MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Polynômes de Stanley et extensions linéaires d'un ordre partiel

Mathématiques et sciences humaines, tome 73 (1981), p. 97-116

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1981__73__97_0>

Math. Sci. hum. (*19*[e] année, n°73, *1981*, p.97-116)

POLYNOMES DE STANLEY ET EXTENSIONS LINEAIRES D'UN ORDRE PARTIEL

G. KREWERAS*

PRESENTATION

Cet article est un complément et un prolongement naturel de l'article du même auteur paru dans le n° 53 de M.S.H. [4]. On y expose en réalité des résultats dont la plupart sont présentés, avec des notations très différentes et selon un autre cheminement logique, dans la thèse de R. Stanley (réf. [10]), qui était du reste inconnue de l'auteur au moment de sa rédaction. On y étudie principalement, à partir d'un ensemble partiellement ordonné quelconque E de n éléments, l'ensemble des extensions linéaires U(E), ainsi que les partitions de U(E), suivant le nombre d de "décrochements" par rapport à une extension linéaire L de référence, en classes de v_d éléments ; l'on démontre que la suite des v_d est toujours indépendante du choix de L. On considère ensuite plus particulièrement le cas où toutes les chaînes maximales de E ont même longueur k ; on montre alors que $v_d = v_{n-k-d}$ et que, pour toute extension linéaire L, il en existe une autre, $\varphi(L)$, qui en est dans un certain sens la plus éloignée, bien qu'il puisse arriver que $\varphi^2(L) \neq L$. Pour k=1 on retrouve une propriété classique des nombres eulériens. Pour k=2 on obtient deux curieuses propriétés des graphes bipartis. Enfin on étudie trois exemples de familles d'ordres partiels où k peut être quelconque.

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, nous considérerons un ensemble N de cardinal n , muni d'une relation d'<u>ordre</u> (partielle mais antisymétrique) notée $\leqslant$ ou $<$ suivant que l'on s'intéresse à sa version réflexive ou irréflexive ; nous appellerons E l'ensemble N ainsi ordonné.

*Université Paris I

Si sur le même N on définit une relation de préordre total R, dont la version irréflexive est notée $\hat{R}$, on dira que R est compatible avec E si

$$x < y \Rightarrow x\hat{R}y \ .$$

La relation (xRy et yRx) partitionne N en classes, dites d'indifférence. Si le nombre de ces classes est r, il revient au même de définir R par un épimorphisme strict de E dans $\{1,2,\ldots,r\}$, c'est-à-dire par une application surjective $f : E \to \{1,2,\ldots,r\}$ telle que $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$; dans ce cas on appellera f(x) le niveau de x. (Il revient d'ailleurs au même de considérer $\{1,2,\ldots,r\}$ ou tout ensemble $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ qui lui soit ordinalement isomorphe).

L'objet principal du présent article est l'étude de l'ensemble U_r , de cardinal u_r , des préordres totaux à r classes compatibles avec E. Pour que l'on ait $u_r = 0$, il faut évidemment que $r \leqslant n$; mais il faut en outre que le nombre r de classes d'indifférence soit au moins égal au nombre k de termes de la plus longue suite strictement croissante de E, soit $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Nous appellerons ce nombre k le degré de E, et nous supposerons donc toujours réalisée la condition $k \leqslant r \leqslant n$.

Les éléments de U_n sont appelés les extensions linéaires de E (cf.[3]); ils retiendront notre attention plus particulièrement.

Le nombre u_r de préordres totaux à r classes se relie au nombre total P(t) d'homomorphismes stricts de E dans $\{1,2,\ldots,t\}$, c'est-à-dire d'applications f auxquelles on impose les mêmes conditions que précédemment sauf la surjectivité. En effet en répartissant ces homomorphismes suivant le cardinal r de l'image f(E), on voit que

$$(1) \qquad P(t) = \sum_{r=0}^{t} \binom{t}{r} u_r \ ,$$

les termes à sommer n'étant d'ailleurs non nuls que pour $k \leqslant r \leqslant n$.

P(t) prend donc les mêmes valeurs qu'un polynôme de degré n de la variable t ; ce polynôme s'annule pour $t = 0,1,2,\ldots,k-1$ et le coefficient de son terme de plus haut degré est $u_n/n!$. Nous l'appellerons le polynôme de Stanley de E.

2. FORMATION RECURRENTE DE P(t)

Le polynôme P(t) dépend bien entendu de E et cette dépendance peut être rappelée par la notation $P_E(t)$. Considérons alors dans E l'ensemble M des éléments qui sont maximaux,

$$M = \{x \mid x \leqslant y \Rightarrow x = y\} \ ;$$

appelons H une partie non-vide quelconque de M, et appelons F(H) ce qui reste de E après suppression de tous les éléments de H. A cet ensemble F(H) correspondra notamment un nouveau polynôme $P_{F(H)}(t)$, qui intervient tout naturellement dans le calcul suivant de P(t+1).

En effet tout homomorphisme strict de E dans $\{1,2,\ldots,t,t+1\}$ ou bien ne place rien au niveau t+1, ou bien attribue le niveau t+1 aux éléments d'un ensemble H non vide inclus dans M, et à ces éléments-là seuls.

On en conclut que

$$(2) \qquad P_E(t+1) = P_E(t) + \sum_H P_{F(H)}(t) \ ,$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant la notation Δ du calcul des différences,

$$(3) \qquad \Delta P_E = \sum_H P_{F(H)} \qquad ;$$

la somme du second membre est celle de 2^m-1 polynômes si E a m éléments maximaux.

