MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

MICHEL GONZALEZ

Choix certains et incertains : réexamen de l'axiome de choix de Luce pour une mesure des valeurs

Mathématiques et sciences humaines, tome 71 (1980), p. 5-38

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__71__5_0>

Math. Sci. hum. (18[e] année, n°71, 1980, p.5-38)

CHOIX CERTAINS ET INCERTAINS : REEXAMEN DE L'AXIOME DE CHOIX DE LUCE POUR UNE MESURE DES VALEURS

Michel GONZALEZ*

1. INTRODUCTION

La théorie des choix incertains que développe Luce dans Individual Choice Behavior, permet de construire une échelle de valeurs des objets comparés, qui reflète en un certain sens la force de la réponse. Elle constitue à ce titre une contribution décisive à la théorie de la mesure en Psychologie.

Un système de choix associé à un univers d'objets, est défini par une loi de probabilité sur chaque partie finie de cet ensemble : c'est supposer là que, pour tout ensemble soumis à choix, la réponse d'un individu (son choix) peut être décrite par une probabilité. Cette probabilité peut être éventuellement nulle (si un élément n'est jamais choisi) ou égale à un (lorsqu'un des éléments est toujours choisi contre les autres). Un tel système rend compte de l'incertitude ou de la force des réponses mais il est morcelé car il y a autant de lois de probabilités qu'il y a d'ensembles soumis à choix. L'axiome de choix de Luce est un ensemble d'hypothèses sur les relations qu'entretiennent ces probabilités. Il permet dans certains cas d'en déduire une échelle de rapports v sur l'univers des objets, qui a la propriété suivante : si E est une partie finie de cet univers, dont aucun élément n'est choisi avec une probabilité nulle, la probabilité de choisir x dans E n'est autre que le rapport $v(x)/\sum_{y\in E} v(y)$. En ce sens, v décrit aussi le caractère plus ou moins décisif du choix, mais indépendamment de l'en-

* Laboratoire de Psychologie de la Culture (Equipe de Recherche de l'Université de Paris X, associée au C.N.R.S.), Centre Universitaire Saint-Charles, 162 rue Saint-Charles, 75740 PARIS CEDEX 15.

semble dans lequel il s'exprime.

L'axiome de choix postule deux propriétés distinctes, selon que des éléments d'un ensemble ont ou non des probabilités de choix nulles. En fait, la difficulté d'une mesure des objets, tient essentiellement à l'existence de choix sans incertitude (probabilités de choix égales à 0 ou à 1). Luce a sans doute été le premier à s'interroger sur les conséquences d'une coexistence possible de choix certains et incertains (Luce, 1959 p. 18); peut-être aussi le dernier : vingt ans plus tard (Luce, 1977), il semble clair que le seul cas qui ait donné lieu à des prolongements théoriques appréciables, soit celui de systèmes dont aucune probabilité de choix n'est nulle.

Après avoir défini ou rappelé quelques notions et résultats préliminaires, cette étude se propose d'examiner les conditions nécessaires et suffisantes permettant de construire une échelle de rapports v qui rende compte de la force de la réponse par des propriétés plus ou moins restrictives. Il apparaîtra qu'un axiome de choix affaibli suffit à déterminer une échelle qui vérifie les conditions de Luce. Il se révèlera par contre insuffisant pour éviter certains paradoxes mis en évidence par des contre-exemples.

2. NOTIONS PRELIMINAIRES

DEFINITION 1 Soit U un ensemble; $\Phi(U)$ l'ensemble des parties finies non vides de U. On dit que $P = \{P_E \ / \ E \in \Phi(U)\}$ est un système de choix sur U si, quel que soit E dans $\Phi(U)$, P_E est une fonction de E à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, telle que

$$\sum_{x \in E} P_E(x) = 1. \qquad (1)$$

U est l'univers des objets considérés, fini ou non. $\Phi(U)$ est l'ensemble des parties de U qui pourraient être effectivement soumises à choix. $P_E(x)$ peut être interprété comme une probabilité de choisir x dans E. Si F est un sous-ensemble de E, la probabilité $P_E(F)$ de choisir dans E un élément de F, devra alors être définie par

$$P_E(F) = \sum_{y \in F} P_E(y). \qquad (2)$$

$P_{\{x,y\}}(x)$ sera plutôt noté $P(x,y)$. On dira que c'est la probabilité de choisir x contre y. En convenant de plus $P(x,x) = 1/2$, on note que

$$\forall x \in U;\ \forall y \in U;\ P(x,y) + P(y,x) = 1. \qquad (3)$$

Il conviendra d'ailleurs de ne pas confondre $P(x,x)$ avec $P_{\{x\}}(x)$ qui vaut 1.

DEFINITION 2 On dit qu'un système de choix P sur U est un <u>système de choix de Luce</u> s'il vérifie les deux conditions (i) et (ii) ci-dessous :

(i) si $\forall x\in E;\ \forall y\in E;\ P(x,y) > 0$, alors

$$\forall F\subset E;\ \forall x\in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F) \qquad (4)$$

(ii) s'il existe deux éléments de E, x et y, tels que $P(x,y) = 0$ alors

$$\forall F\subset E;\ P_E(F) = P_{E-\{x\}}(F-\{x\}). \qquad (5)$$

Il s'agit là de la définition de l'<u>axiome de choix</u> donnée par Luce (1959 p. 6). Le cas (i) est équivalent à

$$\forall F\subset E;\ \forall G\subset F;\ P_E(G) = P_F(G).P_E(F);$$

le cas (ii) à

$$\forall y\in E-\{x\};\ P_E(y) = P_{E-\{x\}}(y).$$

Autrement dit, s'il existe un élément y de E choisi avec certitude contre x, celui-ci n'est pas pertinent au choix dans E, les probabilités restant inchangées dans E-{x}. Cette dernière propriété n'est d'ailleurs pas spécifique à l'axiome de choix. Les systèmes de choix <u>réguliers</u> (voir Luce et Suppes, 1965 p. 342) sont caractérisés par le fait que la probabilité de choisir un élément donné ne peut croître lorsqu'on ajoute de nouveaux éléments à l'ensemble dans lequel s'exprime le choix, c'est-à-dire :

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall F\subset E;\ \forall x\in F;\ P_F(x) \geq P_E(x). \qquad (6)$$

Or, tout système de choix régulier vérifie le cas (ii) de l'axiome de choix:

LEMME 1 <u>Si</u> P <u>est un système de choix régulier et s'il existe deux éléments de</u> E, x <u>et</u> y, <u>tels que</u> $P(x,y) = 0$,

$$\forall F\subset E;\ P_E(F) = P_{E-\{x\}}(F-\{x\}).$$

<u>Preuve</u> Soit P, un système de choix régulier; x et y deux éléments de E, tels que $P(x,y) = 0$. Comme $P_E(x) \leq P(x,y)$, $P_E(x) = 0$ et $\sum_{y\in E-\{x\}} P_E(y) = 1$. Or,

$$\forall y\in E-\{x\};\ P_{E-\{x\}}(y) \geq P_E(y).$$

Mais comme

$$\sum_{y\in E-\{x\}} P_{E-\{x\}}(y) = \sum_{y\in E-\{x\}} P_E(y) = 1,$$

on en déduit aussitôt,

$$\forall y\in E-\{x\};\ P_{E-\{x\}}(y) = P_E(y),$$

et par conséquent :

$$\forall F\subset E;\ P_E(F) = P_{E-\{x\}}(F-\{x\}).$$

Parfois (voir notamment Luce et Galanter, 1963; Luce et Suppes, 1965), l'axiome de choix est plutôt défini par

$$\forall E\in\Phi(\mathcal{U});\ \forall F\subset E;\ \forall x\in F;$$
$$P_E(F) > 0 \Longrightarrow P_F(x) = P_E(x)/P_E(F). \qquad (7)$$

Autrement dit, la probabilité de choisir x dans F serait la probabilité conditionnelle de choisir x dans E, sachant que le choix se porte dans F. Ces deux définitions ne sont pas équivalentes s'il existe des probabilités de choix nulles. Dans ce dernier cas, on parlera plutôt de <u>système de Luce absorbant</u> :

DEFINITION 3 On dit que P est un <u>système de choix de Luce absorbant</u> si

$$\forall E\in\Phi(\mathcal{U});\ \forall F\subset E;\ \forall x\in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F). \qquad (8)$$

Les propriétés (7) et (8) sont équivalentes car, lorsque $P_E(F)$ s'annule, $P_E(x)$ s'annule aussi lorsque x appartient à F.

Pour dégager ce qui différencie les systèmes de Luce absorbants des systèmes de Luce, on distinguera d'abord dans toute partie finie E de $\mathcal{U}$, les ensembles :

$$E^{P+} = \{x\in E\ /\ P_E(x) > 0\},$$
$$E^{Po} = \{x\in E\ /\ P_E(x) = 0\}$$
et $$E^{P>} = \{x\in E\ /\ \forall y\in E;\ P(x,y) > 0\}.$$

(E^{P+}, E^{Po}) forme une partition de E. Le cas (i) de l'axiome de choix concerne les seuls ensembles E tels que $E = E^{P>}$.

