera à connaître sa position; toute forme de connaissance incomplète, à savoir qu'il se situe dans une certaine région α de l'espace ω. Les régions ou "ensembles" α correspondent alors aux prédicats possibles $U(x)$ concernant un point variable x de ω; α est l'*extension* de $U(x)$ englobant tout point x pour lequel $U(x)$ est vrai. Les opérateurs logiques $\sim$, $\cup$, $\cap$, $\rightarrow$ s'appliquent aux fonctions propositionnelles et peuvent être interprétés comme des opérateurs opérant sur les ensembles correspondants. Les trois premiers sont alors appelés, respectivement, passage au complémentaire, jonction (ou union) et conjonction (ou intersection). $\alpha \rightarrow \beta$ est la jonction de β et du complémentaire de α. Ce n'est donc pas à cette opération, mais plutôt à la relation :

$$\alpha \subset \beta, \quad \alpha \text{ est contenu dans } \beta,$$

que revient le nom d'implication. La règle d'inférence (F) se lit ici :

(F) Si un point p appartient à α et à $\alpha \rightarrow \beta$, alors p appartient à β

tandis que le *syllogisme* dit :

(S) Si p appartient à α et α est contenu dans β, alors p appartient à β.

Le lien est fourni par le fait :

($\overline{F}$) $\alpha \subset \beta$ établit que l'ensemble $\alpha \to \beta$ est l'espace entier ω.

(F) donne la réponse la plus complète à la question suivante : quelle quantité d'information supplémentaire faut-il avoir sur le point p de α pour être sûr qu'il appartienne à β? Assurément $\alpha \to \beta$ est le *plus grand* ensemble γ dont la partie commune avec α est contenue dans β; i.e., toute région telle que γ construite de cette manière là est contenue dans $\alpha \to \beta$.

Il en va de même pour le lien entre l'*opérateur* $\to$ et la *relation* $\subset$. Le calcul des sous-ensembles d'un espace ω satisfait aux axiomes du système CT dans le sens où chaque formule du Système représente l'espace entier ω quels que soient les sous-ensembles a, b, c. Pour un grand nombre de raisons, il est plus commode de poser les axiomes des ensembles à l'aide des opérations $\sim$, $\cup$, $\cap$. Les axiomes peuvent alors traiter d'une classe d'objets appelés ensembles, de deux ensembles particuliers (l'ensemble vide o et l'espace total ω) et des trois opérations $\sim$, $\cup$, $\cap$. Le signe = désigne l'identité. L'organisation du Système CS met à jour une dualité inhérente selon laquelle les axiomes de la colonne de droite découlent de ceux de la colonne de gauche et vice-versa par application de l'involution $\sim$.

Système CS

$$\sim\sim\alpha = \alpha$$

$\sim o = \omega$	$\sim \omega = o$
$\sim(\alpha \cap \beta) = (\sim\alpha) \cup (\sim\beta)$	$\sim(\alpha \cup \beta) = (\sim\alpha) \cap (\sim\beta)$
$\alpha \cup o = \alpha$	$\alpha \cap \omega = \alpha$
$\alpha \cap o = o$	$\alpha \cup \omega = \omega$
$\alpha \cup (\sim\alpha) = \omega$	$\alpha \cap (\sim\alpha) = o$
$\alpha \cap \beta = \beta \cap \alpha$	$\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$
$(\alpha \cap \beta) \cap \gamma = \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$	$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$
$\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$	$\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)$

Ces axiomes sont vrais pour tout ensemble α, β, γ. Si l'on veut interpréter = non pas comme l'identité logique mais comme une relation matérielle entre des ensembles qui entrent dans la composition des axiomes au même niveau que $\sim$, $\cup$, $\cap$, il faut ajouter les axiomes exprimant la réflexivité, la symétrie et la transitivité de = et poser que pour des ensembles α, α', β, β' tels que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ on a les équations :

$$\sim\alpha = \alpha', \quad \alpha \cap \beta = \alpha' \cap \beta', \quad \alpha \cup \beta = \alpha' \cup \beta'$$

Il ne serait pas hors de propos d'introduire $\alpha \subset \beta$ (α est contenu dans β) comme relation fondamentale à côté de =, mais ce $\subset$ pourrait aussi être défini par l'une ou l'autre des équations :

$$\alpha \cap \beta = \alpha \qquad \alpha \cup \beta = \beta \tag{3}$$

leur équivalence se déduisant des axiomes CS. C'est de là aussi que se tire le fait que la relation $\alpha \subset \beta$ définie par (3) obéit aux lois suivantes :

$$\alpha \subset \alpha \qquad (\alpha \cap \beta) \subset \alpha \qquad \alpha \subset (\alpha \cup \beta)$$
$$\text{si } \alpha \subset \beta, \quad \beta \subset \gamma, \quad \text{alors } \alpha \subset \gamma$$

Jusque là, les axiomes traitent seulement d'une classe d'objets, à savoir, des ensembles[5]. Les points et leurs relations aux ensembles peuvent être introduits sans inconvénient en posant le fait qu'un point x appartient ou pas à un ensemble ξ tel que :

$$(\xi;\ x) = 1 \qquad \text{ou} \qquad (\xi;\ x) = 0 \tag{4}$$

respectivement. On aura alors certains axiomes relatifs à la fonction universelle* $(\xi;\ x)$ qui ne peut prendre que les deux valeurs de vérité 1 ou 0 et dont les arguments ξ et x parcourent respectivement des ensembles d'ensembles et des ensembles de points. Par exemple, les équations :

$$(o;\ p) = 0, \qquad (\omega;\ p) = 1$$

sont vraies pour tout point p. La caractéristique la plus importante de ce calcul est que :

$$(\sim\alpha;\ p), \qquad (\alpha \cap \beta;\ p), \qquad (\alpha \cup \beta;\ p)$$

sont uniquement déterminées par les valeurs $(\alpha;\ p)$ et $(\beta;\ p)$, c'est-à-dire

---

5. Si l'on note $\alpha+\beta$ l'ensemble restant après avoir enlevé $\alpha\cap\beta$ de $\alpha\cup\beta$ et $\alpha\cdot\beta$ l'intersection $\alpha\cap\beta$, on a affaire à un *anneau* au sens algébrique ordinaire (algèbre booléenne) où tout élément α satisfait les conditions $\alpha\cdot\alpha = \alpha$, $\alpha+\alpha = 0$. Voir B.A.Bernstein, *Transactions of the American Mathematical Society*, XXVI (1924), 171. Notre système d'axiomes est loin de caractériser ses objets comme (tous) les ensembles d'un certain espace de points. Cette distance est mise à jour dans l'étude approfondie de M.H.Stone sur les algèbres booléennes parue dans *Transactions of the American Mathematical Society*, XL (1936), 37-111. Les études générales sur la nature de l'axiomatique, quand elles sont si profondément "existentielles" n'ont pratiquement aucune influence sur les fondements épistémologiques qui sont en jeu. En mathématique, il faut les accepter car jusqu'à ce que la question des fondements des mathématiques soit stabilisée -si jamais cela arrive-, rien d'autre que l'autoritarisme arbitraire ne pourra tracer de frontière entre la bonne et la mauvaise activité mathématique, d'autant que le coût en science et en art -de même qu'en politique- est très élevé.