La formule (3), conjointement avec (1), est spécialement commode pour le calcul numérique de $u_k\ u_{k+1} \ldots u_n$ dans le cas d'ensembles E pas trop compliqués. Quelques exemples sont donnés dans [4].

Quant à la formule (2), elle permet (puisque son premier membre s'annule pour t = -1) de montrer, par récurrence sur n, que $P_E(-1) = (-1)^n$; la récurrence s'amorce pour n=1, puisque E n'a alors qu'un élément et que P(t) est égal à t.

3. IDEAUX - RELATION ENTRE P ET Q

Lorsque E est donné, on appelle idéal I toute partie de N telle que

$$\left.\begin{array}{c} x \in I \\ \text{et} \quad y \leqslant x \end{array}\right| \Rightarrow y \in I$$

Il est bien connu (cf. [1]) que les idéaux ainsi définis à partir de E forment un ensemble T auquel l'inclusion confère une structure de treillis distributif ; le minorant universel de T est $\emptyset$. On a notamment dans T une relation antécédent-conséquent (ou relation "de couverture") notée $\lessdot$ et définie par

$$I \lessdot J \Leftrightarrow [\, I \subset K \subset J \Rightarrow (K=I \text{ ou } K=J)] \ .$$

Tout idéal I autre que $\emptyset$ (auquel on peut affecter un niveau 0) a un niveau T égal à son cardinal en tant que partie de N. Si J est au niveau j, il a un ou plusieurs antécédents au niveau j-1 ; chacun d'eux s'obtient en supprimant un élément maximal de J et un seul.

Posons-nous maintenant le problème classique suivant : étant donné J dans T, combien existe-t-il dans T de suites $I_1 \ I_2 \ \ldots \ I_t$ telles que

$$0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_t \subset J \ ?$$

S'il en existe $Q_J(t)$, on voit évidemment, en faisant varier $I_t=I$, que

$$Q_J(t) = \sum_{I \subset J} Q_I(t-1) \quad ;$$

ceci permet de voir que les valeurs de $Q_J(t)$ sont celles d'un polynôme en t ayant pour degré le niveau de J dans T.

L'inversion de cette formule (par la méthode de Möbius-Rota [9] ou si l'on veut ici l'aide de la règle d'inclusion-exclusion [7]) conduit à considérer l'ensemble S(J) de tous les I que l'on peut obtenir à partir de J en y supprimant une partie quelconque (même éventuellement vide) de l'ensemble des éléments maximaux de J.

On obtient ainsi

$$Q_J(t-1) = \sum_{I \in S(J)} (-1)^{|J-1|} Q_I(t) \quad ,$$

où $|J-I|$ désigne le cardinal de J-I .

En particulier si l'on prend pour J le maximum unique de T (c'est-à-dire l'idéal plein E) et si l'on change de membre le terme I=E, on obtient

$$Q_E(t-1) - Q_E(t) = \sum_I (-1)^{|E-I|} Q_I(t) \quad ,$$

expression dans laquelle I décrit l'ensemble que l'on obtient en supprimant une partie non-vide quelconque H de l'ensemble M des éléments maximaux de E. I coïncide donc avec ce qui a été appelé plus haut F(H), et la formule peut se récrire

$$(4) \qquad Q_E(t-1) - Q_E(t) = \sum_H (-1)^{|H|} Q_{F(H)}(t) \quad .$$

Le rapprochement des formules (2) et (4) va permettre d'établir, par récurrence sur n, l'importante parenté suivante entre le polynôme de Stanley P_E et le polynôme $Q = Q_E$ formés à partir d'un même ensemble E, de cardinal n:

$$(5) \qquad Q(t) = (-1)^n P(-t-1) \quad .$$

On a bien en effet, pour commencer, $Q(t) = t+1$ pour $n = 1$, puisque T se réduit alors à son minimum $\emptyset$ et à son maximum E, ce qui donne t+1 suites non-décroissantes distinctes de t termes.

En outre, si l'on transforme par l'hypothèse de récurrence le second membre de (4), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_H (-1)^{|H|} (-1)^{n_{F(H)}} P_{F(H)}(-t-1) &= (-1)^n \sum_H P_{F(H)}(-t-1) \\ &= (-1)^n \, [P_E(-t) - P_E(-t-1)] \\ &\quad \text{(par suite de (2))} \\ &= (-1)^n P_E[-(t-1)-1] - (-1)^n P_E(-t-1) \quad . \end{aligned}$$

C'est donc là l'expression du premier membre de (4) ; cela ne prouve pas encore (5), mais prouve que les deux polynômes $Q_E(t)$ et $(-1)^n P_E(-t-1)$ ont même différence (même transformé par Δ). Pour finir de montrer qu'il sont égaux, il suffit de constater que les deux membres de (5) ont tous deux la même valeur 1 pour $t=0$; l'égalité (5) est donc établie. Il en résulte en particulier que le polynôme Q(t) (qui exprime le nombre de suites non-décroissantes de t idéaux de E) s'annule pour $t = -1, -2, \ldots, -k$.

4. EXTENSION LINEAIRE DE REFERENCE

Dans tout ce qui suit on se donne arbitrairement, une fois pour toutes, l'une des u_n extensions linéaires de E, c'est-à-dire l'un des éléments L de U_n , et l'on adopte pour les éléments de E les noms individuels $A_1\ A_2\ \dots\ A_n$ <u>dans l'ordre croissant de L</u> . Tout épimorphisme de E dans $\{1,2,\dots,r\}$, donc tout préordre total à r classes compatible avec E, sera noté par une suite de n termes indiquant les niveaux successifs de $A_1\ A_2\ \dots\ A_n$; en particulier les extensions linéaires de E seront notées par des permutations et L sera notée par la permutation identique.