LEMME 2 <u>Si</u> P <u>est un système de choix de Luce</u>,

$$\forall E\in\Phi(\mathcal{U});\ E^{P>} = E^{P+}. \qquad (9)$$

<u>Preuve</u> Soit P un système de choix de Luce; $E\in\Phi(\mathcal{U})$ et $x\in E$.

S'il existe un élément y de E tel que P(x,y) = 0, Luce (1959, lemme 1 p. 6) montre que $P_E(x) = 0$, c'est-à-dire $E^{P+}\subset E^{P>}$.

Réciproquement, si E est réduit à un ou deux éléments, $E^{P>}\subset E^{P+}$. On vérifie par récurrence sur le nombre d'éléments de E, la généralité de ce résultat. Si x appartient à $E^{P>}$, pour toute partie stricte F de E, $x\in F^{P>}$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $P_F(x) > 0$. S'il existe dans E, deux éléments y et z tels que P(y,z) = 0, conformément au cas (ii) de l'axiome de choix,

$$P_E(x) = P_{E-\{y\}}(x) > 0.$$

Sinon, $E = E^{P>}$ et d'après le cas (i) de l'axiome de choix :

$$\forall y \in E-\{x\};\ P_E(x) = P(x,y).(P_E(x) + P_E(y)),$$

ce qui montre que $P_E(x)$ ne peut être nul, car dans un tel cas, $P_E(y) = 0$, quel que soit y dans E. En conclusion, $x \in E^{P+}$, et $E^{P>} = E^{P+}$. C.Q.F.D.

Cette propriété des systèmes de choix de Luce, permet de préciser les caractéristiques d'un système de Luce absorbant :

LEMME 3 P <u>est un système de Luce absorbant si et seulement si c'est un système de Luce tel que</u>

$$P(x,y) = 1 \Longrightarrow (\forall z \in U;\ P(x,z) = 1 \text{ ou } P(z,y) = 1). \qquad (10)$$

<u>Preuve</u> Si P est un système de Luce absorbant, il vérifie évidemment la propriété (4) du cas (i) de l'axiome de choix. S'il existe t et z dans E, tels que $P(t,z) = 0$, comme $P_E(t) = P(t,z).(P_E(t) + P_E(z))$, $P_E(t) = 0$. Par conséquent, pour toute partie F de E, $P_E(F) = P_E(F-\{t\})$, que t appartienne ou non à F. Mais aussi : $P_E(F) = P_{E-\{t\}}(F-\{t\}).P_E(E-\{t\})$, et comme $P_E(E-\{t\}) = 1$ car $P_E(t) = 0$, $P_E(F) = P_{E-\{t\}}(F-\{t\})$, ce qui montre que P est un système de choix de Luce.

Si $P(x,y) = 1$ et $E = \{x,y,z\}$, comme $P_E(y) = 0$ d'après le lemme 2, $P(y,z).P_E(z) = 0$, c'est-à-dire $P(z,y) = 1$ ou $P_E(z) = 0$. Dans ce dernier cas, $P_E(x) = 1$, et comme $P_E(x) = P(x,z).(P_E(x) + P_E(z))$, $P(x,z) = 1$, ce qui montre que P est un système de choix de Luce qui vérifie la propriété (10).

Réciproquement, si P est un système de Luce qui vérifie (10), P est un système de Luce absorbant si, lorsqu'il existe u et v dans E tels que $P(u,v) = 0$, $P_E(x) = P_F(x).P_E(F)$, quels que soient F inclus dans E et x appartenant à F. On peut en faire une démonstration par récurrence, le résultat s'avérant trivial lorsque E ne contient que un ou deux éléments. Deux cas sont à distinguer, selon que $P_E(x)$ est nul ou non :

(a) si $P_E(x) = 0$, il existe d'après le lemme 2, un élément t de E, tel que $P(t,x) = 1$. Mais si $P_F(x) > 0$, $P(x,y) > 0$, quel que soit y dans F, et d'après (10), $P(t,y) = 1$ pour tout y dans F, donc $P_E(F) = 0$.

(b) par contre, si $P_E(x) > 0$, quel que soit y dans E, $P(x,y) > 0$. Mais comme $P(u,v) = 0$, donc $u \neq x$, on obtient avec le cas (ii) de l'axiome de choix :

$$P_E(x) = P_{E-\{u\}}(x)$$

et de la même façon :

$$P_E(F) = P_{E-\{u\}}(F-\{u\}).$$

Mais aussi,

$$P_F(x) = P_{F-\{u\}}(x),$$

résultat trivial lorsque u n'appartient pas à F et qui, autrement, découle du fait que $P(u,x) = 0$ d'après (10). Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_{E-\{u\}}(x) = P_{F-\{u\}}(x).P_{E-\{u\}}(F-\{u\}).$$

Par conséquent, avec les trois égalités précédentes :

$$P_E(x) = P_F(x).P_E(F). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Une première distinction relative à l'existence éventuelle de choix certains, va s'avérer utile lorsqu'il s'agira de construire une échelle sur U :

DEFINITION 4 Un système de choix P sur U est dit partout incertain, ou U est P-incertain, si

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E;\ P_E(x) > 0. \qquad (11)$$

Dans le cas contraire, on dit que P n'est que localement incertain.

Luce énonce des conditions qui assurent l'existence d'une échelle de rapports v sur U, telle que

$$E^{P>} = E \Longrightarrow \forall x \in E;\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y \in E} v(y). \qquad (12)$$

En particulier, si P est un système de choix de Luce partout incertain, v existe, que U soit fini (Luce, 1959) ou infini (Luce et Galanter, 1963). Plus généralement (si P n'est que localement incertain; cf. Luce, 1959 p. 25), deux conditions relatives aux probabilités de choix binaires, connexité et transitivité stochastique, permettent de construire v.

3. LE CAS DES SYSTEMES DE CHOIX PARTOUT INCERTAINS

La construction de v ne présente aucune difficulté réelle si P est un système de choix partout incertain. Le cas (ii) de l'axiome de choix de Luce ne concerne pas de tels systèmes, la distinction entre systèmes de choix de Luce et systèmes de Luce absorbants ne s'avérant plus pertinente.

Rappelons que $v: U \to \mathbb{R}$ est une échelle pour P si v vérifie des propriétés spécifiées qui mettent P et v en relation. Si toute autre échelle v' pour P, vérifiant les mêmes propriétés, est de la forme $v' = c.v$ (c étant une constante strictement positive), on dit que v est une <u>échelle de rapports</u>.

THEOREME 1 <u>Il existe une échelle de rapports strictement positive</u>, v, <u>telle que</u>

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall x\in E;\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E} v(y) \qquad (13)$$

<u>si et seulement si P est un système de choix de Luce partout incertain.</u>

<u>Preuve</u> Si une telle échelle strictement positive existe, P est partout incertain. En particulier, $E^{P>} = E$, ce qui permet de restreindre l'examen de l'axiome de choix au cas (i). Or, si F est une partie de E, et si x appartient à F :

$$P_F(x).P_E(F) = (v(x)/\sum_{z\in F} v(z)).\ (\sum_{z\in F} v(z)/\sum_{y\in E} v(y))$$

ou, en simplifiant :

$$P_F(x).P_E(F) = v(x)/\sum_{y\in E} v(y),$$

c'est-à-dire $P_E(x)$, ce qui montre que P est un système de Luce partout incertain.

Réciproquement, si P est un système de choix de Luce partout incertain et a un élément de U, on pose :

$$\forall x\in U;\ v(x) = P(x,a)/P(a,x).$$

Comme

$$\frac{P(y,x)}{P(x,y)} = \frac{P(y,a).P(a,x)}{P(x,a).P(a,y)}$$

(Luce, 1959 théor. 2 p. 16), on en déduit immédiatement

$$\forall x\in U;\ \forall y\in U;\ v(y)/v(x) = P(y,x)/P(x,y). \qquad (14)$$

Or, si x appartient à E, comme $\sum_{y\in E} P_E(y) = 1$,

$$P_E(x) = 1/\sum_{y\in E} P_E(y)/P_E(x)). \qquad (15)$$

Mais (Luce, lemme 3 p. 9), $\forall y\in E;\ P_E(y)/P_E(x) = P(y,x)/P(x,y)$. Par conséquent, d'après (14) et (15),

$$P_E(x) = 1/(\sum_{y\in E} v(y)/v(x)),$$

c'est-à-dire

$$P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E} v(y),$$

ce qui montre que v est une échelle pour P. Si v' est une autre échelle pour P, telle que $P_E(x) = v'(x)/\sum_{y\in E} v'(y)$, on en déduirait immédiatement, en considérant $E = \{x,y\}$,

$$\forall x\in U;\ \forall y\in U;\ v'(x)/v'(y) = P(x,y)/P(y,x).$$

En particulier, comme $v(a) = 1$: $\forall x\in U$; $v'(x)/v'(a) = v(x)$, c'est-à-dire

$v' = v'(a).v$ ($v'(a)$ est bien sûr strictement positif d'après (13)).