* C'est-à-dire, la fonction caractéristique (n.d.t).

à partir des tables (2) pour $\sim$, $\cap$, $\cup$.

On peut passer des prédicats et ensembles à un argument aux prédicats et ensembles à deux ou plusieurs arguments (relations) par le moyen classique de formation des paires, triplés, etc., (ordonnés). Si les points x, x' parcourent les espaces ω, ω' respectivement, alors la paire (x, x') parcourt ce que l'on appelle l'espace-produit $\omega \times \omega'$.

II. APPARITION DU PROBLEME MODAL*.

La première tentative sérieuse pour ouvrir la voie à une logique modale après le blocage provoqué par les *Principia Mathematica*, a été faite par C.I. Lewis avec le système de l'implication stricte[6]. Lewis ne vit pas dans l' "implication matérielle" $\rightarrow$ de Russell le point d'articulation d'une inférence valide. Pour Russell, l'assertion :

(César est vivant) $\rightarrow$ (la lune est en fromage vert)

est valide. A quoi Lewis objecte : "Mais supposer qu'il soit faux que César soit mort n'obligerait personne à supposer que la lune est en fromage vert". Peut-être, mais il n'est certainement pas faux d'introduire selon (2) l'opérateur logique élémentaire $\rightarrow$ et de poser le fait fondamental (F). De plus, l'implication au sens traditionnel du syllogisme signifie l'existence de la relation $\alpha \subset \beta$ entre les prédicats ou les ensembles α, β et je ne vois rien qui puisse démentir l'analyse de $\subset$ en termes de $\rightarrow$ et de "tout" telle qu'elle est réglée par $(\overline{F})$ -quel que soit le nom donné à l'opérateur d'ensembles $\rightarrow$.

Voici encore deux autres critiques de Lewis à propos de $\rightarrow$. Il trouve que cette implication n'est pas suffisante pour étayer une preuve indirecte car "une hypothèse dont la vérité est problématique a des conséquences logiques indépendantes de sa vérité ou de sa fausseté". Et il en arrive à la conclusion que "non seulement le calcul de l'implication [matérielle] contient de faux théorèmes, mais qu'aucun des théorèmes ne sont prouvés parce qu'ils sont impliqués par les postulats au sens où le système entend le terme "impliquer"... Les hypothèses, par exemple celles des Principia Mathematica, impliquent les théorèmes dans le même sens qu'une proposition fausse implique n'importe quoi". Je crois que cet argument a manifestement perdu tout

---

* Le titre original est "The Ghost's diffuse apparition", soit, littéralement : l'apparition diffuse du fantôme (n.d.t).

6. Se reporter ici à C.I.Lewis et C.H.Langford, *Symbolic Logic* (New York, (1929). La logique d'Aristote traite en détail des modes obliques. Un des prédécesseurs de C.I.Lewis fut Hugh MacColl avec *La logique symbolique et ses applications* (Londres 1906).

pouvoir par la claire distinction qui est faite entre les formules du système dans lequel le symbole → apparaît et les règles de procédure incluant la règle d'inférence (F), règle qui préside au jeu de déduction. "La validité de l'inférence" est établie par ma propre manipulation des formules à l'aide de règles dont je comprends le fonctionnement tandis que → fait partie des formules qui n'ont pas de sens. Ainsi la distinction faite par Hilbert entre mathématique et métamathématique semble contenir une formulation plus complète et plus radicale que celle de Lewis lorsqu'il oppose implication matérielle et implication stricte.

Lewis lui-même soutient que l'implication stricte ou vraie exprime la *nécessité* de $a \rightarrow b$ et de ce fait il a recours à la corrélation modale entre les idées de nécessité et d'impossibilité. (L'impossibilité de a est l'équivalent de la nécessité de $\sim a$). A la lumière de cette remarque, la nécessité -terme enveloppé d'ambiguités et de doutes- pourrait être interprétée comme une *déductibilité* : lorsque je pose le signe $\vdash$ de l'assertion devant une formule a, je veux transmettre par là le fait historique que *j'ai réussi* à dériver a à l'aide des règles du jeu. Cependant, cette assertion ou nécessité est relative aux axiomes à partir desquels la formule a été dérivée. A l'intérieur même des mathématiques on peut déjà parler de plusieurs degrés de nécessité mathématique selon les axiomes que l'on admet en partant des axiomes logiques élémentaires du Système CT (nécessité "analytique") puis en ajoutant les uns après les autres les axiomes de la logique transcendantale, puis ceux de l'arithmétique et finalement ceux de la théorie des ensembles. A l'extérieur de la sphère mathématique, cette liste pourrait être prolongée. Si l'on considère, par exemples, les déclarations suivantes, faites à propos d'un train qui part de Seattle, Wash., à 10h15 (heure du Pacifique), le 18 janvier 1940 :

(1) Il arrivera et n'arrivera pas à Chicago à une certaine heure.
(2) Il arrivera à Chicago le même jour à 9h15 (heure du Pacifique).
(3) Il arrivera là 0,002 secondes après avoir quitté Seattle.
(4) Il arrivera là à 11h45 (heure du Pacifique) le même jour.

la première est logiquement impossible; la seconde est *a priori* ou *wesensgesetzlich* (Kant, Husserl) impossible, parce qu'il n'est pas dans la nature des choses que l'effet précède la cause; la troisième est physiquement impossible (si l'on considère la distance entre Seattle et Chicago), la vitesse de la lumière est une limite supérieure à toute vitesse de propagation; enfin la quatrième est présentement techniquement impossible.

Un autre point est encore plus important. L'assertion $\vdash a$, à la différence de a elle-même, n'est pas une formule du système mais une proposition ou une communication à propos de a et la conséquence de cette *metabasis* *eis allo genos** est qu'il n'est pas significatif d'appliquer à $\vdash a$ les opérateurs $\sim$, $\cup$, $\cap$ à l'intérieur du système, ni d'itérer le signe $\vdash$ de l'assertion. Ceci diffère des intentions de Lewis qui souhaite avoir deux opérateurs P, N (possible, nécessaire) qui permettent de transformer une formule en une autre formule et qui se combinent avec les autres opérateurs logiques.