Parmi toutes les suites surjectives $a = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ de n termes pris parmi $\{1,2,\dots,r\}$, celles qui définissent des éléments de U_r sont celles qui satisfont à un système de "conditions de croissance" que nous désignerons par la même lettre E que l'ensemble partiellement ordonné : chacune de ces conditions consiste à imposer que sur une certaine paire $\{i,j\}$ (telle que $1 \leqslant i < j \leqslant n$) on ait $a_i < a_j$. Par exemple l'ordre partiel E peut être celui dont le graphe de couverture est donné par la fig. 1 ; la fig. 2 montre l'extension linéaire L et les paires $\{i,j\}$ à croissance imposée : $\{1,2\}$ $\{2,3\}$ $\{3,4\}$ $\{2,5\}$ $\{5,7\}$ $\{6,7\}$; la fig. 3 montre l'élément de U_5 représenté par la suite (1235114).

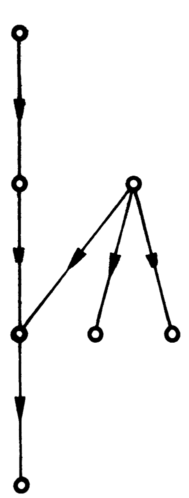

fig.1

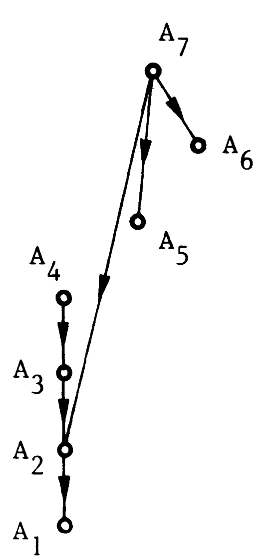

fig.2

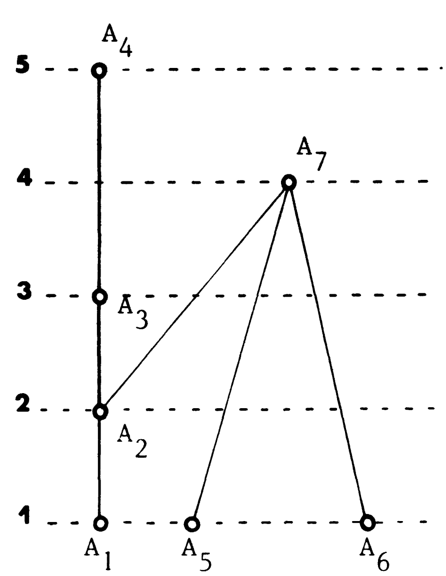

fig.3

5. PAIRES "REMARQUABLES". TASSEMENT ET GONFLEMENT

Nous aurons besoin de quelques conventions de vocabulaire relatives aux ensembles U_r . Tout d'abord, quand nous parlerons d'une paire $\{i,j\}$, il s'agira toujours de deux éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$ tels que $i < j$.

Etant donné $a \in U_r$, nous particulariserons deux sortes de paires, sous la dénomination commune de paires remarquables :

(i) les paires stabilisantes ; nous appelons ainsi une paire $\{i,j\}$ telle que a_i et a_j aient la même valeur, h par exemple, et qu'aucun a_ℓ tel que $i < \ell < j$ ne soit égal à h .

(ii) les paires décrochantes ; nous appelons ainsi une paire $\{i,j\}$ telle que $a_j = a_i - 1$ (=h par exemple), que tous les autres h de la suite a, s'il en existe, soient postérieurs à a_j , et que tous les autres h+1 de la suite a, s'il en existe, soient antérieurs à a_i . S'il en est ainsi nous dirons aussi que la suite a présente un décrochement sur la paire $\{i,j\}$.

Du fait même de leurs définitions les paires remarquables (stabilisantes ou décrochantes) sont toujours distinctes des paires sur lesquelles on a imposé les conditions de croissance E . De plus on s'assure facilement que si deux paires remarquables $\{i,j\}$ et $\{i',j'\}$ ont un élément commun, c'est toujours soit $i = j'$, soit $i' = j$.

Par ailleurs on remarque que pour tout a donné dans U_r , le nombre de paires stabilisantes est exactement n-r . En effet si t_h est le nombre de termes égaux à h dans a, on a $t_1 + t_2 + \ldots + t_r = n$. Mais à chacun des niveaux h possibles correspondent alors $t_h - 1$ paires stabilisantes, et comme le nombre de niveaux est r, il y a n-r paires stabilisantes au total. Bien entendu si $a \in U_n$, il n'y a aucune paire stabilisante. Enfin nous utiliserons la notation U(r,d) pour désigner la partie de U_r formée des suites qui présentent d décrochements.

Exemple récapitulatif (n=9, r=6) : a = 621643532 ($\in U_6$)

i =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i =	6	2	1	6	4	3	5	3	2

Paires $\{i,j\}$ remarquables (dont 3 stabilisantes puisque $n-r = 3$) :

$\{2,9\}$: stabilisante
$\{6,8\}$: stabilisante
$\{5,6\}$: décrochante
$\{4,7\}$: décrochante
$\{1,4\}$: stabilisante . $a \in U(6,2)$.

Il est alors commode de définir deux opérations inverses l'une de l'autre, que nous appellerons <u>tassement</u> et <u>gonflement</u>.