4. EXTENSION A DES SYSTEMES LOCALEMENT INCERTAINS POUR UNE CLASSE PLUS LARGE D'ECHELLES

Il convient de noter qu'un système de choix de Luce partout incertain est caractérisé par deux propriétés :

$$\forall x \in U;\ \forall y \in U;\ P(x,y) > 0$$

et le cas (i) de l'axiome de choix qui se ramène d'ailleurs ici à

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall F \subset E;\ \forall x \in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F).$$

Autrement dit, c'est un système de Luce absorbant dont les probabilités de choix binaires ne sont jamais nulles. Quant au cas (ii), il n'a pas à être envisagé ici.

Luce considère aussi pour les systèmes de choix qui ne sont que localement incertains, l'existence d'une échelle v qui vérifierait la propriété (13) seulement lorsque $E^{P>} = E$, c'est-à-dire telle que

$$E^{P>} = E \Longrightarrow \forall x \in E;\ P_E(x) = v(x) / \sum_{y \in E} v(y).$$

On montrera ici que, de nouveau, le cas (ii) de l'axiome de choix n'est pas pertinent au problème (si $E^{P>}$ est distinct de E, P_E peut être quelconque) : le cas (i) et une condition supplémentaire de connexité relative aux probabilités de choix binaires, vont suffire à construire une telle échelle.

Rappelons le cas (i) qui constitue la première propriété d'un système de choix de Luce :

cas (i) $E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall F \subset E;\ \forall x \in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F))$. $E^{P>}$ est l'ensemble des éléments de E qui sont choisis contre chacun des autres éléments de E avec une probabilité non nulle.

LEMME 4 Si P vérifie le cas (i) de l'axiome de choix,

$$(E = E^{P>}) \Longrightarrow (E = E^{P+}).$$

Preuve Si $E = E^{P>}$, et si l'on suppose que E^{P+} est distinct de E, il existerait par définition un élément x de E tel que $P_E(x) = 0$. Alors, conformément au cas (i) :

$$\forall y \in E - \{x\};\ P(x,y).(P_E(x) + P_E(y)) = 0.$$

Mais comme $P(x,y) > 0$ et $P_E(x) = 0$,

$$\forall y \in E;\ P_E(y) = 0,$$

ce qui est absurde.

LEMME 5 P <u>vérifie le cas (i) de l'axiome de choix si et seulement si</u>

$$E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall F \subset E;\ \forall x \in F;\ \forall y \in F;\quad P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x)). \qquad (16)$$

<u>Preuve</u> Soit $E = E^{P>}$; F une partie de E. Alors $F = F^{P>}$.

Si P vérifie (i), quels que soient x et y dans F, il est clair avec le lemme 4 que

$$P_E(x)/P_E(y) = P_F(x)/P_F(y). \qquad (17)$$

Réciproquement, si P vérifie (16),

$$\sum_{y \in F} P_E(x).P_F(y) = \sum_{y \in F} P_E(y).P_F(x),$$

c'est-à-dire

$$P_E(x) = P_F(x).P_E(F).$$

LEMME 6 <u>Si</u> P <u>vérifie le cas (i) de l'axiome de choix,</u>

$$E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall x \in E;\ P_E(x) = 1/(\sum_{y \in E} P(y,x)/P(x,y)). \qquad (18)$$

<u>Preuve</u> Soit $E = E^{P>}$. Si P vérifie le cas (i) de l'axiome de choix, $E = E^{P+}$ (lemme 4). Par conséquent,

$$\forall x \in E;\ 1/P_E(x) = \sum_{y \in E} P_E(y)/P_E(x).$$

Mais, d'après le lemme 5 (notamment (17), en posant $F = \{x,y\}$) :

$$\forall x \in E;\ 1/P_E(x) = \sum_{y \in E} P(y,x)/P(x,y),$$

c'est-à-dire (18).

LEMME 7 <u>Si</u> P <u>vérifie le cas (i) de l'axiome de choix et si</u> $\{x,y,z\} = \{x,y,z\}^{P>}$,

$$\frac{P(x,y)}{P(y,x)} = \frac{P(x,z).P(z,y)}{P(y,z).P(z,x)}. \qquad (19)$$

<u>Preuve</u> Soit $E = \{x,y,z\}$ et $E = E^{P>}$. On a d'après le lemme 4,

$$\frac{P_E(x).P_E(y).P_E(z)}{P_E(y).P_E(z).P_E(x)} = 1,$$

et d'après le lemme 5,

$$\frac{P(x,y)}{P(y,x)} \cdot \frac{P(y,z).P(z,x)}{P(z,y).P(x,z)} = 1,$$

qui mène immédiatement à (19). C.Q.F.D.

La notion de chaîne P-incertaine va permettre de définir la classe des systèmes de choix connexes, qui est une extension directe de celle des systèmes de choix partout incertains.

DEFINITION 5 Tout m+1-uple $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ d'éléments de U est appelé une chaîne P-incertaine lorsque

$$\forall j\in\{0,1,..,m-1\};\ 0 < P(t_j,t_{j+1}) < 1.$$

On dit que m est la longueur de cette chaîne.
Si de plus $t_0 = x$ et $t_m = y$, on dit que $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à y.

DEFINITION 6 On dit qu'un système de choix P sur U est connexe, ou que U est P-connexe si, quels que soient x et y dans U, il existe une chaîne P-incertaine de x à y.

La connexité définie ici est plus large que celle qu'envisage Luce (1959 déf. 1 p. 25). Si la probabilité P(x,y) de choisir x contre y est incertaine, c'est-à-dire si $0 < P(x,y) < 1$, (x,y) est une chaîne P-incertaine de x à y. Par conséquent, tout système de choix partout incertain est connexe.

DEFINITION 7 Si $t = (t_0,..,t_j,..,t_m)$ et $u = (u_0,..,u_k,..,u_p)$ sont des chaînes P-incertaines, on dit que t est insérée dans u, s'il existe une injection croissante δ de $\{0,..,j,..,m\}$ dans $\{0,..,k,..,p\}$, telle que

$$\delta(0) = 0;\ \delta(m) = p \quad \text{et} \quad \forall j\in\{0,1,..,m\};\ t_j = u_{\delta(j)}.$$

Cette notion s'avère utile lorsque l'on doit comparer diverses chaînes P-incertaines de x à y.

LEMME 8 Si P est un système de choix qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix et si $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine insérée dans $(u_0,..,u_k,..u_p)$,

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{P(u_k,u_{k+1})}{P(u_{k+1},u_k)}\ . \qquad (20)$$

Preuve Si p = 1, le résultat est immédiat car $u = (u_0,u_1)$, et d'après la définition d'une insertion, $t = (t_0,t_1) = (u_0,u_1)$. On peut alors par induction se limiter au cas où m = p-1, la chaîne P-incertaine dans laquelle t est insérée étant de la forme $(t_0,..,t_j,x,t_{j+1},..,t_m)$ $(j\in\{0,1,..,m-1\})$.
L'identité (20) se ramène dans ce cas à

$$\frac{P(t_j,x).P(x,t_{j+1})}{P(x,t_j).P(t_{j+1},x)} = \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)},$$

ce que confirme le lemme 7 lorsque x, t_j et t_{j+1} sont tous trois distincts car dans ce cas, $\{x,t_j,t_{j+1}\} = \{x,t_j,t_{j+1}\}^{P>}$ par définition d'une chaîne P-incertaine. Dans le cas contraire, cette identité se vérifie d'ailleurs immédiatement, en rappelant la convention $P(x,x) = 1/2$.

LEMME 9 Si P vérifie le cas (i) de l'axiome de choix et si $(t_0,..,t_m)$ et $(s_0,..,s_n)$ sont deux chaînes P-incertaines de x à y,

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(s_k,s_{k+1})}{P(s_{k+1},s_k)} . \qquad (21)$$

Preuve Soient $(t_0,..,t_m)$ et $(s_0,..,s_n)$ deux chaînes P-incertaines de x à y. Par définition, $t_0 = s_0 = x$ et $t_m = s_n = y$. Définissons $u = (u_0,..,u_{2m+n})$ par $\forall j\in\{0,..,m\};\ u_j = t_j,$

$\forall j\in\{m+1,..,2m\};\ u_j = t_{2m-j},$

$\forall j\in\{2m+1,..,2m+n\};\ u_j = s_{j-2m},$

c'est-à-dire $u = (t_0,..,t_j,..,t_m,t_{m-1},..,t_j,..,t_0,s_1,..,s_k,..,s_n)$. u est aussi une chaîne P-incertaine de x à y. t et s sont toutes deux insérées dans u : t par $\delta(j) = j$ si $0 \le j \le m$ et $\delta(m) = 2m+n$; s par $\nu(0) = 0$ et $\nu(k) = 2m + k$ si $1 \le k \le n$. L'identité (21) se déduit alors aussitôt du lemme 8. C.Q.F.D.