Hume, dans son analyse de la causalité remplaça la déclaration qu'un événement A est *nécessairement* suivi de B -qui implique cette obscure notion de nécessité incontrôlable par l'expérience- par la déclaration, vérifiable par induction que, *où* qu'il arrive et *quel qu'en soit le moment* l'événement A est suivi de B. De la même façon, un mathématicien qui soutiendrait qu'un nombre n satisfait nécessairement l'équation :

$$n + 1 = 1 + n$$

voudrait probablement tout simplement dire que tous les nombres satisfont cette équation. Cependant, l'emploi de "tout" ne va pas sans quelque subtilité de sens. Une façon de lire les choses est de regarder cette proposition comme l'énoncé général d'un nombre infini d'équations :

$$1 + 1 = 1 + 1, \quad 2 + 1 = 1 + 2, \quad 3 + 1 = 1 + 3, \quad 4 + 1 = 1 + 4, \ \ldots$$

Le point de vue intuitionniste a des doutes sur la signification d'une telle "infinité de sommes logiques". Il interprète cette phrase comme une généralité *hypothétique*, et l'on pourrait alors défendre la thèse selon laquelle le mot "nécessairement" fait allusion à cette sorte de généralité : *Si* l'on vous donne un nombre concret n, alors vous pouvez être sûr, sans plus ample vérification, que $n + 1 = 1 + n$. Ce n'est pas une proposition qui établit un fait, cela dit quelque chose seulement si ..., c'est-à-dire ici, si l'on vous donne effectivement un nombre. Il est très audacieux de prédire quoi que ce soit de n avant de savoir ce que sera n. Quand on soulève le problème de savoir sur quoi se fonderait cette prévision, beaucoup répondent que c'est sur la perception de la nature générale des nombres. Quels que soient les mérites d'une telle référence à la nature générale des choses, notre point de vue que *nécessaire* est un mot qui convient très bien pour indiquer une généralité hypothétique par opposition à une généralité factuelle, se confirme par l'observation du fait que l'on hésite à l'utiliser aux endroits où la distinction disparaît, par exemple, dans le cas d'un ensemble fini donné par l'énumération successive de ses éléments. Pour ma part, je ne vois pas de différence essentielle entre les affirmations : "Un nombre égal à 1,

---

* Passage à une autre classe avec idée de transformation (n.d.t).

3 ou 5 est nécessairement impair" et "1 est impair, 3 est impair et 5 est impair". De quelle façon l'insertion de "nécessairement" modifie-t-elle des affirmations telles que "Trois est (nécessairement) impair", "Cette feuille de papier est (nécessairement) blanche"?

Retournons aux fondements. L'hypothèse, qui fonde la logique classique selon laquelle il n'existe qu'une alternative vrai ou faux, ne laisse aucune place au "peut-être" ou au "possiblement". Cependant, la majeure partie des affirmations de la vie quotidienne qui ont une signification vitale pour nous et nos interlocuteurs ne sont pas construites de façon aussi rigide. Une teinte donnée peut être *plus ou moins* grise et pas simplement blanche ou noire. On trouvera très arbitraire, sinon impossible, de poser des frontières précises le long d'un continuum. Les meilleurs exemples sont, de loin, ceux que l'on trouve à propos du *futur*. Une question comme : "Y aura-t-il une guerre européenne l'année prochaine?" n'entraîne de confrontation avec aucune réalité et est néanmoins discutée et jugée dès maintenant en termes de possible, vraisemblable, inévitable plutôt qu'en termes de vrai ou de faux[6a]. Cet énoncé sera, de fait, vérifiable après, mais la forme temporelle sera alors modifiée : "Y *a*-t-il *eu* une guerre européenne l'année dernière?". Nous faisons des projets en préfigurant mentalement les possibilités futures; nous prenons nos décisions après les avoir pesées, après avoir délibéré. N'importe qui conduisant une voiture doit le faire à tout moment de manière quasi-instinctive. On lutte pour un certain but; on prend certains risques; on croise certains dangers; à côté des faits nus, nous dépendons d'un certain type d'attente portant souvent les accents émotionnels de l'espoir et de la peur. On peut hésiter à parler dans ce cas de connaissance et de jugements, mais ces choses ont la structure des jugements et ont une signification vitale pour nous. (Si l'on en croit le pragmatisme, toute volonté de connaissance est portée par ce sens "vital" qui dirige nos actions). Un message tel que "Père est mort ce matin" transmet un fait brutal; un télégramme de ma soeur disant "Nous devons nous attendre au pire, viens tout de suite" n'est pas moins important en ce qui concerne mes actions bien qu'il exprime seulement une attente.

Une affirmation telle que "Cela est ainsi", par exemple, "Cette table est verte" demande aux *faits* sa justification et la réponse à qui mettrait en doute cette affirmation serait en principe "Et bien regarde!". Mais celui qui maintient que quelque chose est impossible doit répondre à la question *pourquoi*. Son affirmation en appelle aux *raisons*. Ainsi, dans l'exemple précédent m'appelant auprès de mon père malade, la conclusion que sa vie est en

---

6a. Ceci fut écrit fin 1938.

danger se tire d'abord du fait qu'il est très malade, avec tel et tel symptôme, ensuite de l'expérience médicale qui trouve son expression dans un jugement de généralité hypothétique : tel symptôme indique (fréquemment) l'approche de la mort (l'élément d'incertitude étant dû au caractère plutôt inductif que déductif des propositions).

En logique classique, il n'y a aucun doute sur le sens des combinaisons des propositions arbitraires a, b, c.. à l'aide des opérateurs $\sim$, $\cap$, $\cup$, $\rightarrow$ aussi compliquée que soit la structure et l'on a un critère de combinaison très clair qui permet de décider si telle combinaison est, d'une manière générale (analytiquement) vraie, ce critère étant que le calcul donne 1 quelle que soit la combinaison des valeurs 0,1 assignées aux arguments a,b, c.. Le flou dans lequel on se trouve avec les modes obliques P et N est encore plus frappant à travers les nombreuses hésitations que l'on rencontre dans la formulation des axiomes qui gouverne leur usage. On est sûr de leur corrélation telle qu'elle est exprimée par la double implication :

(5) $$\sim Pa \Leftrightarrow N \sim a$$

De plus :

(6) $$a \rightarrow Pa \quad \text{et} \quad Na \rightarrow a$$

On peut même être d'accord avec le principe :

(7) $$N(a \rightarrow b) \rightarrow (Na \rightarrow Nb)$$

"Si a implique nécessairement b et a est nécessaire, alors b est nécessaire" Mais les doutes commencent avec les itérations : Est-il vrai que

(8) $$PPa \rightarrow Pa$$

ou même que

(9) $$Pa \rightarrow NPa?$$

Le dernier axiome voudrait dire que les déclarations à propos de la possibilité ou de l'impossibilité ne peuvent pas être soumises à des gradations modales mais sont soit impossibles, soit nécessaires. Et plus on approfondit, plus on a l'impression de se mouvoir parmi les ombres. Le seul chemin raisonnable sera d'examiner les "modèles" importants où il ne subsiste aucun doute sur le sens de P et N et où ces opérations se combinent librement et sans ambiguïté avec $\sim$, $\cap$, $\cup$ et entre elles. Si, dans plusieurs de ces différents modèles nous rencontrons le même ensemble complet d'axiomes, alors nous aurons quelque raison de croire à l'utilité d'une logique modale universelle. Dans le cas contraire, nos espoirs auront été vains. C'est ce à quoi vont être consacrées les sections III et VI.