1°) <u>Tassement</u>
Etant donné a dans $U(r,d)$, avec $d \geqslant 1$, et étant donné une paire décrochante $\{i,j\}$ telle que $a_i = h+1$ et $a_j = h$, <u>tasser</u> a sur $\{i,j\}$, c'est former la suite b obtenue en diminuant d'une unité tous les termes de a qui sont $\geqslant h+1$, sans rien changer d'autre.

2°) <u>Gonflement</u>
Etant donné b dans $U(r-1, d-1)$ et étant donné une paire stabilisante $\{i,j\}$ telle que $b_i = b_j = h$, <u>gonfler</u> b sur $\{i,j\}$ c'est former une suite a en augmentant d'une unité d'une part tous les termes de b qui sont égaux à h mais situés à gauche de b_i , d'autre part tous les termes de b qui sont $\geqslant h+1$, sans rien changer d'autre.

On s'assure aisément que les opérations de tassement et de gonflement possèdent toujours les propriétés suivantes :

(i) elles ne peuvent provoquer aucune violation des conditions de croissance

(ii) elles ne changent pas l'ensemble des paires remarquables, mais substituent seulement à une paire décrochante une paire stabilisante et inversement

(iii) deux tassements successifs ou davantage, portant sur des paires $\{i,j\}$, $\{i',j'\}$,..., produisent le même résultat final quel que soit l'ordre dans lequel on les effectue ; idem pour des gonflements successifs.

6. RELATIONS FONDAMENTALES

Il résulte de ce qui précède qu'aucun élément de U_k ne peut présenter de décrochements car s'il en présentait un on pourrait par tassement construire un élément de U_{k-1} , ce qui est impossible puisque U_{k-1} est vide. En outre aucun élément de U_n ne peut présenter plus de n-k décrochements, sinon on pourrait par n-k tassements successifs trouver un élément de U_k présentant un décrochement. U_n est donc partitionné, suivant le nombre de décrochements, en n-k+1 classes $V_0\ V_1\ \ldots\ V_{n-k}$, de cardinaux respectifs $v_0\ v_1\ \ldots\ v_{n-k}$.

Considérons alors l'une quelconque a des v_d permutations appartenant à V_d ; parmi les d paires sur lesquelles a présente un décrochement, choisissons-en arbitrairement p (de l'une des $\binom{d}{p}$ manières possibles) et faisons les p <u>tassements</u> successifs qui on pour effet de supprimer ces décrochements et eux seuls. Quel que soit l'ordre de ces tassements, on aboutit à un même a' $\in$ U(n-p, d-p). Inversement si l'on part d'un a' quelconque de U_{n-p} , il suffit de faire des gonflements sur ses p paires stabilisantes pour ajouter p décrochements supplémentaires à ceux que a' présente éventuellement déjà et aboutir dans V_d .

Il en résulte l'égalité

$$(6) \qquad u_{n-p} = \sum_{d=p}^{n-k} \binom{d}{p} v_d \quad ,$$

dans laquelle le terme général de la somme du 2ème membre dénombre les éléments de U(n-p, d-p). Les deux cas particuliers extrêmes sont le cas trivial où p=0, qui donne $u_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-k}$, et le cas un peu moins évident où p=n-k , qui donne $u_k = v_{n-k}$.

La résolution des équations (6) par rapport aux v est immédiate et donne

$$(7) \qquad v_d = \sum_{q=d}^{n-k} (-1)^{q-d} \binom{q}{d} u_{n-q} \quad .$$

Mais cette fois le cas où d=0 n'est plus trivial, puisqu'il donne

$$v_0 = u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - \ldots + (-1)^{n-k} u_k \quad .$$

Or $v_0 = 1$ puisqu'il n'y a qu'une seule permutation sans décrochement, qui est la permutation identique. On obtient ainsi la relation

$$(8) \qquad u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - \ldots + (-1)^{n-k} u_k = 1 \quad ,$$

valable pour tous les ensembles partiellement ordonnés de cardinal n et de degré k. Cette relation fait l'objet de deux démonstrations indépendantes, distinctes de celle donnée ici, dans [4].

L'intérêt principal des formules (6) et (7) est de montrer qu'il revient au même de connaître, pour un E donné, soit la répartition des préordres totaux compatibles avec E par nombre de classes, soit la répartition des extensions linéaires de E par nombre de décrochements par rapport à l'une d'entre elles, L ; il n'était d'ailleurs nullement évident que cette dernière répartition devait être indépendante du choix de L. Une telle indépendance est par elle-même un théorème général sur les ensembles partiellement ordonnés .

7. CAS HOMOGENE

Nous dirons qu'un ensemble partiellement ordonné E, de cardinal n et de degré k, est homogène s'il possède l'une ou l'autre des deux propriétés équivalentes (i) et (ii) :

(i) $u_k = 1$

(ii) toutes les suites strictement croissantes maximales (au sens de l'inclusion) d'éléments de E sont formées d'exactement k termes.

L'équivalence de (i) et (ii) s'établit facilement, par exemple par récurrence sur k. Pour k=2, tout élément de E, que E soit homogène ou non, est soit maximal, soit minimal, soit les deux à la fois ; dans ce dernier cas il s'agit d'un élément isolé (incomparable à tout autre). Suivant que l'ensemble des éléments isolés de E est vide ou pas, on voit immédiatement que deux propriétés (i) et (ii) sont ou toutes deux vraies, ou toutes deux fausses.