Ces divers résultats permettent de démontrer le théorème central suivant :

THEOREME 2 Il existe une échelle de rapports strictement positive, v, telle que

$$E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall x\in E;\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E} v(y)), \qquad (22)$$

si et seulement si P est un système de choix connexe qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix de Luce.

Preuve Soit P un système de choix connexe qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix. On fixe un élément a de U. Pour tout élément x de U, il existe par hypothèse une chaîne P-incertaine de x à a, $(t_0,..,t_m)$. On pose alors

$$v(x) = \prod_{j=0}^{m-1} (P(t_j,t_{j+1})/P(t_{j+1},t_j)). \qquad (23)$$

v est bien définie d'après le lemme 9. Soient x et y des éléments de U. Si

$(s_0,..,s_k,..,s_n)$ est une chaîne P-incertaine de y à x et $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ une chaîne P-incertaine de x à a, $(s_0,..,s_k,..,s_n,t_1,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de y à a car $s_n = t_0 = x$. Par conséquent,

$$v(y) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(s_k,s_{k+1})}{P(s_{k+1},s_k)} . \prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)} ,$$

c'est-à-dire,

$$v(y)/v(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (P(s_k,s_{k+1})/P(s_{k+1},s_k)), \qquad (24)$$

$(s_0,..,s_n)$ étant, rappelons-le, une chaîne P-incertaine de y à x. En particulier, si $0 < P(x,y) < 1$, (y,x) est une chaîne P-incertaine de y à x, et d'après (24),

$$v(y)/v(x) = P(y,x)/P(x,y). \qquad (25)$$

Soit alors E une partie finie non vide de U, telle que $E = E^{P>}$. Du lemme 6 et de (25), on déduit immédiatement

$$\forall x \in E;\ P_E(x) = 1/(\sum_{y \in E} v(y)/v(x)),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in E;\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y \in E} v(y),$$

ce qui montre que v est une échelle qui vérifie (22). Soit alors v' une autre échelle telle que

$$E = E^{P>} \Longrightarrow (\forall x \in E;\ P_E(x) = v'(x)/\sum_{y \in E} v'(y)).$$

Si y et z sont deux éléments de U tels que $0 < P(y,z) < 1$, on a en particulier $P(y,z) = v'(y)/(v'(y) + v'(z))$ et $P(z,y) = v'(z)/(v'(y) + v'(z))$. Par conséquent,

$$v'(y)/v'(z) = P(y,z)/P(z,y).$$

Ce résultat reste vrai si $y = z$. Or, si $(t_0,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à a, on déduit immédiatement de (23) :

$$v(x) = \prod_{j=0}^{m-1} (v'(t_j)/v'(t_{j+1})),$$

c'est-à-dire

$$v(x) = v'(t_0)/v'(t_m).$$

Comme par définition $t_0 = x$ et $t_m = a$, on en déduit

$$\forall x \in U;\ v'(x) = v'(a).v(x),$$

ce qui montre que v est une échelle de rapports.

Réciproquement, soit P un système de choix sur U, tel qu'il existe une échelle de rapports strictement positive v qui vérifie (22). On peut supposer ici que U contient au moins deux éléments distincts (autrement, il n'existe qu'un seul système de choix sur U, qui est connexe et vérifie (i)!). Si $E = E^{P>}$ et F est inclus dans E, il est clair que $F = F^{P>}$. Par conséquent,

$$\forall x \in F;\ P_F(x) = v(x) / \sum_{y \in F} v(y).$$

De plus,

$$P_E(F) = \sum_{y \in F} v(y) / \sum_{z \in E} v(z).$$

Ainsi,

$$P_F(x).P_E(F) = v(x) / \sum_{z \in E} v(z), \text{ c'est-à-dire } P_E(x) = P_F(x).P_E(F),$$

qui n'est autre que la condition (i) de l'axiome de choix de Luce.

Il reste à montrer que P est connexe. Ce résultat découle essentiellement du fait que v est une échelle de rapports. On en fera une démonstration par l'absurde, en supposant que P n'est pas connexe. Deux cas doivent être distingués :

(a) quels que soient x et y, distincts, il n'existe aucune chaîne P-incertaine de x à y. Autrement dit, si x et y sont distincts, $P(x,y)$ vaut 0 ou 1. Soit alors $E \in \Phi(U)$ et $x \in E^{P>}$. Tout élément y de E, distinct de x, est tel que $P(y,x) = 0$. Par conséquent, $E^{P>}$ contient au plus un élément et les seuls sous-ensembles de U tels que $E = E^{P>}$ sont de la forme $E = \{x\}$. Dans ces conditions, toute fonction $f: U \to \mathbb{R}_+^*$ vérifie (22) et v n'est pas une échelle de rapports si U contient au moins deux éléments.

(b) Il existe deux éléments distincts de U, a et b, et une chaîne P-incertaine de a à b. Si U n'est pas P-connexe, il existe aussi un élément c qui n'admet pas de chaîne P-incertaine de a à c (dans le cas contraire, quels que soient x et y, il y aurait une chaîne P-incertaine de a à x, $(t_0, .., t_m)$, une autre $(s_0, .., s_n)$ de a à y, et $(t_m, .., t_0, s_1, .. s_n)$ serait une chaîne P-incertaine de x à y).

Soit B l'ensemble des éléments de U qui terminent une chaîne P-incertaine partant de a (c'est l'ensemble des éléments x tels qu'il existe une chaîne P-incertaine de a à x); C l'ensemble des éléments de U qui ne terminent aucune chaîne P-incertaine partant de a. Notons que B et C ne sont pas vides ($b \in B$; $c \in C$) et que $\{B, C\}$ est une partition de U.

Soit $E \in \Phi(U)$ tel que $E^{P>}$ contienne au moins deux éléments distincts x et y. Il est clair que $0 < P(x,y) < 1$. Si x appartient à C, y appartient aussi à C (sinon, il y aurait une chaîne P-incertaine $(t_0, .., t_m)$ de a à y, donc $(t_0, .., t_m, x)$ serait une chaîne P-incertaine de a à x). Par contre, si x appartient à B, y appartient aussi à B (pratiquement pour la même raison).

Par conséquent : $\forall E\in\Phi(U)$; $E^{P>}\subset C$ ou $E^{P>}\subset B$.

Soit alors k un nombre strictement positif distinct de 1 et $f:U \to R$, définie par :

$$\forall x\in B;\ f(x) = v(x);$$
$$\forall x\in C;\ f(x) = k.v(x).$$

Soit E tel que $E = E^{P>}$. E est inclus dans B ou dans C. Si E est inclus dans B, $\forall x\in E;\ P_E(x) = f(x)/\sum_{y\in E} f(y)$.

Si E est inclus dans C,

$$\forall x\in E;\ P_E(x) = k.v(x)/k.\sum_{y\in E} v(y),$$

c'est-à-dire

$$\forall x\in E;\ P_E(x) = f(x)/\sum_{y\in E} f(y).$$

Or, les deux échelles v et f ne sont pas identiques à une constante multiplicative près. Par conséquent, si P n'est pas connexe, v n'est pas une échelle de rapports. C.Q.F.D.

Ce théorème généralise le théorème 4 de Luce (1959 p. 25). Deux points doivent être signalés : P doit satisfaire le cas (i) de l'axiome de choix, que v soit ou non une échelle de rapports; quant à la P-connexité, elle est rendue nécessaire par le seul fait que v est une échelle de rapports. Dans ces conditions, on peut se demander s'il suffit que P satisfasse (i) pour qu'il existe une échelle v vérifiant (22). C'est là un problème certainement difficile, qui n'est pas traité ici.

THEOREME 3 <u>Soit</u> P <u>un système de choix de Luce absorbant. Il existe une échelle de rapports strictement positive</u>, v, <u>sur</u> U, <u>telle que</u>

$$E = E^{P>} \Longrightarrow \forall x\in E;\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E} v(y),$$

<u>si et seulement si</u> P <u>est partout incertain</u>.

<u>Preuve</u> Un système de Luce absorbant et partout incertain étant un système de choix connexe qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix, le théorème 2 assure l'existence de v.

Réciproquement, si v existe, P est connexe. Montrons que dans ces conditions, P est partout incertain. Soient en effet x et y, deux éléments de E, $(t_0,..,t_j,..,t_m)$, une chaîne P-incertaine de x à y. Si $P(t_0,t_j) = 1$, $(j\in\{2,...,m\})$, $P(t_0,t_{j-1}) = 1$ d'après (10) car, par définition, $P(t_{j-1},t_j) < 1$. Comme $P(t_0,t_1) < 1$, on a donc $P(t_0,t_m) < 1$. De la même façon, comme $P(t_0,t_1) > 0$, $P(t_0,t_m) > 0$. Sachant que $x = t_0$ et $y = t_m$, on en déduit ainsi $0 < P(x,y) < 1$. Par conséquent : $\forall E\in\Phi(U)$; $E^{P>} = E$.