III. PREMIER ESSAI DE STABILISATION : LE MODELE DES PROBABILITES*

Dans le meilleur des cas, la vraisemblance sera un problème de *mesure de probabilité*[7]. Dans le calcul des probabilités, on assigne à une proposition ou à un "événement" $\mathfrak{a}$ une probabilité a qui peut être un nombre quelconque compris entre 0 et 1 : $0 \leqq a \leqq 1$ plutôt qu'une valeur de vérité 0 ou 1. La probabilité de l'événement "$\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$" peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et $\min(a, b)$. Une lettre italique a, b, .. indique ici la probabilité de l'événement correspondant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..;

$$\min(a, b), \quad \max(a, b)$$

sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur des deux nombres a et b. Pour avoir un calcul rigoureux des probabilités pour lesquelles les valeurs de :

$$\sim \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$$

sont déterminées par celles de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, on s'accorde sur les définitions suivantes, en termes de valeurs de probabilité :

(10)

Proposition	$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$	$\sim \mathfrak{a}$,	$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$,	$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$
Valeur	a, b	$1 - a$,	$\min(a, b)$,	$\max(a, b)$

Supposons que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ indique la relation $a \leqq b$ ("$\mathfrak{b}$ est un pari au moins aussi valable que $\mathfrak{a}$"). Est-ce que ceci peut, par analogie avec $(\overline{\text{F}})$, être exprimé à l'aide de l'opérateur $\rightarrow$ en disant que $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ prend la valeur 1? On devrait alors s'attendre à ce que $\rightarrow$ joue, dans le calcul des probabilités le même rôle que son synonyme dans le calcul des valeurs de vérité. $a \leqq b$ est équivalent à :

$$\min(a, b) = a \quad \text{ou} \quad a - \min(a, b) = 0$$

La partie gauche de la dernière équation est bien une "fonction de probabilité", c'est-à-dire une fonction dont la valeur et les arguments s'ordonnent dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Nous nous risquerons donc à compléter la table par la convention suivante :

(11)

Proposition	$\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$
Valeur	$1 - a + \min(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$

Ce calcul n'impose pas que les valeurs s'ordonnent nécessairement entièrement dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. N'importe quel sous-ensemble fermé

---

* "First Attempt to stay the Ghost : Probability", soit littéralement : Premier essai de conjuration du fantôme : les probabilités.(n.d.t).

(7) O.Becker, *op. cit.*, note 1, a tiré un très bon parti du modèle classique des boules dans l'urne en l'appliquant à la logique modale.

par rapport au remplacement de a par $1 - a$ conviendrait, par exemple, l'ensemble fini :

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$$

(n étant un entier donné 1 ou 2 ou 3 ..). C'est la logique à $(n + 1)$ valeurs de Łukasiewicz [8]. Pour $n = 1$, on retrouve le calcul des valeurs de vérité et donc les définitions (10) et (11) sont compatibles avec celles données précédemment. $n = 2$ engendre une logique tri-valente dont les valeurs 1, $\frac{1}{2}$, 0 sont interprétées comme "certainement, possiblement, certainement pas". Il est satisfaisant d'observer que le calcul des probabilités répond à tous les axiomes CT excepté I 2) au sens où les formules prennent la valeur 1 quelles que soient les valeurs des arguments a, b, c. De là on tire que l'axiome I, 2), dans ce modèle, est indépendant du reste. Par la même méthode d'évaluation on peut établir l'indépendance de chacun des axiomes logiques de cette table.

Il serait naturel de définir :

Pa prend la valeur 1 si $a > 0$, 0 si $a = 0$

Na prend la valeur 1 si $a = 1$, 0 si $a < 1$

Ceci a pour conséquence que les propositions de la forme Pa, Nb ne peuvent prendre que les deux valeurs 1, 0 et ne participent donc pas à la gradation des valeurs probables : outre (8), l'axiome (9) qui est très fort est valable.

N'importe quelle fonction de probabilité à 1, 2 ou plusieurs arguments peut servir à définir un opérateur logique élémentaire correspondant du calcul des probabilités. Les opérateurs $\sim$, $\cap$, $\cup$ sont simplement quelques opérateurs pris au hasard parmi une multitude d'autres qui peuvent être dits équivalents. Vu sous cet angle, le calcul a peu de ressemblance avec la logique; il apparaît plutôt comme un cas particulier d'une théorie des fonctions réelles. Un exemple est suffisamment important pour être mentionné : les combinaisons $a \wedge b$, $a \vee b$ de valeurs respectives $a \cdot b$, $a + b - a \cdot b$. Ces valeurs sont les probabilités de "a et b", "a ou b" dans le cas où les événements a, b sont *statistiquement indépendants*.

Ceci nous renvoie donc au fait que les probabilités de "a et b" et de "a ou b" ne sont pas véritablement déterminées par les probabilités de a et b. Par conséquent, l'ensemble du calcul a une très faible signification ex-

---

8. *Ruch filozoficzny* (Lwów), v(1920), 169; *Comptes rend. Soc. Sc. et Lett.* Varsovie, cl. III, XXIII (1930), 51.

trinsèque en dépit de ses caractéristiques mathématiques intrinsèques séduisantes[9].

IV. UN DEUXIEME ESSAI : LA TOPOLOGIE OU CALCUL EN PLUS OU MOINS*.

Parce que la localisation dans un continuum est obligatoirement imprécise, la logique des prédicats ou des ensembles, dont il a été rendu compte dans la section I, sera difficilement applicable si l'espace ω est un continuum, en particulier dans l'espace de phases d'un système physique. Aristote, discutant le paradoxe de Zénon, remarque que "le mouvement ne se meut pas en comptant.. En divisant la droite représentant le continu en deux moitiés, on fait comme si le point de division était double; on le considère à la fois comme le début et comme la fin. Mais si l'on sectionne de cette manière là, pas plus la droite que le mouvement ne sont encore du continu", et il conclut, d'une manière éclairante : "Dans le continu, il y a un nombre illimité de moitiés, mais elles sont seulement potentielles, pas réelles".

Néanmoins, la topologie ensembliste a pu, en associant à chaque point son "voisinage", manipuler de façon grossière cette structure du continu, défiant ainsi toute possibilité d'isoler un point individuel. Par exemple, dans le cas d'un plan, le voisinage d'un point x peut être n'importe quel cercle de centre x. Ainsi x est un *point intérieur* d'un ensemble donné α si tous les points d'un certain voisinage de x appartiennent encore à α; x est un *point adhérent à* α si chaque voisinage de x contient des points de α. En suivant la suggestion d'Aristote qui dit que pour un point pris sur la frontière commune à α et à son complémentaire $\sim \alpha$, l'incertitude domine quant à savoir si le point appartient à α ou à $\sim \alpha$, nous avancerons la terminologie suivante[10] : Un point x appartient *avec certitude* à l'ensemble α, si x est un point intérieur à α; x appartient *peut-être* à α s'il est un point adhérent à α. Nous introduirons alors deux opérateurs P et N pour les ensembles: $P\alpha$ est la fermeture qui consiste à prendre tous les points adhérents à α tandis que $N\alpha$ en est le coeur et consiste à prendre tous les points intérieurs de α. Et l'on a, comme on pouvait s'y attendre [v. (5), (6)] :

$$\sim P\alpha = N \sim \alpha$$

$$\alpha \subset P\alpha \quad \text{et} \quad N\alpha \subset \alpha$$

---

9. Reichenbach, *Sitzungsber. Preuss. Ak. Wissensch.* (1932), p.476, a essayé de remédier à cette déficience du calcul en introduisant un index de corrélation comme troisième argument.

* "The Second Attempt : Topology and the More or Less".