Soit E donné, de degré $k > 2$. Toute suite strictement croissante d'éléments de E, si elle est maximale au sens de l'inclusion, se termine en un élément maximal de E, et cela qu'elle comporte k éléments ou moins ; on exclut le cas d'un élément unique, qui serait dans E un point isolé, empêchant à la fois (i) et (ii). Si l'on supprime alors de E tous les éléments maximaux et eux seuls, il reste un E' dans lequel toutes les suites strictement croissantes se trouvent raccourcies d'exactement une unité. Suivant que E' , qui est de degré k-1 , est homogène ou non, on voit que sur E les deux propriétés (i) et (ii) seront de nouveau ou toutes deux vraies, ou toutes deux fausses.

8. CARACTERE PARITAIRE DE P ET CONSEQUENCES

Montrons que si E est homogène, on peut définir une bijection entre l'ensemble des suites d'idéaux $I_1\ I_2\ \ldots\ I_t$ telles que

$$0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_t \subset E$$

et l'ensemble des homomorphismes stricts f de E dans $\{1,2,\ldots,k+t\}$.

Appelons en effet ν l'homomorphisme "niveau" de E dans $\{1,2,\ldots,k\}$, homomorphisme qui est bien défini puisque $u_k = 1$. Donnons-nous la suite $I_1\ I_2\ \ldots\ I_t$ et définissons f(x) par

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \nu(x) & \text{si } x \in I_1 \\
f(x) = \nu(x)+1 & \text{si } x \in I_2-I_1 \\
f(x) = \nu(x)+2 & \text{si } x \in I_3-I_2 \\
\text{-------------} & \text{-------} \\
f(x) = \nu(x)+t-1 & \text{si } x \in I_t-I_{t-1} \\
f(x) = \nu(x)+t & \text{si } x \in E-I_t \quad ;
\end{array}$$

le fait que f est un homomorphisme strict de E dans $\{1,2,\ldots,k+t\}$ se vérifie immédiatement.

Inversement si l'on se donne un homomorphisme strict f de E dans $\{1,2,\ldots,k+t\}$, il est facile de s'assurer que l'on a toujours

$$\nu(x) \leqslant f(x) \leqslant \nu(x)+t \quad ;$$

en effet si x a pour niveau dans E l'entier $\nu(x) = h$, ces deux inégalités résultent respectivement de la possibilité de faire de x le dernier point d'une suite strictement croissante $x_1 < x_2 < \ldots < x_{h-1} < x$ ou le premier point d'une suite strictement croissante $x < x_{h+1} < \ldots < x_k$. Il suffit alors de définir G_θ , pour $\theta = 0,1,\ldots,t$, par

$$G_\theta = \{x|\ f(x) = \nu(x) + \theta\}$$

et l'on reconstitue la suite $I_1\ I_2\ \ldots\ I_t$, qui sera bien une suite croissante d'idéaux, par

$$I_1 = G_0 \quad I_2 = G_0 \cup G_1 \ \ldots \ I_t = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1} \ .$$

Cette bijection permet d'affirmer que si E est homogène de degré k , on a (en reprenant les notations du § 3) :

$$Q(t) = P(k+t) \ .$$

Compte-tenu de la formule générale (5), on déduit de là que, pour un E homogène de degré k , on a

$$(9) \qquad P(t+k) = (-1)^n \ P(-t-1) \ .$$

Cela signifie que, au facteur $(-1)^n$ près, le polynôme P(t) reprend alors pour t = -1, -2, -3, ... les mêmes valeurs respectives que pour t = k, k+1, k+2, ... ; il s'agit donc d'un polynôme paritaire (c'est-à-dire pair ou impair suivant n) de la variable $t - \frac{k-1}{2}$.

La propriété (9) entraîne un certain nombre de propriétés remarquables des ordres partiels homogènes.

Une première d'entre elles est que si E est homogène de degré k (et de cardinal n), on a toujours

$$u_{n-1} = u_n \ \frac{n-k}{2} \ .$$

Il suffit, pour l'établir, d'égaler les coefficients de t^{n-1} d'une part dans l'expression générale (1), d'autre part dans $\frac{1}{n!}\ (t - \frac{k-1}{2})^n$ (puisque les autres termes du développement paritaire sont de degré $\leqslant$ n-2 en t). On trouve ainsi

$$-\frac{1}{n!} \ \frac{n(n-1)}{2}\ u_n + \frac{1}{(n-1)!}\ u_{n-1} = -\frac{1}{n!}\ n\ \frac{k-1}{2}\ u_n \ ,$$

d'où, après multiplication par (n-1)! , l'égalité annoncée.

Une autre conséquence remarquable de l'hypothèse d'homogénéité de E sera la symétrie interne de la suite $v_0\ v_1\ \ldots\ v_{n-k}$.

Pour l'établir on peut, avant même de supposer que E est homogène, se servir des formules (1) et (6) pour exprimer séparément en fonction des v les deux membres de la formule (9) pour $0 \leqslant t \leqslant n-k$. On trouve ainsi, à l'aide de calculs binomiaux élémentaires :

$$P(t+k) = v_{n-k-t} + \binom{n+1}{n} v_{n-k-t+1} + \ldots + \binom{n+t}{n} v_{n-k}$$

$$(-1)^n P(-t-1) = \binom{n+t}{n} v_0 + \binom{n+t-1}{n} v_1 + \ldots + \binom{k+t}{n} v_{n-k} .$$

Si E est homogène, la formule (9) permet d'affirmer que les deux seconds membres ci-dessus sont égaux, ce qui donne de proche en proche :

$$\begin{array}{lll} v_{n-k} = v_0 & & \text{pour } t = 0 \\ v_{n-k-1} = v_1 & & \text{pour } t = 1 \\ v_{n-k-2} = v_2 & & \text{pour } t = 2, \text{ etc.} \end{array}$$

Le calcul numérique effectif de $v_0\ v_1\ v_2 \ldots v_{n-k}$, pour E homogène donné, est aisé à conduire, lorsque P(t) est connu sous la forme (1), à l'aide des formules (7) ; la symétrie interne de la suite constitue une vérification du calcul. Quelques exemples seront donnés plus loin.