Comme P est un système de Luce (lemme 3), $E^{P>} = E^{P+}$ (lemme 1), donc $E^{P+} = E$, ce qui montre que P est partout incertain.

Ainsi, les seuls systèmes de Luce absorbants connexes sont partout incertains. C'est là une particularité qui enlève sans doute à de tels systèmes leur caractère potentiellement descriptif de réponses de choix.

5. UNE ECHELLE DEFINIE SELON UNE CONDITION PLUS RESTRICTIVE

Toute échelle qui satisfait l'équation (22) n'est un modèle que pour les probabilités de choix d'éléments dans des ensembles pertinents au seul cas (i) de l'axiome de choix (c'est-à-dire tels que $E = E^{P>}$). On ne s'étonnera donc pas que la condition (ii) s'avère superflue lorsqu'il s'agit de construire un tel type d'échelle.

Un examen plus attentif révèle cependant que, lorsque le système P vérifie l'axiome de choix en sa totalité, l'échelle v a en fait pour propriété plus restrictive :

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall x\in E^{P>};\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E^{P>}} v(y).$$

Ici, v est mise en relation avec toutes les parties finies de U. Quant à la restriction de E à $E^{P>}$, elle prendra tout son sens lorsque l'on montrera que $E^{P>}$ est l'ensemble des éléments de E qui ont une probabilité non nulle d'être choisis dans E ($E^{P>} = E^{P+}$). Mais le cas (ii) de l'axiome de choix ne s'avérera pas encore nécessaire à l'obtention d'une telle échelle.

DEFINITION 8 On dit qu'un système de choix P sur U est un <u>système aux rapports de choix incertains constants</u>, ou plus brièvement, que P est <u>un système de choix R.I.C.</u>, s'il vérifie les deux conditions (A) et (B) ci-dessous :

(A) $\forall E\in\Phi(U);\ E^{P+} = E^{P>}$ (26)

(B) $\forall E\in\Phi(U);\ \forall F\subset E;\ \forall x,\ \forall y\in E^{P>}\cap F;$

$$P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x). \quad (27)$$

LEMME 10 <u>Si</u> P <u>est un système de choix R.I.C.</u>, P <u>vérifie le cas (i) de l'axiome de choix.</u>

<u>Preuve</u> Soit P un système de choix R.I.C. et E une partie finie de U telle que $E = E^{P>}$. Si $F\subset E$ alors, conformément à (B), quels que soient x et y dans F (donc dans $E^{P>}$), $P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x)$.

Par conséquent, en sommant sur y : $\forall x\in F;\ \sum_{y\in F} P_E(x).P_F(y) = \sum_{y\in F} P_E(y).P_F(x)$.

Or, $\sum_{y\in F} P_F(y) = 1$ et $\sum_{y\in F} P_E(y) = P_E(F)$. Ainsi, $\forall x\in F;\ P_E(x) = P_F(x).P_E(F)$.

LEMME 11 P <u>est un système de choix de Luce si et seulement si c'est un système de choix R.I.C. tel que</u>

$$(P(x,y) = 1 \text{ et } P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1. \qquad (28)$$

<u>Preuve</u> Soit P un système de choix de Luce; $E\in\Phi(U)$. On sait d'après le lemme 2 que $E^{P>} = E^{P+}$.

E peut toujours s'écrire sous la forme $E = E^{P>}\cup\{x_1,..,x_m\}$. Conformément au cas (ii) d'un système de Luce :

$$\forall x\in E-\{x_1\};\ P_E(x) = P_{E-\{x_1\}}(x).$$

Mais, si l'on suppose

$$\forall x\in E-\{x_1,..,x_j\};\ P_E(x) = P_{E-\{x_1,..,x_j\}}(x),$$

comme $P_E(x_{j+1}) = 0$, on obtient de nouveau avec le cas (ii) :

$$\forall x\in E-\{x_1,..,x_{j+1}\};\ P_{E-\{x_1,..,x_j\}}(x) = P_{E-\{x_1,..,x_{j+1}\}}(x),$$

et donc

$$\forall x\in E-\{x_1,..,x_{j+1}\};\ P_E(x) = P_{E-\{x_1,..,x_{j+1}\}}(x).$$

En continuant ainsi de suite jusqu'à m, on obtiendrait

$$\forall x\in E^{P>};\ P_E(x) = P_{E^{P>}}(x). \qquad (29)$$

Soit alors $F\subset E$; x et y, deux éléments de $F\cap E^{P>}$. Comme $(E^{P>})^{P>} = E^{P>}$, on a d'après le cas (i), $P_{E^{P>}}(x) = P(x,y)(P_{E^{P>}}(x) + P_{E^{P>}}(y))$,

c'est-à-dire, $P_{E^{P>}}(x).(1 - P(x,y)) = P(x,y).P_{E^{P>}}(y)$,

ou encore, $P_{E^{P>}}(x)/P_{E^{P>}}(y) = P(x,y)/P(y,x)$,

qui devient avec (29),

$$P_E(x)/P_E(y) = P(x,y)/P(y,x). \qquad (30)$$

Comme x et y appartiennent à $F\cap E^{P>}$, ils appartiennent aussi à $F^{P>}$. Ceci permet de montrer de la même façon :

$P_F(x)/P_F(y) = P(x,y)/P(y,x)$, et d'après (30), $P_E(x)/P_E(y) = P_F(x)/P_F(y)$,

ce qui montre que P vérifie la condition (B) d'un système de choix R.I.C.

On sait enfin (Luce, 1959, lemme 4 p. 10) que, si P est un système de choix de Luce,

$$(P(x,y) = 1 \text{ et } P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1 .$$

Réciproquement, si P est un système de choix R.I.C. qui vérifie (28), on sait d'après le lemme 10 que P vérifie la condition (i) de l'axiome de choix. S'il existe dans E deux éléments z et t tels que $P(z,t) = 0$, considérons un élément x de $E^{P>}$. x est distinct de z, et comme $P(x,y) > 0$ pour tout y de E, donc de $E-\{z\}$, x appartient aussi à $(E-\{z\})^{P>}$. Inversement, si x appartient à $(E-\{z\})^{P>}$, c'est-à-dire est tel que $P(x,y) > 0$ pour tout élément de E distinct de z, $P(x,z) > 0$ aussi (sinon, de $P(x,z) = 0$ et $P(z,t) = 0$, on déduirait de (28), $P(x,t) = 0$, ce qui est contradictoire car t est distinct de z), ce qui signifie que x appartient à $E^{P>}$. En conclusion,

$$P(z,t) = 0 \Longrightarrow E^{P>} = (E-\{z\})^{P>}.$$

Si x et y sont deux éléments de E^{P+}, c'est-à-dire de $E^{P>}$, on déduirait alors de (B) : $P_E(y)/P_E(x) = P_{E-\{z\}}(y)/P_{E-\{z\}}(x)$,

et donc,

$$\forall x \in E^{P+};\ \sum_{y \in E^{P+}} P_E(y)/P_E(x) = \sum_{y \in (E-\{z\})^{P+}} P_{E-\{z\}}(y)/P_{E-\{z\}}(x),$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E^{P+};\ 1/P_E(x) = 1/P_{E-\{z\}}(x),$$

ou encore,

$$\forall x \in E^{P+};\ P_E(x) = P_{E-\{z\}}(x). \qquad (31)$$

Comme $E^{P>} = (E-\{z\})^{P>}$, il est clair aussi que $E^{Po}-\{z\} = (E-\{z\})^{Po}$. Par conséquent :

$$\forall x \in E^{Po}-\{z\};\ P_E(x) = P_{E-\{z\}}(x) = 0.$$

Ainsi, avec (31) :

$$\forall x \in E-\{z\};\ P_E(x) = P_{E-\{z\}}(x),$$

ce qui montre que P vérifie la condition (ii) de l'axiome de choix, donc que P est un système de choix de Luce. C.Q.F.D.

Donnons ici un exemple de système de choix R.I.C. qui n'est pas un système de choix de Luce : soit $U = \{a,b,c\}$ et P défini par

$P_U(a) = 0,\ P_U(b) = 0,\ P_U(c) = 1$

$P(a,b) = 1$

$P(a,c) = 0$

$P(b,c) = \alpha\ (0 < \alpha < 1)$.

P est bien un système de choix R.I.C. : la propriété (B) est triviale dans ce cas; quant à (A), il suffit de noter que $U^{P+} = U^{P>} = \{c\}$. Mais P n'est pas un système de choix de Luce car $P(c,a) = 1$, $P(a,b) = 1$ mais $P(c,b) = 1 - \alpha < 1$. En fait, la condition (ii) d'un système de Luce n'est pas respectée car $P(a,c) = 0$, $P_U(b) = 0$ mais $P_{U-\{a\}}(b) = P(b,c) = \alpha$ qui est distinct de 0.