10. Voir Tang Tsao-Cheng, *Bulletin American Mathematical Society*, XLIV (1938) 737.

L'axiome (8), dans sa forme $PP\alpha \subset P\alpha$, est vrai et a fortiori :

$$PP\alpha = P\alpha, \quad N\alpha = NN\alpha$$

(P et N sont des opérateurs "idempotents"). Mais dans ce cas (9), qui était correct dans la section III, est maintenant incontestablement faux.

Voici quelques faits supplémentaires concernant les opérateurs "modaux" P et N :

i. Si $\alpha \subset \beta$, alors $P\alpha \subset P\beta$, $N\alpha \subset N\beta$

ii. $N(\alpha \cap \beta) = (N\alpha \cap N\beta)$ | $P(\alpha \cup \beta) = (P\alpha \cup P\beta)$

iii. $(N\alpha \cup N\beta) \subset N(\alpha \cup \beta)$ | $(P\alpha \cap P\beta) \supset P(\alpha \cap \beta)$

iv. $N(\alpha \cup \beta) \subset (P\alpha \cup N\beta)$

Un ensemble α est dit *ouvert* ou *fermé* selon que :

$$\alpha = N\alpha \quad \text{ou que} \quad \alpha = P\alpha$$

Les ensembles $\alpha \cup \beta$, $\alpha \cap \beta$ sont respectivement des ensembles ouverts ou fermés si α et β le sont.

Si l'on désigne l'ensemble $(\sim \alpha) \cup \beta$ par $\alpha \rightarrow \beta$ comme en section I, alors le fait iv ci-dessus est équivalent à la formule (7) :

$$N(\alpha \rightarrow \beta) \subset (N\alpha \rightarrow N\beta)$$

Tout cela est très prometteur. Cependant, avant qu'il ne soit trop tard, je suis obligé de tempérer cet enthousiasme par les trois remarques suivantes : 1) P et N sont ici des opérateurs qui fonctionnent sur des ensembles ou prédicats plutôt que sur des propositions. 2) Ils supposent un *espace topologique* et par conséquent ont une application beaucoup plus limitée que celle de la théorie générale des ensembles. Ceci tendrait à montrer que l'idée de possibilité est beaucoup plus spécifique et beaucoup plus profondément nuancée par le matériau sur lequel elle s'applique que les idées de *non*, *et*, *ou*. Les considérations des sections V et VI allant plus loin confirmeront une telle conviction. 3) Ce modèle n'apporte aucune confirmation à la théorie de la stricte implication de Lewis parce qu'il n'y a pas non plus de différence entre les deux affirmations "$\alpha \rightarrow \beta$ est l'espace entier" et "$N(\alpha \rightarrow \beta)$ est l'espace entier"; elles disent toutes le deux que α est contenu dans β.

Différents moyens ont été proposés pour reformuler cette analyse du continu de la théorie des ensembles ou, ce qui revient au même, la logique de la physique classique, de manière à éviter les questions manifestement vides de sens comme, par exemple, celle de savoir si dans un cas donné une quantité mesurable à domaine continu prend une valeur rationnelle ou irrationnelle. Une issue provenant des besoins de la mécanique statistique a été de recourir à l'identification d'ensembles dont la différence est un ensemble de mesure nulle de Lebesgue. Mais il existe une autre tentative qui se situe dans le courant de pensée d'Aristote. On admet seulement les ensembles *ouverts* α. Mais dans ce cas, le complémentaire $\sim\alpha$ n'est pas un ouvert; on le remplace alors par son noyau ouvert $N\sim\alpha$[11]. Cette solution a l'inconvénient de faire que l'union des deux ensembles est inférieure à l'espace total, il manque leur frontière commune. Ce défaut peut être pallié en considérant comme union de α et β, la fermeture $P(\alpha\cup\beta)$ ou plutôt, comme nous voulons encore un ensemble ouvert, $NP(\alpha\cup\beta)$. N'importe quel ensemble α est une partie de $NP\alpha$, l'intérieur de sa fermeture. NP est un opérateur idempotent. Nous sommes donc conduits à admettre seulement des ensembles appelés ensembles * pour lesquels $NP\alpha = \alpha$ et à adopter les définitions suivantes, qui modifient *non*, *et*, *ou* :

$$\underset{*}{\sim}\alpha = N(\sim\alpha), \qquad \alpha \underset{*}{\cap} \beta = \alpha \cap \beta, \qquad \alpha \underset{*}{\cup} \beta = NP(\alpha\cup\beta)$$

Ces opérateurs $\underset{*}{\sim}$, $\underset{*}{\cap}$, $\underset{*}{\cup}$ transforment des ensembles * en ensembles * et, en conséquence des faits énumérés à propos de P et N auparavant, tous les axiomes CS sont satisfaits par les opérateurs modifiés. Mais tous les ensembles * étant ouverts, la distinction entre "c'est ainsi" et "c'est nécessairement ainsi" -c'est-à-dire entre α et $N\alpha$- a disparue.

Les prédicats ou propriétés d'un point d'un continuum sont souvent du type "*plus ou moins*", ce qui fait que la question n'est plus de savoir si un individu a ou n'a pas cette propriété, mais *à quel degré*. Si l'on suppose que le degré est mesurable, le prédicat est alors décrit par une fonction $f(x)$ dont l'argument x varie suivant les points de l'espace donné tandis que la valeur f est un nombre réel de l'intervalle $0 \leqq f \leqq 1$. Les prédicats du premier type sont ceux pour lesquels la fonction ne prend que les valeurs 0 et 1 [fonction caractéristique $(\alpha; x)$ d'un ensemble α]. Une façon naturelle de prendre en compte la nature du continu qui n'aboutirait pas à "séparer des morceaux les uns des autres comme si on débitait un tronc d'arbre à la hache", comme disait Anaxagore, serait de se limiter partout aux fonctions continues $f(x)$. On arrive là à un calcul fonctionnel réunissant les caractéristiques du calcul des probabilités et des ensembles. Le domaine des fonctions continues $f(x)$ est fermé au regard des opérations fondamentales :

---

11. En accord jusqu'ici avec M.H.Stone, *Časopis pro pěst. a fys.*, LXVII (1937-38), 1-25, et A.Tarski, *Fundamenta mathematicae*, XXXI (1938), 103-134. Si l'on ne va pas plus loin, on obtient un calcul sur des ensembles ouverts qui coïncide avec le système de Heyting de la logique intuitionniste (v. section VII). Mais la simple remarque qui suit et valide les axiomes classiques CS jette le doute sur cette interprétation du système de Heyting en termes topologiques.

$$\sim f(x) = 1 - f(x), \quad f(x) \cap g(x) = \min(f(x), g(x)),$$
$$f(x) \cup g(x) = \max(f(x), g(x))$$

V. UN PAS DE PLUS : L'INTUITIONNISME*.

Nous pensons que ce qui suit est une description honnête d'un continuum : 1) Il est divisible en parties; 2) mais les parties ne sont pas "débitées à la hache et séparées les unes des autres", les localisations et les frontières sont forcément imprécises ; 3) cependant, le mathématicien, toujours prêt à parer à toute éventualité, imagine que la finesse et la précision de chaque partition peut toujours être portée au-delà du degré déjà atteint.