9. DEGRES 1 ET 2

Pour n donné, le plus simple des ensembles partiellement ordonnés homogènes est celui qui a pour degré k=1, c'est-à-dire l'ensemble totalement désordonné. Malgré la trivialité de ce premier exemple, l'illustration des résultats ci-dessus n'est déjà pas tout à fait triviale.

On a en effet $P(t) = t^n$; les coefficients u_r de la formule (1) sont les nombres de Stirling de 2^{me} espèce multipliés par r! :

$$u_r = r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - \ldots$$

Quant aux nombres v , ce sont les nombres dits "eulériens" (cf. [7]), qui décomposent (symétriquement) les n! permutations de (1 2 ... n) suivant le nombre de décrochements et dont le tableau commence comme suit :

	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4 ...
n = 1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1 ;

la récurrence permettant de former les lignes successives de ce tableau est

$$v_d(n) = (d+1)v_d(n-1) + (n-d)v_{d-1}(n-1) .$$

N'importe lequel des n! ordres possibles peut être pris au départ comme extension linéaire L , donc comme singleton V_0 . Le singleton $V_{n-k} = V_{n-1}$ est donné par l'unique permutation présentant n-1 décrochements, laquelle définit $L' = \varphi(L)$ inverse (ou dual) de L .

Un intérêt spécial s'attache aux ensembles partiellement ordonnés E qui sont homogènes de degré k=2 . Leurs n éléments se partagent en p éléments minimaux et q éléments maximaux (p+q = n). Un tel ensemble est parfaitement défini soit par un graphe biparti (cf. [2]) sans sommets isolés, soit par un tableau de p lignes et q colonnes dont certaines cases sont marquées d'une croix, avec une croix au moins par ligne et par colonne.

le cas où p=1 (et de façon analogue celui où q=1) se ramène immédiatement au cas du degré 1 , puisque l'ensemble des extensions linéaires se compose de tous les ordres, au nombre de (n-1)! , auxquels on impose comme seule contrainte d'avoir pour minimum un élément donné.

Les cas les plus simples à étudier vont donc être ceux où p=q=2 , et il n'y aura en fait que trois cas distincts (à un automorphisme près) , suivant que le nombre d'arêtes du graphe biparti correspondant sera 4, 3 ou 2 .

1°) Le cas de 4 arêtes (graphe "biparti complet" $K_{2,2}$) est pratiquement trivial : choisir une extension linéaire L revient à choisir arbitrairement et indépendamment l'un des deux ordres possibles sur les éléments minimaux et l'un des deux ordres possibles sur les éléments maximaux, d'où 4 possibilités en tout, et pour chacune d'elles la seule permutation $L' = \varphi(L)$ à deux décrochements est celle qui inverse ces deux ordres.

2°) Le cas de 3 arêtes, qui forment alors nécessairement une chaîne, donne 5 extensions linéaires possibles ($v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 1$). A n'importe laquelle L , prise comme singleton V_0 , en correspond une autre $L'=\varphi(L)$, qui est le singleton V_2 correspondant, et L' est dans un certain sens (à savoir par le nombre de décrochements) l'extension "la plus éloignée" de L.

Mais ici on constate un phénomène nouveau : la transformation φ qui fait passer de L à L' non seulement n'est plus involutive, mais n'est même plus bijective : il existe en effet une extension linéaire (ici une seule) qui n'apparaît jamais comme image d'une autre par φ .

La fig. 4 montre les 5 extensions possibles A B C D E (les points minimaux du graphe s'appellent m et m' et les points maximaux M et M')

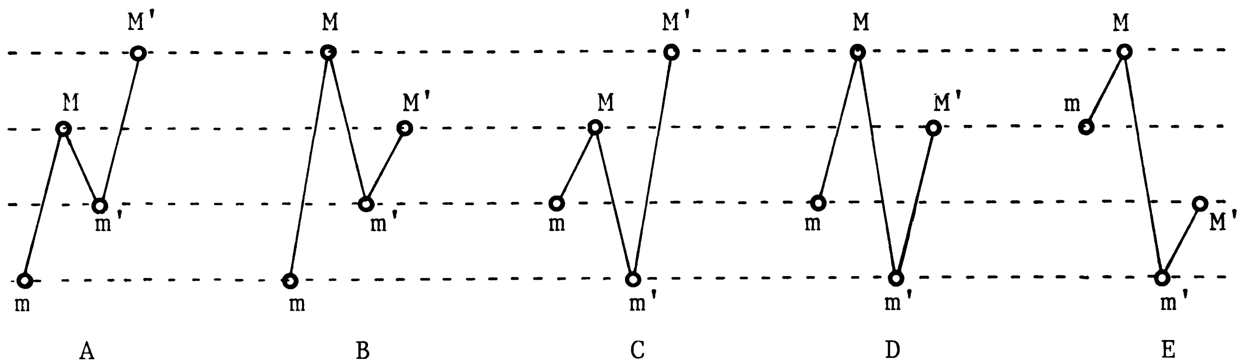

fig. 4

On s'assure aisément que

$$\varphi(A) = D \qquad \varphi(B) = C \qquad \varphi(C) = B \qquad \varphi(D) = A \qquad \varphi(E) = A ,$$

ce qui se traduit par un graphe de la transformation φ représenté fig. 5 :