LEMME 12 <u>Si</u> P <u>est un système de choix R.I.C., quel que soit</u> E <u>dans</u> $\Phi(U)$,

$$\forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = 1/\sum_{y\in E^{P>}} P(y,x)/P(x,y). \tag{32}$$

Preuve Quel que soit le système de choix P, si $P_E(x) > 0$, on a toujours

$$1/P_E(x) = \sum_{y\in E^{P+}} P_E(y)/P_E(x),$$

et donc

$$P_E(x) = 1/(\sum_{y\in E^{P+}} P_E(y)/P_E(x)). \tag{33}$$

Si P est un système de choix R.I.C., conformément à (B) :

$$\forall x,\ \forall y\in E^{P>};\ P_E(x).P(y,x) = P_E(y).P(x,y),$$

et comme $E^{P>} = E^{P+}$,

$$\forall x,\ \forall y\in E^{P>};\ P_E(y)/P_E(x) = P(y,x)/P(x,y).$$

De (33), on déduit ainsi :

$$\forall x\in E^{P>};\ P_E(x) = 1/(\sum_{y\in E^{P>}} P(y,x)/P(x,y).$$

THEOREME 4 Il existe une échelle de rapports strictement positive, v, telle que

$$\forall E\in\Phi(U);\ \forall x\in E^{P>};\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y\in E^{P>}} v(y), \tag{34}$$

si et seulement si P est un système de choix R.I.C. connexe.

Preuve Soit P un système de choix R.I.C. connexe. C'est en particulier un système de choix connexe qui vérifie le cas (i) de l'axiome de choix (lemme 10), ce qui permet de définir v comme dans le théorème 2. On déduit alors immédiatement de (25) et du lemme 12 que v vérifie (34). Pour montrer que v est une échelle de rapports, il suffit aussi de reprendre la démonstration du théorème 2.

Réciproquement, s'il existe une échelle de rapports v, strictement positive, qui vérifie (34), v vérifie en particulier (22) et P est connexe. Si x appartient à $E^{P>}$, v(x) étant strictement positif, $P_E(x)$ l'est aussi et $E^{P>}\subset E^{P+}$. Mais comme

$$\sum_{x\in E^{P>}} P_E(x) = \sum_{x\in E^{P>}} v(x)/\sum_{y\in E^{P>}} v(y),\ \text{c'est-à-dire } 1,\ E^{P>} = E^{P+}.$$

Soit alors $F\subset E$; x et y, deux éléments de $E^{P>}\cap F$. x et y appartiennent aussi à $F^{P>}$ et

$$P_E(x).P_F(y) = (v(x)/\sum_{z\in E^{P>}} v(z)).(v(y)/\sum_{t\in F^{P>}} v(t)),$$

c'est-à-dire, par commutativité,

$$P_E(x).P_F(y) = (v(y)/\sum_{z\in E^{P>}} v(z)).(v(x)/\sum_{t\in F^{P>}} v(t)),$$

qui se ramène à $P_E(x).P_F(y) = P_E(y).P_F(x)$. C.Q.F.D.

Donnons un exemple de système de choix R.I.C. connexe qui n'est pas un système de choix de Luce. Soit $U = \{a,b,c,d\}$ et P défini par le tableau I.

Tableau I <u>Un système de choix R.I.C. connexe</u>

a	b	c	d	
0	0	3/7	4/7	U
	2/9	3/9	4/9	A = {b,c,d}
0		3/7	4/7	B = {a,c,d}
1/5	0		4/5	C = {a,b,d}
0	0	1		D = {a,b,c}
1	0			{a,b}
0		1		{a,c}
1/5			4/5	{a,d}
	2/5	3/5		{b,c}
	1/3		2/3	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

Chaque ligne figure un élément de $\Phi(U)$ (les éléments de E sont représentés par les cases non hachurées). Dans chaque case figure la probabilité de choix de l'élément en colonne dans l'ensemble en ligne.

P est bien un système de choix <u>connexe</u> : {a,b} et {a,c} sont les deux seules paires de U dans lesquelles on observe un choix certain. Or (a,d,b) et (a,d,c) sont des chaînes P-incertaines de a à b et de a à c respectivement.

De plus, quel que soit E, $E^{P>} = E^{P+}$, si l'on note en particulier :

$D^{P>} = \{a,b,c\}^{P>} = \{c\} = D^{P+}$,

$C^{P>} = \{a,b,d\}^{P>} = \{a,d\} = C^{P+}$,

$B^{P>} = \{a,c,d\}^{P>} = \{c,d\} = B^{P+}$,

$A^{P>} = \{b,c,d\}^{P>} = \{b,c,d\} = A^{P+}$

et $U^{P>} = \{c,d\} = U^{P+}$.

Enfin, P vérifie la propriété (B) d'un système de choix R.I.C. Par exemple :

$$\frac{P_U(c)}{P_U(d)} = \frac{P_A(c)}{P_A(d)} = \frac{P_B(c)}{P_B(d)} = \frac{P(c,d)}{P(d,c)} = \frac{3}{4} ;$$

$$\frac{P_C(a)}{P_C(d)} = \frac{P(a,d)}{P(d,a)} = \frac{1}{4} .$$

Mais P n'est pas un système de choix de Luce. Par exemple, dans D = $\{a,b,c\}$, $P(a,c) = 0$ mais $P_D(b) = 0$ alors que $P_{D-\{a\}}(b) = P(b,c) = 2/5$. Dans U, $P(a,b) = 0$ mais $P_U(b) = 0$ alors que $P_{U-\{a\}}(b) = P_A(b) = 2/9$.

On construit aisément une échelle v qui vérifie (34). En se centrant par exemple sur a, on obtiendra :

$$v(a) = 1$$

$$v(b) = \frac{P(b,d)}{P(d,b)} . \frac{P(d,a)}{P(a,d)} = \frac{1}{2} . \frac{4}{1} = 2$$

car (b,d,a) est une chaîne P-incertaine de b à a;

$$v(c) = \frac{P(c,d)}{P(d,c)} . \frac{P(d,a)}{P(a,d)} = \frac{3}{4} . \frac{4}{1} = 3$$

car (c,d,a) est une chaîne P-incertaine de c à a;

$$v(d) = \frac{P(d,a)}{P(a,d)} = 4$$

La figure 1 donne une représentation de U par v et les probabilités de choix binaires associées. On ne pourra qu'être frappé du fait que $P(a,b) = 1$ alors que $v(a) < v(b)$. Une telle particularité peut d'ailleurs aussi bien advenir dans des systèmes de choix de Luce. Ainsi, P décrit par

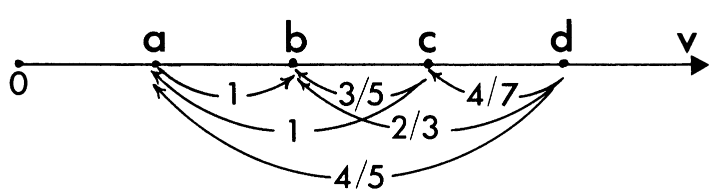

Figure 1. L'échelle v associée au système de choix du tableau I. Les flèches orientées décrivent les probabilités de choix binaires.

le tableau II est un système de Luce connexe sur l'ensemble $U = \{a,b,c,d\}$, compatible avec la même échelle que précédemment ($v(a) = 1$, $v(b) = 2$, $v(c) = 3$, $v(d) = 4$). Mais on note toujours que a est choisi avec certitude contre b bien que $v(a) < v(b)$.

Tableau II Un système de choix de Luce connexe

a	b	c	d	
0	0	3/7	4/7	U
	0	3/7	4/7	A = {b,c,d}
0		3/7	4/7	B = {a,c,d}
1/5	0		4/5	C = {a,b,d}
0	0	1		D = {a,b,c}
1	0			{a,b}
0		1		{a,c}
1/5			4/5	{a,d}
	0	1		{b,c}
	1/3		2/3	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

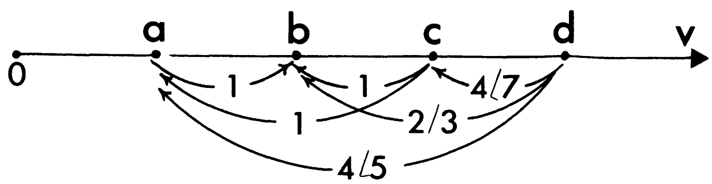

Figure 2. L'échelle v associée au système de choix du tableau II

6. UNE CONDITION SUPPLEMENTAIRE RELATIVE AUX CHOIX CERTAINS

Les deux exemples précédents de systèmes de choix R.I.C. connexes, montrent que l'échelle définie par le théorème 4 ne rend pas toujours compte des choix certains. Le lemme qui suit permet cependant une interprétation intéressante de cette échelle lorsqu'on restreint l'analyse aux probabilités de choix binaires incertaines (distinctes de 0 et de 1)