Les procédures combinatoires que permet la topologie correspondent à cette conception du continuum. De telles procédure ne contiennent rien de vague; les incertitudes apparaissent dès que l'on applique réellement la procédure au continu; en allant toujours plus loin dans le raffinement des divisions faites suivant le schéma, les frontières doivent être tracées d'un trait de plus en plus fin.

Beaucoup mieux que la mathématique classique, la mathématique intuitionniste peut rendre compte de la nature de ce continuum. Selon Brouwer, l'alternative a et $\sim a$ de la logique classique s'écroule en mathématique dès que l'on fait un pas au-delà des affirmations arithmétiques concernant les nombres individuels, c'est-à-dire, dès que se glissent les idées de "il y a" et "tout". Ainsi, Brouwer nie que la table CT soit une assise suffisamment solide, même pour les propositions des mathématiques. Une question de la forme "Existe-t-il un entier x ayant la propriété bien définie U, ou tout entier a-t-il la propriété non-U ?" n'est pas telle qu'on doive nécessairement répondre par oui ou non. L'assertion de l'affirmation de l'existence demande une *construction réelle* d'un entier concret ayant la propriété U, tandis que le sens de l'autre partie de l'alternative est une proposition *hypothétique* énonçant quelque chose seulement au cas où... : "Au cas où l'on rencontrerait un certain nombre (quel que soit ce nombre) on pourrait être sûr qu'il a la propriété non-U". Si l'on recherche en mathématique une vérité pure et honnête, la thèse intuitionniste est irréfutable. Cependant, si Brouwer s'attaque ce faisant au principe du tiers exclu et le met en échec

---

* "Digging Deeper for the Mole : Intuitionism", soit : creuser, faire des fouilles pour trouver la taupe, qui réfère à un passage de Hamlet et (n.d.t) au fait que les longues galeries creusées par la taupe sont décelables à la surface par des monticules de terre.

le défaut ne peut certainement pas être pallié par l'expédient qui consiste à insérer "possible, peut-être" entre oui et non. La situation est beaucoup plus délicate.

Hilbert, dans un effort héroïque, a essayé de sauver la mathématique classique de l'attaque de Brouwer en proposant une formalisation complète des mathématiques. Les propositions mathématiques sont remplacées par des formules qui n'ont pas de sens en elles-mêmes et la démonstration mathématique se déroule sans référence au sens. Cela met Hilbert à l'abri des attaques de Brouwer qui avait nié qu'il existât un sens quelconque vérifiable intuitivement à la plupart des propositions mathématiques usuelles : Hilbert abandonna complètement cette prétention au sens et ce qu'il essaya d'établir par un raisonnement intuitif, n'est pas la vérité des formules, mais la *consistance* du système entier : le jeu, une fois joué selon les règles, on n'obtient jamais la formule $\sim (0 = 0)$.

Les formules de Hilbert[12] se composent de quatre sortes de symboles : des constantes (comme 0, 1), des variables (x, y, ..), des opérateurs (comme les opérateurs logiques $\sim$, $\cap$, $\cup$ ou les opérateurs arithmétiques $+$,$\times$), des quantificateurs. Les quantificateurs les plus importants sont "pour tout" noté (x) et "il existe" noté $(\exists x)$. Les formules $(x)\mathrm{U}(x)$, $(\exists x)\mathrm{U}(x)$ correspondent aux propositions "U(x) est validé pour tout x" et "Il existe un x pour lequel U(x) est validé". Les quantificateurs portent sur une variable x prise comme index et "lient" cette variable dans toute la formule qui suit. Il donne une description exacte de la façon dont les symboles se combinent pour engendrer des formules. Une formule dans laquelle il n'y a aucune variable libre peut être dite saturée; dans ce jeu, de telles formules correspondent à peu près à des individus ou à des propositions individuelles. Soit b une formule saturée et U une formule contenant une seule variable libre. On désigne par U(b) la formule saturée obtenue à partir de U lorsqu'on remplace la variable x chaque fois qu'elle occurre *librement*, par toute l'expression b. Hilbert et von Neumann *maintiennent* la table CT parce que ses règles donnent des axiomes lorsqu'on prend pour a, b, c n'importe quelle formule saturée. A propos du quantificateur (x), ils donnent la règle suivante :

$$(x)\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{U}(b) \tag{12}$$

en utilisant la notation qui vient d'être expliquée. Pour pouvoir tirer les conclusions résultant d'une affirmation "générale" (x)U, Hilbert combine carrément les idées "pour tout" et "il existe" avec l'axiome de choix de Zermelo

---

12. Ma description est basée sur le système modifié de von Neumann, *op.cit.* note 3. Se reporter à Hilbert-Bernays, *op.cit.*, note 4.

et invente un quantificateur ρ_x, qu'il appelle un représentant. L'idée est qu'un prédicat U sera validé pour tout individu x s'il est validé pour le représentant $\rho_x U$ de U. Ou, traduit en règle axiomatique avec les mêmes notations que précédemment :

$$(13) \qquad U(\rho_x U) \rightarrow (x)U$$

On fait de même pour l'existence. Le syllogisme (F) reste la seule règle d'inférence.

On est maintenant très loin de revendiquer pour les règles de la table CT le droit à des vérités universelles ayant une signification claire et vraie quelles que soient les propositions *a, b, c* et le champ de réalité qu'elles traitent. Mais on les incorpore, ainsi que les axiomes (12) et (13) de la logique transcendantale, à la partie intrinsèque de l'édifice symbolique de la mathématique. Dès que l'on argumente "métamathématiquement" à propos de la consistance du système entier, le raisonnement n'est plus fonction d'aucun axiome mais seulement de l'évidence pure et simple.

VI. L'APPORT DE LA LOGIQUE QUANTIQUE*.

Un calcul des probabilités (ensembles) bien moins artificiel et arbitraire que celui dont on a discuté en III est celui de la *logique quantique* qui a été imaginé pour les besoins de la physique quantique [13]. Telle que nous l'expliquons ici, elle est la contre-partie de la "logique classique" d'un espace de phases ω composé uniquement d'un nombre *n fini* de points [14]. L'espace est maintenant un *espace vectoriel Euclidien V* à *n*-dimensions. Par ensemble α nous entendons maintenant tout *sous espace linéaire* de *V*; en particulier, o est l'espace nul constitué par le seul vecteur 0 et ω l'espace entier *V*. $\sim\alpha$ est défini comme le sous espace orthogonal à α, $\alpha \cap \beta$ comme l'intersection de α et β , tandis que $\alpha \cup \beta$ représente le plus petit sous espace linéaire contenant à la fois α et β, c'est-à-dire le sous espace de tous les vecteurs de la forme $x + y$ (x de α, y de β). A ce moment là, tous les axiomes CS sont satisfaits à l'exception des deux derniers qui doivent être remplacés par l'axiome de dualité de Dedekind :

$$\text{Si } \beta \subset \alpha, \text{ alors } \alpha \cap (\beta \cup \gamma) = \beta \cup (\alpha \cap \beta)$$

Voyons alors ce que devient $\rightarrow$ dans cette logique quantique. Là aussi

---

* "Lightning in the Clouds : Quantum Logic", soit littéralement : Un éclair dans les nuages (n.d.t).