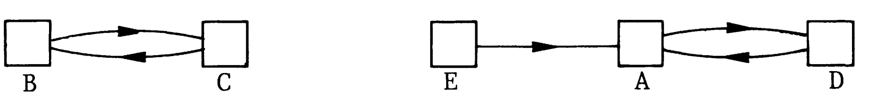

fig. 5

3°) Le cas de 2 arêtes, nécessairement isolées l'une de l'autre (graphe non connexe), donne 6 extensions linéaires possibles ($v_0 = 1$, $v_1 = 4$, $v_2 = 1$). Nous laissons au lecteur le soin de les représenter sur une figure analogue à la fig. 4 ; remarquons qu'elles correspondent aux 6 dispositions possibles des rimes dans un quatrain ayant deux rimes masculines et deux rimes féminines. On peut alors noter P_1 et P_2 les deux cas de "rimes plates", C_1 et C_2 les deux cas de "rimes croisées", E_1 et E_2 les deux cas de "rimes embrassées", et l'on vérifie que le graphe de la transformation φ se présente comme l'indique la fig. 6 :

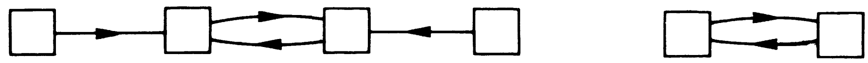

fig. 6

10. GRAPHES BIPARTIS

Dans le cas général des ordres partiels homogènes de degré 2, le calcul de u_n d'une part, celui de u_3 d'autre part, peuvent se conduire par des méthodes qui mettent en évidence deux propriétés générales des graphes bipartis. L'un et l'autre calcul s'appuient essentiellement sur la formule (3) relative aux polynômes P(t).

Relativement aux graphes bipartis, nous adopterons les notations que voici : les deux ensembles de sommets, de cardinaux respectifs p et q (avec p+q=n), seront appelés X et Y, l'ensemble des arêtes sera E ; l'ensemble des sommets de X adjacents à un sommet y de Y sera noté E(y) , la réunion des E(y) quand x parcourt une partie B de Y sera notée E(B) , et les cardinaux respectifs seront e(y) et e(B). La même lettre E désignera sans ambiguïté l'ordre partiel défini sur $X \cup Y$ par le fait que $x < y$ ssi x et y sont adjacents.

<u>1ère propriété</u>

Dans la formule (3), le degré des polynômes est n-1 dans l'un et l'autre membres. Comme, par suite de (1), P_E a pour terme de plus haut degré

$$u_n \frac{t^n}{n!} ,$$

ΔP_E a pour terme de plus haut degré $u_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$. Le second membre de (3) est une somme de polynômes dont seuls sont de degré n-1 ceux pour lesquels H est un singleton {j}. Si, pour plus de clarté, on remplace l'écriture u_n , qui est relative à E , par u(E) , la formule (3) indique ainsi que

$$(10) \qquad u(E) = \sum_{y \in Y} u(F_y) ,$$

où F_y désigne le graphe obtenu par suppression du sommet y de Y .

Grâce à (10), il sera aisé de monter, par récurrence sur q , que u(E) peut être calculé par la formule suivante :

$$\frac{u(E)}{n!} = \sum_{\beta \in S_q} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{j + e(B_j^\beta)} ,$$

où S_q désigne l'ensemble des permutations de Y , et où B_j^β est la partie de Y formée des j premiers éléments de la permutation β . En effet si l'on regroupe, parmi les q! termes de cette somme, les (q-1)! termes correspondant à des β qui se terminent par le sommet y , et si l'on met en commun le dernier dénominateur q+e(Y) = q+p = n , on met en évidence le terme $u(F_y)$ de (10) , auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. L'amorçage de la récurrence pour q=1 est assuré par le fait que u(E) = p! = (n-1)! dans ce cas.

La propriété des graphes bipartis qui en résulte provient de la dualité ordinale, qui ne change pas u(E) ; elle peut s'exprimer par

$$(11) \qquad \sum_{\beta \in S_q} \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{j+e(B_j^\beta)} = \sum_{\alpha \in S_p} \prod_{i=1}^{p} \frac{i}{i+e(A_i^\alpha)} .$$

Elle s'étend, comme on s'en assure aisément, aux graphes pour lesquels des points isolés existent dans X ou dans Y ou dans les deux.

La valeur commune des deux membres de (11) est minimum pour le graphe complet $K_{p,q}$, qui la rend égale à $\frac{p!q!}{(p+q)!}$ et maximum pour le graphe sans arêtes, qui la rend égale à 1 .

2^{me} propriété

u_2 est égal à 1 pour tous les graphes homogènes de degré 2; pour les graphes de degré 2 qui ne sont pas homogènes et qui ont donc i points isolés, u_2 est égal à 2^i puisque chacun des points isolés peut être arbitrairement rattaché à chacun des deux niveaux.