LEMME 13 Soit P un système de choix R.I.C. connexe; v l'échelle de rapports sur U définie par (34). Si $0 < \alpha < 1$ et P(x,y) est incertain,

$$P(x,y) \geq \alpha \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq \alpha/(1-\alpha). \qquad (35)$$

Preuve Soit $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha \leq P(x,y) < 1$, $P(y,x) \leq 1 - \alpha$, et

$$P(x,y)/P(y,x) \geq \alpha/(1 - \alpha).$$

Or, d'après (25),

$$v(x)/v(y) = P(x,y)/P(y,x).$$

Par conséquent,

$$v(x)/v(y) \geq \alpha/(1 - \alpha).$$

Réciproquement, si $v(x)/v(y) \geq \alpha/(1 - \alpha)$ et si $0 < P(x,y) < 1$,

$$P(x,y)/(1 - P(x,y)) \geq \alpha/(1 - \alpha),$$

c'est-à-dire

$$P(x,y).(1 + \alpha/(1 - \alpha)) \geq \alpha/(1 - \alpha),$$

ou encore

$$P(x,y) \geq \alpha.$$

On voit ici que, dans le cas de choix incertains, $v(x)/v(y)$ est une fonction strictement croissante de $P(x,y)$. En particulier,

$$P(x,y) \geq P(z,t) \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq v(z)/v(t)$$

si $P(x,y)$ et $P(z,t)$ sont strictement compris entre 0 et 1. Cette propriété peut être étendue aux choix certains en exigeant de plus :

$$P(x,y) = 1 \Longrightarrow (P(z,t) < 1 \Longrightarrow v(x)/v(y) > v(z)/v(t)).$$

Cette extension ne signifie pas que l'équivalence (35) doive se généraliser aux probabilités de choix égales à 1. En effet, l'échelle v étant strictement positive, à un rapport fini $v(x)/v(y)$ peut correspondre un choix certain ($P(x,y) = 1$) dès lors que $v(x)/v(y)$ excède une valeur seuil donnée. En d'autres termes, le fait que x soit choisi de façon certaine contre y, ainsi que z contre t, doit seulement permettre de dire que $v(x)/v(y)$ et $v(z)/v(t)$ excèdent un certain seuil, sans que ces rapports puissent être comparés. C'est sans doute là la seule conception possible des choix certains, qui rende interprétable l'existence d'une telle échelle sur U.

Le lemme qui suit, précise les propriétés équivalentes d'une telle extension aux choix binaires certains.

LEMME 14 Si P est un système de choix R.I.C. connexe, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Si $P(x,y) = 1$, $P(z,t) < 1 \Longrightarrow v(x)/v(y) > v(z)/v(t)$.

(ii) Si P n'est que localement incertain, il existe une constante S telle que

$$P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq S,$$

ou bien telle que

$P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) > S$.

(iii) <u>Il existe une fonction non décroissante</u>
$k:]0,1[\to \mathbb{R}$, <u>telle que</u>
$\forall\alpha\in]0,1[;\ P(x,y) \geq \alpha \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq k(\alpha)$.

<u>Preuve</u> Soit P, un système de choix R.I.C. connexe;
$\mathcal{C} = \{v(x)/v(y);\ (x,y)\in U^2$ et $P(x,y) = 1\}$;
$\mathcal{I} = \{v(x)/v(y);\ (x,y)\in U^2$ et $P(x,y) < 1\}$.

<u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u>. Si P n'est que localement incertain, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{I}$ ne sont pas vides. Si de plus P vérifie (i), tout élément de $\mathcal{C}$ majore strictement tout élément de $\mathcal{I}$. Soit S la borne inférieure de $\mathcal{C}$ et s la borne supérieure de $\mathcal{I}$. Par définition, $S \geq s$. Si $S = s$ et $s\in\mathcal{I}$, S n'est pas dans $\mathcal{C}$, et l'on en déduit immédiatement $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) > S$. Autrement, S n'est pas dans $\mathcal{I}$ et $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq S$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (iii)</u>. Si P est partout incertain, définissons pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, $k(\alpha) = \alpha/(1-\alpha)$. k est une fonction strictement croissante qui vérifie l'équivalence (iii) d'après le lemme 13.

Si P n'est que localement incertain et s'il existe une constante S telle que $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq S$, on définit la fonction k de la façon suivante, pour tout α strictement compris entre 0 et 1 : s'il existe deux éléments de U, z et t, tels que $\alpha \leq P(z,t) < 1$, $k(\alpha) = \alpha/(1-\alpha)$; sinon, $k(\alpha) = S$. k est une fonction non décroissante car $S = \sup_{\alpha\in]0,1[}(k(\alpha))$, par construction de k et d'après le lemme 10.

Soit $0 < \alpha < 1$. Pour vérifier l'équivalence (iii), deux cas seront distingués :

- s'il existe z et t tels que $\alpha \leq P(z,t) < 1$, $k(\alpha) = \alpha/(1-\alpha)$. Soit alors $P(x,y) \geq \alpha$. Si $P(x,y) < 1$, $v(x)/v(y) \geq k(\alpha)$ d'après le lemme 10. Autrement, $P(x,y) = 1$, et d'après (ii), $v(x)/v(y) \geq S \geq k(\alpha)$. Réciproquement, si $v(x)/v(y) \geq k(\alpha)$, $P(x,y) \geq \alpha$ si $P(x,y)$ est incertain. Sinon, $P(x,y)$ est égal à 0 ou à 1. Mais, si $P(x,y) = 0$, $P(y,x) = 1$, donc $v(y)/v(x) \geq S \geq k(\alpha)$ et $k(\alpha)^{-1} \geq S \geq k(\alpha)$, c'est-à-dire $S = 1$, ce qui est absurde car $v(x)/v(x) = 1$ mais $P(x,x)$ est distinct de 1! Par conséquent, $P(x,y) \geq \alpha$ dans tous les cas.
- par contre, si $P(z,t) \geq \alpha \Longrightarrow P(z,t) = 1$, $k(\alpha) = S$, et de l'équivalence $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq S$, on déduit immédiatement l'équivalence (iii).

Si P n'est que localement incertain et s'il existe une constante S telle que $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) > S$, on pose $k(\alpha) = \alpha/(1-\alpha)$ s'il existe z et t dans U tels que $\alpha < P(z,t) < 1$, et $k(\alpha) = S$ autrement. Comme précédemment, on vérifie que k est une fonction non décroissante et, en distinguant les deux cas qui président à la construction de k, l'équivalence (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Si $P(x,y) = 1$ et $P(z,t) < 1$, il existe α tel que $P(z,t) < \alpha < 1$. D'après (iii), $v(z)/v(t) < k(\alpha)$. Mais comme $P(x,y) > \alpha$, $v(x)/v(y) \geq k(\alpha)$. Par conséquent, $v(x)/v(y) > v(z)/v(t)$.

Le théorème 5 résume les divers résultats obtenus

THEOREME 5 Il existe une échelle de rapports strictement positive, v, sur U et une fonction non décroissante $k:]0,1[\to \mathbb{R}$, telles que

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = v(x)/\sum_{y \in E^{P>}} v(y) \quad (34)$$

et

$$\forall \alpha \in]0,1[;\ P(x,y) \geq \alpha \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq k(\alpha), \quad (36)$$

si et seulement si P est un système de choix R.I.C. connexe tel que, si $P(x,y) = 1$ et $P(z,t) < 1$, pour toute chaîne P-incertaine de x à y, $(t_0,..,t_j,..,t_m)$:

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{P(t_j,t_{j+1})}{P(t_{j+1},t_j)} > \frac{P(z,t)}{P(t,z)}. \quad (37)$$

Preuve v vérifie (34) si et seulement si P est un système de choix R.I.C. connexe (théorème 4). Sous ces conditions, il ne reste plus qu'à vérifier l'équivalence de (36) et de (37) : si $P(x,y) = 1$ et $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-incertaine de x à y, on sait que

$$\prod_{j=0}^{m-1} (P(t_j,t_{j+1})/P(t_{j+1},t_j)) = v(x)/v(y).$$

Par conséquent, si $P(z,t)$ est incertain,

$$P(z,t)/P(t,z) = v(z)/v(t),$$

et d'après (37),

$$v(x)/v(y) > v(z)/v(t).$$

Si d'autre part $P(z,t) = 0$, $P(t,z) = 1$, et d'après (37), $v(x)/v(y) > v(x)/v(x) = 1$, mais aussi $v(z)/v(t) < 1$, ce qui montre que (37) est équivalente à la propriété (i) du lemme 14, donc à (36) qui n'est autre que la propriété (iii) de ce même lemme.

Notons qu'un système de choix P qui satisfait aux conditions du théorème 5, est un système de choix de Luce. En effet, il vérifie la propriété (ii) du lemme 14, et en particulier

$$(P(x,y) = 1 \text{ et } P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1.$$

C'est donc d'après le lemme 11, un système de choix de Luce. Dans ce cas, P sera appelé un <u>système de choix de Luce uniforme</u>.