13. G.Birkhoff et J.von Neumann, *Annales de Mathématiques*, XXXVII(1936),823.

14. A vrai dire, nous aurions dû substituer à la géométrie Euclidienne orthogonale ordinaire, une géométrie unitaire à coordonnées complexes; mais le modèle simple est suffisant pour notre propos.

$\alpha \subset \beta$, α est contenu dans β, signifie la même chose que :

$$(\alpha \cup \beta) = \beta \quad \text{ou que} \quad (\alpha \cap \beta) = \alpha$$

En adoptant la première description, on remplace par l'équivalent :

$$\sim (\alpha \cup \beta) \cup \beta = \omega$$

De là, si l'on introduit l'abréviation :

$$\alpha \uparrow \beta \quad \text{pour} \quad (\sim \alpha \cap \sim \beta) \cup \beta,$$

alors $\alpha \subset \beta$ asserte que $\alpha \uparrow \beta$ constitue l'espace total. Il est vrai aussi qu'un vecteur qui appartient à α et à $\alpha \uparrow \beta$ appartiendra à β. Dans les deux cas, $(\overline{F})$ et (F), l'opérateur $\uparrow$ de la logique quantique se comporte comme $\rightarrow$ en logique classique. Cependant, nous aurions pu, pour d'aussi valables raisons, adopter la seconde description qui conduit à introduire l'abréviation $\alpha \downarrow \beta$ pour $\sim \alpha \cup (\alpha \cap \beta)$; et, par rapport à $(\overline{F})$ et (F), $\uparrow$ est aussi valable que $\downarrow$. Dans le cas classique, les deux opérateurs $\uparrow$, $\downarrow$ coïncident avec $\rightarrow$, mais ici ils sont essentiellement différents. L'éclatement de $\rightarrow$ en $\uparrow$ et $\downarrow$ en logique quantique éclaire l'analyse précédente de l'implication.

Venons-en maintenant à la partie probabilité de la logique quantique. Si x est un vecteur donné $\neq 0$ et ξ un sous espace linéaire donné, nous projetons x perpendiculairement sur ξ; le quotient du carré de la longueur de la projection $\bar{x}$ par le carré de la longueur de x lui-même est appelé la "probabilité $(\xi; x)$ de x satisfaisant ξ". (Comme cette valeur est la même pour des vecteurs différant d'un facteur numérique, il est raisonnable de considérer les *rayons* plutôt que les vecteurs comme représentant les états possibles d'un système physique donné). Le théorème de Pythagore devient alors l'axiome de la négation :

$$(\sim \alpha; p) = 1 - (\alpha; p)$$

qui montre que la valeur de $(\sim \alpha; p)$ est uniquement déterminée par $(\alpha; p)$, c'est-à-dire selon la règle posée en (10). Cependant, les valeurs de $(\alpha \cup \beta; p)$ et $(\alpha \cap \beta; p)$ ne sont en aucune façon uniquement déterminées par les valeurs de $(\alpha; p)$ et $(\beta; p)$ -et nous étions très conscients en III que si nous appliquions au pied de la lettre les règles arbitraires (10), nous vendions notre droit naturel de réalité contre, pour tout potage, un joli jeu formel.

Il existe une très bonne définition de la multiplication des espaces vectoriels qui permet, en logique quantique, de passer des propriétés aux *relations* entre plusieurs états du même système ou de différents systèmes physiques. Néanmoins, la logique classique des fonctions propositionnelles avec ses *variables* x, y, $\cdot\cdot$ et ses *quantificateurs* (x), $(\exists x)$ a une bien plus grande souplesse qui est due au parallélisme entre les opérateurs $\sim$, $\cap$, $\cup$

pour les ensembles et les valeurs (de vérité et de probabilité), et cette caractéristique de la logique classique disparaît complètement en logique quantique.

Nous rencontrons à nouveau, dans l'organisation symbolique d'une discipline, ici la physique quantique, une partie spécifique qui peut justement être appelée sa *logique propre* [15]. Chaque domaine du savoir, lorsqu'il se cristallise en une théorie formelle, semble transporter avec lui sa logique intrinsèque qui fait partie du système symbolique formalisé, et cette logique sera généralement différente selon les domaines considérés. Cependant, lorsque dans une démonstration mathématique formalisée, on vérifie qu'une formule $a \rightarrow b$ est la combinaison de deux formules a et b données (avec l'intention de tirer de a et de $a \rightarrow b$ l'inférence b) nous dépendons de la pure *évidence*. En physique quantique, lorsque nous demandons si une quantité physique soumise empiriquement à des conditions concrètes données prend une certaine valeur avec telle ou telle probabilité, nous dépendons de l'évidence expérimentale. Notre structure symbolique peut se composer de plusieurs étapes; i.e., on peut vouloir appliquer à la physique quantique la mathématique classique dans sa forme formalisée avec ce que cela comporte de logique existentielle, plutôt que la mathématique intuitionniste. Mais l'étape ultime sera toujours celle qui permettra de comprendre la signification, vérité simple et honnête, telle qu'elle est révélée par l'évidence et l'expérience. Le pur symbolisme n'est jamais fermé sur lui-même; en dernière analyse, le regard de l'esprit doit être présent. On peut apprendre à un homme, peut-être à un chien, mais pas à une pierre.

VII. QUELQUES OUVERTURES*

Jusqu'à maintenant nous nous sommes essentiellement occupés de la logique interne d'un système. Cependant, en II nous avons fait état d'une autre interprétation des "modes obliques" : a étant une formule du système, l'assertion $\vdash a$ qui exprime la "certitude" ou la "nécessité" de a n'est pas une formule mais l'affirmation du fait que j'ai réussi à dériver a comme formule finale, à l'aide des règles du jeu que sont les axiomes et la règle d'inférence. La situation est presque la même du point de vue intuitionniste. Kolmogoroff [16] a proposé d'interpréter une proposition existentielle "Il existe un nombre x de telle et telle sorte" comme le *problème* mathématique a qui consiste à *construire* un tel nombre. Compte tenu de ce type de problème, nous sommes

15. Dans le cas présent, certains préfèreraient l'appeler géométrie quantique, mais il n'est pas très utile de faire ici une querelle de mots.
* "Snapshots in Twilight", soit : Instantanés au crépuscule (n.d.t).
16. *Mathematische Zeitschrift*, XXXV(1932), 58.

alors en mesure d'annoncer $\vdash a$ comme un fait historique signifiant que nous avons réussi à mener à bien la construction désirée.

Le fait est beaucoup moins d'ordre subjectif qu'il n'y paraît à première vue puisque n'importe qui possédant et comprenant les règles de construction qui lui ont été communiquées peut alors dire : "(Grâce à la communication de Mr Weyl) je sais comment construire un nombre tel que..". Cependant, cette affirmation ne perdra son caractère à la fois personnel et historique que si l'on y ajoute toute la construction qui la transforme en une proposition, proposition selon laquelle le nombre construit satisfait bien les conditions demandées. Nous préférons le raccourci de l'affirmation existentielle si, comme cela arrive souvent, la construction particulière du nombre n'est pas pertinente et qu'il faille l'oublier. En fait, une preuve mathématique, après avoir établi l'existence d'un nombre de la nature désirée, peut se poursuivre par : "Supposons que a soit ce nombre" et conduire à une conclusion n'impliquant pas du tout a. C'est pour cette raison que l'on a inventé les termes "on peut" ou "il est possible de construire" au lieu de l'expression personnelle "j'ai réussi à construire". Cette utilisation caractéristique du mot "possible" en mathématique ne devait pas passer inaperçue. [Dans le système de Hilbert elle est "objectivée" sous la forme du quantificateur $(\exists x)$.]