La formule (3) indique que le u_3 de E s'obtient en faisant la somme de tous les u_2 des F(H), H étant n'importe quelle partie non-vide de Y . Ces F(H) sont tous de degré 2 , sauf F(Y) qui est de degré 1 , et dont le u_2 est donc 2^p-2 . Pour chacun des autres F(H) , u_2 est égal à 2^{i_H} , i_H

étant le nombre de points isolés dont la suppression de H provoque l'apparition ; on a donc aussi $i_H = p-e(B)$, où $B = Y-H$. Finalement on obtiendra

$$u_3(E) = -2 + \sum_B 2^{p-e}(B) \quad ,$$

en étendant la sommation à toutes les parties <u>non pleines</u> de Y ; si l'on préfère étendre à toutes les parties de Y , on peut écrire

$$u_3(E) = -3 + \sum_{B \subset Y} 2^{p-e}(B) \quad .$$

La propriété générale correspondante des graphes bipartis résulte de nouveau de la possibilité d'intervertir X et Y pour ce calcul, d'où

$$(12) \qquad \sum_{B\subset Y} 2^{p-e(B)} = \sum_{A\subset X} 2^{q-e(A)} \quad .$$

A son tour cette propriété s'étend à tous les graphes bipartis, même s'ils ont des points isolés.

La valeur commune des deux membres de (12) est de nouveau minimum pour le graphe complet $K_{p,q}$, qui la rend égale à $2^p + 2^q - 1$, et maximum pour le graphe sans arêtes, qui la rend égale à 2^{p+q} .

11. EXEMPLES HOMOGENES DE DEGRE QUELCONQUE

Lorsque E est homogène de degré k quelconque, il est intéressant d'étudier les transformations de l'ensemble de ses extensions linéaires du point de vue qui était celui des exemples donnés plus haut pour k=2 . Cette étude fera l'objet d'une publication ultérieure.

Nous nous contentons ici de mentionner trois des exemples les plus simples d'ensembles partiellement ordonnés homogènes de degré quelconque ; tous trois sont composés de 2m points $a_1\ a_2 \ldots\ a_m \quad b_1\ b_2 \ldots\ b_m$

$$\begin{aligned} &a_1 < a_2 < \ldots < a_m \\ &b_1 < b_2 < \ldots < b_m \quad , \end{aligned}$$

mais avec en outre les conditions suivantes :

pour le premier (fig. 7) : $\quad a_i < b_j$ et $b_i < a_j \quad$ ssi $i < j$

pour le second (fig. 8) : a_i et b_j incomparables $\forall(i,j)$

pour le troisième (fig. 9) : $a_i < b_j$ ssi $i < j$.

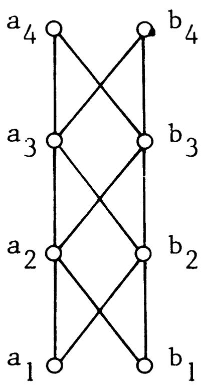

fig. 7

$n = 2m$ $\qquad u_n = 2^m$

$k = m$ $\qquad u_r = 2^{r-m} \binom{m}{r-m}$

$v_d = \binom{m}{d}$

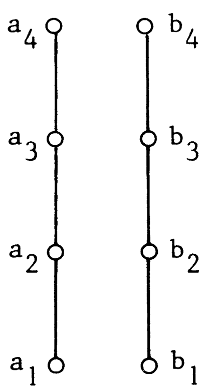

fig. 8

$n = 2m$ $\qquad u_n = \binom{2m}{m}$

$k = m$ $\qquad u_r = \binom{r}{r-m\ \ r-m\ \ 2m-r}$

$v_d = \binom{m}{d}^2$

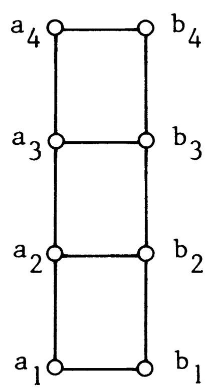

fig. 9

$n = 2m$ $\qquad u_n = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{r}$

$k = m+1$ $\qquad u_r = \frac{1}{m} \binom{m}{r-m} \binom{r}{m+1}$

$v_d = \frac{1}{m} \binom{m}{d} \binom{m}{d+1}$

Les calculs sont assez simples dans les trois cas pour que nous laissions au lecteur le soin de les vérifier ; ils sont quasi triviaux dans le premier des trois. Dans le deuxième il est remarquable que les v_d soient des carrés de binomiaux et les u_r des trinomiaux. Enfin dans le troisième, on voit apparaître pour v_d les nombres dits parfois de Runyon ou de Narayana ([8], [5]) et pour u_r les nombres de Raney ([6]) ; les relations (6) et (7) constituent entre ces différentes sortes de nombres des identités faciles à établir par calcul direct, mais intéressantes surtout par leurs significations énumératives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT M. et MONJARDET B., Ordre et Classification, Paris, Hachette, 1970.

[2] BERGE C., Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970.

[3] DUSHNIK B. et MILLER E.W., "Partially ordered sets", Am. J. Math., 63, (1941), 600-610.

[5] NARAYANA T.V. et SATHE Y.S., "Minimum variance unbiased estimation in coin tossing problems", Sankhya A, 32, 2, (1961), 183.

[6] RANEY G.N., "Functional composition patterns and power series reversion", Trans. Am. Math. Soc., 94, (1960).

[7] RIORDAN J., An introduction of combinatorial analysis, N.Y., Wiley, 1958.

[8] RIORDAN J., Combinatorial Identities, N.Y., Wiley, 1968, 17.

[9] ROTA G.C., "On the foundations of combinatorial theory", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie u. verw. Geb., 2, (1964), 340-368.

[10] STANLEY R., "Ordered Structures and Partitions", Memoirs of the Am. Math. Soc., 119, (1972).