Avec le système de Hilbert, l'écart qui existe entre les formules (mathématiques) et les assertions métamathématiques de déductibilité de certaines formules, ne peut pas être comblé. Il n'y a, par conséquent, aucun sens à itérer l'assertion $\vdash$ ou à la combiner avec les symboles $\sim$, $\cap$, $\cup$ qui apparaissent dans le système. Brouwer a là-dessus une attitude plus conciliante [17]. Soit a l'affirmation selon laquelle tous les nombres ont la propriété non-U. En construisant un nombre ayant la propriété U, on prouve l'impossibilité ou, comme dit Brouwer, l'absurdité de a, ce qui est noté par le symbole $\neg$. Dans ce cas, il n'y a aucun sens à parler de l'absurdité de l'absurdité de a : $\neg\neg a$, qui serait établie en montrant que l'hypothèse selon laquelle il existe un nombre a ayant la propriété U conduit à une contradiction. Il semble certain que $\neg\neg a$ implique a, mais le contraire reste douteux. Inspiré par de tels arguments, Heyting [18] a mis sur pied un système formel fondé sur la logique intuitionniste des propositions, système auquel je suis tout prêt à adhérer, à deux réserves près : 1°) ce qui fait l'absurdité d'une proposition a dépend de la nature de a et je ne vois pas comment on peut

---

17. V. Bernays-Hilbert, I, 43, à propos des prises de position concernant la "finitude" et "l'intuitionnisme".
18. *Sitzungsber. Preuss. Ak. Wissensch.* (1930), p.42.

être sûr du sens de $\neg a$ pour toute proposition a significative; 2°) il semble évident qu'il n'y a aucun espoir de pouvoir un jour formaliser complètement la logique du raisonnement intuitif; aussi peut-on se demander si, ou dans quel sens restreint, la complétude doit être requise pour le système de Heyting.

Même avec ces deux réserves, le système $\mathfrak{H}$ de Heyting est, à mon avis, beaucoup plus solide que la logique de la stricte implication de Lewis. Il est, de ce fait, intéressant de dégager les relations formelles que ces deux systèmes ont en commun. Adoptons pour l'opérateur N les axiomes suivants :

$$1)\ Na \to a, \qquad 2)\ Na \to NNa,$$
$$3)\ N(a \to b) \to (Na \to Nb)$$

et ajoutons-les à la table CT. En plus du syllogisme on utilise comme règle d'inférence une règle permettant de passer d'une formule a déjà démontrée à Na comme formule démontrée (système $\mathfrak{L}$). Puis, comme l'a montré Gödel, on peut traduire les concepts de base de Heyting dans ce symbolisme, de manière à ce que les formules validées en $\mathfrak{H}$ soient déductibles en $\mathfrak{L}$. Il y a même plusieurs traductions possibles pour le faire, mais elles semblent fonctionner seulement dans le sens $\mathfrak{H} \to \mathfrak{L}$, et c'est pourquoi le soutien apporté par l'intuitionnisme au système de Lewis, n'est pas très fort [19].

En ce qui concerne la question soulevée à la fin de la section II, nous pouvons maintenant opter pour une réponse négative. Pourtant, si nous avons trouvé au cours de ces considérations, bien des raisons de douter de l'existence d'une logique modale universelle, nous sommes obligés de reconnaître que le mot "possible", bien que pouvant prendre différentes nuances, exprime une idée de base irréductible. En guise de conclusion, je voudrais mettre en évidence deux de ses traits les plus fondamentaux.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, Aristote, et après lui Leibniz, décrivit le continuum comme le véhicule des parties possibles où le tout précède les parties, tandis que lorsqu'il s'agit d'un agrégat de parties réelles, les parties précèdent le tout. Le continuum espace- temps est le véhicule des localisations possibles. J'ai souvent dit, et je le répète ici, qu'en utilisant le continu ou la suite des nombres entiers, nous projetons ce qui nous est présentement donné sur un fond d'*a priori* possible, sur un champ de possibilités construit selon une procédure définie mais ou-

---

19. K.Gödel, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (Wien), IV (1933), 39.

vert sur l'infini[20]. Je crois toujours que cette potentialité est l'issue fondamentale, bien qu'elle soit plus une conception métaphysique d'ordre spécifique que logique d'ordre universel. De telles idées soulignent nos constructions théoriques et nous avons pu voir ça et là sous quels déguisements se glisse l'idée en question dans une construction mathématique concrète.

Potentialités d'une autre sorte sont celles qui pèsent sur nous à chaque instant en tant qu'êtres humains ayant une histoire, le futur nous réservant à chaque pas son stock d'espoir et de désespoir. Si l'histoire devient un jour une discipline assez mûre pour passer à une construction symbolique théorisée, il ne serait pas surprenant d'y trouver, sous forme symbolique, la possibilité inhérente à notre existence, dont j'ai traité en II et dont la profondeur résonne dans la citation de Heidegger, possibilité qui jouerait un rôle important dans une "logique intrinsèque de l'histoire". Mais l'exemple de la physique quantique nous met en garde contre toute tentative de prévoir *a priori* à quoi ressemblerait une logique de l'histoire, si une telle chose arrive jamais.

On pourrait aussi s'attendre à ce que les choses changent grandement si l'on passait d'une logique des propositions à une véritable logique des communications. Les propositions sont, ou bien impersonnelles, ou bien mettent en jeu uniquement un ego à partir duquel elles irradient; les communications se jouent entre un je et un tu existants. Les promesses, les questions, les ordres auraient à être traités à l'intérieur d'une telle logique.

Notre but était de fournir un matériau pertinent. Trancher définitivement la question demanderait un coeur plus solide que celui de Hamlet ou d'un mathématicien.

---

20. Je m'enhardis même jusqu'à ajouter en 1925 : "Wir stehen mit ihr (der mathematischen Konstruktion) genau in jenem Schnittpunkt von Gebundenheit und Freiheit, welcher das Wesen des Menschen selbst ist." (*Nous nous trouvons avec elle (la construction mathématique) excatement au point de rencontre de la contrainte et de la liberté, qui est la raison même de l'Etre humain*). (n.d.t). Heidegger dit d'une manière plus emphatique [*Sein und Zeit* (*l'Etre et le Temps*), vol.I, 1927, p.143] : "Die Möglichkeit als Existenzial ist die ursprünglichste und letzte positive ontologische Bestimmung des Daseins." (*La possibilité, dans la philosophie existentiale, est la plus primitive et la dernière des déterminations ontologiques positives de l'Etre-là*)(n.d.t). A propos des mathématiques et de la temporalité, voir O.Becker, *op.cit.* note 1, pp.539-547.