Tableau III <u>Un système de choix de Luce uniforme</u>

a	b	c	d	
0	2/9	3/9	4/9	U
	2/9	3/9	4/9	A = {b,c,d}
0		3/7	4/7	B = {a,c,d}
0	2/6		4/6	C = {a,b,d}
0	2/5	3/5		D = {a,b,c}
1/3	2/3			{a,b}
0		1		{a,c}
0			1	{a,d}
	2/5	3/5		{b,c}
	1/3		2/3	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

Le tableau III décrit un système de Luce uniforme sur U = {a,b,c,d}. L'échelle de rapports v est identique à celle des deux exemples précédents. Elle est représentée par la figure 3 avec les probabilités de choix binaires correspondantes.

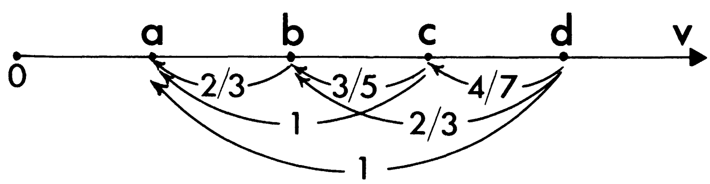

Figure 3. <u>L'échelle v associée au système de choix du tableau III</u>

Les deux seuls choix certains sont ceux de c contre a et de d contre a. Or, $v(c)/v(a) = 3$ et $v(d)/v(a) = 4$. D'autre part, si $P(x,y)$ est incertain,

$v(x)/v(y)$ n'excède jamais 2. Ainsi :

$$P(x,y) = 1 \iff v(x)/v(y) \geq 3.$$

De façon équivalente (cf. lemme 11), en définissant la fonction k par :

$$k(\alpha) = \alpha/(1 - \alpha) \text{ si } 0 < \alpha \leq 2/3 \quad \text{et} \quad k(\alpha) = 3 \text{ si } 2/3 < \alpha < 1,$$

on vérifiera que

$$\forall \alpha \in]0,1[; \; P(x,y) \geq \alpha \iff v(x)/v(y) \geq k(\alpha).$$

7. QUELQUES REMARQUES A PROPOS DE LA TRANSITIVITE STOCHASTIQUE FORTE

La dernière propriété qui caractérise les systèmes de choix de Luce uniformes (voir théorème 5), n'a pas de signification intuitive. C'est ce qui la différencie de conditions qui n'exigent que certaines inégalités de probabilités de choix. La transitivité stochastique est de celles-ci, et il conviendrait peut-être de déterminer d'autres propriétés caractérisant les systèmes de Luce uniformes. La transitivité stochastique forte (S.S.T.) qui va être examinée ici, s'avère être nécessaire. Un contre exemple montrera qu'elle n'est pas suffisante.

DEFINITION 9 On dit qu'un système de choix P est fortement transitif, ou que P vérifie la transitivité stochastique forte (S.S.T.), lorsque

$$(P(x,y) \geq 1/2 \text{ et } P(y,z) \geq 1/2) \Longrightarrow P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z)). \quad (38)$$

Fishburn (1973) présente quelques résultats relatifs à cette propriété et à d'autres types de transitivités stochastiques. Le lemme qui suit, caractérise assez simplement la transitivité stochastique forte.

LEMME 15 P est un système de choix fortement transitif si et seulement si

$$P(x,y) \geq 1/2 \Longrightarrow (\forall z \in U; \; P(x,z) \geq P(y,z)). \quad (39)$$

Preuve Soit P un système de choix fortement transitif; x et y, deux éléments de U, tels que $P(x,y) \geq 1/2$; z un élément de U. Si $P(y,z) \geq 1/2$, $P(x,z) \geq P(y,z)$. Si au contraire $P(y,z) < 1/2$, on peut se restreindre au cas où $P(x,z) < 1/2$, c'est-à-dire $P(z,x) > 1/2$, auquel cas $P(z,y) \geq P(z,x)$, c'est-à-dire $P(x,z) \geq P(y,z)$, ce qui montre que dans tous les cas, P vérifie (39).

Réciproquement, si P vérifie (39) et si $P(x,y) \geq 1/2$ et $P(y,z) \geq 1/2$, $P(x,z) \geq P(y,z)$ et $P(y,x) \geq P(z,x)$, c'est-à-dire $P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z))$.

C.Q.F.D.

Ce résultat est à rapprocher de celui de Tversky et Russo (1969) qui limitent toutefois leur analyse à des choix toujours incertains et à une transitivité plus forte (S.S.S.T.), pour montrer qu'elle est équivalente à la <u>substituabilité</u> :

$$P(x,y) \geq 1/2 \Longleftrightarrow (\forall z \in U;\ P(x,z) \geq P(y,z)) \qquad (40)$$

et à l'<u>indépendance</u> :

$$P(x,z) \geq P(y,z) \Longleftrightarrow P(x,t) \geq P(y,t). \qquad (41)$$

Fishburn (1973) montre d'ailleurs dans le cas général que S.S.T. implique une <u>indépendance affaiblie</u> :

$$(\exists t \in U;\ P(x,t) > P(y,t)) \Longrightarrow (\forall z \in U;\ P(x,z) \geq P(y,z)), \qquad (42)$$

ce qu'on vérifierait presque immédiatement avec le lemme précédent (en montrant que $P(x,t) > P(y,t) \Longrightarrow P(x,y) \geq 1/2$).

La notion de seuil qui a été introduite à propos des systèmes de Luce uniformes, invite à dire quelques mots d'une construction d'ordres quasi-forts sur U à partir d'un système de choix P. Rappelons qu'une relation binaire L sur U, est un <u>ordre quasi-fort</u> si :

$$\forall x \in U;\ \sim xLx \qquad (43)$$

(L est <u>irréflexive</u>)

$$(xLy \text{ et } yLz) \Longrightarrow (\forall t \in U;\ xLt \text{ ou } tLz) \qquad (44)$$

(L est une S-<u>relation</u>)

$$(xLy \text{ et } zLt) \Longrightarrow (xLt \text{ ou } zLy). \qquad (45)$$

(L est une <u>relation de Ferrers</u>)

Fishburn (1973, théor. 1 p. 337) montre que, si P vérifie l'indépendance affaiblie (42), toute relation $P\alpha (1/2 \leq \alpha < 1)$ définie par $xP\alpha y$ lorsque $P(x,y) > \alpha$, est un ordre quasi-fort. On montrerait tout aussi aisément que :

LEMME 16 <u>Si</u> P <u>est un système de choix qui vérifie la condition d'indépendance affaiblie (42)</u>, P_α $(1/2 < \alpha \leq 1)$ <u>défini par</u>

$xP_\alpha y$ <u>lorsque</u> $P(x,y) \geq \alpha$,

<u>est un ordre quasi-fort</u>.

<u>Preuve</u> P_α est évidemment irréflexive. P_α vérifie aussi (44) : si $P(x,y) \geq \alpha$, $P(y,z) \geq \alpha$ et si t est un élément de U tel que $P(x,t) < \alpha$, $P(t,x) > P(y,x)$, et d'après (42), $P(t,z) \geq P(y,z) \geq \alpha$.

P_α vérifie enfin (45) : si $P(x,y) \geq \alpha$, $P(z,t) \geq \alpha$ et si $P(x,t) < \alpha$, $P(z,t) > P(x,t)$, et d'après (42), $P(z,y) \geq P(x,y) \geq \alpha$. C.Q.F.D.

En particulier, P_1 est, sous l'hypothèse d'indépendance affaiblie, un ordre quasi-fort (P_1 étant défini par xP_1y lorsque x est choisi de façon certaine contre y).

D'une façon générale, les systèmes de choix R.I.C. ou de Luce ne sont pas fortement transitifs. Cependant :

LEMME 17 Si P vérifie le cas (i) de l'axiome de choix et si $P(x,y)$, $P(y,z)$ et $P(x,z)$ sont incertains,

$$(P(x,y) \geq 1/2 \text{ et } P(y,z) \geq 1/2) \Longrightarrow P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z)).$$

Preuve Si x, y et z ne sont pas tous trois distincts, le résultat est immédiat. Autrement, $\{x,y,z\} = \{x,y,z\}^{P>}$, et d'après le lemme 7 :

$$\frac{P(x,z)}{P(z,x)} = \frac{P(x,y)}{P(y,x)} \cdot \frac{P(y,z)}{P(z,y)} .$$

Par conséquent, si $P(x,y) \geq 1/2$ et $P(y,z) \geq 1/2$,

$$P(x,z)/P(z,x) \geq P(x,y)/P(y,x)$$

et $\quad P(x,z)/P(z,x) \geq P(y,z)/P(z,y)$,

c'est-à-dire

$$P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z)).$$ C.Q.F.D.

Ce résultat concerne les systèmes de choix de Luce et R.I.C. qui vérifient tous deux le cas (i) de l'axiome de choix (cf. lemme 10). Mais $P(x,y)$ et $P(y,z)$ peuvent être supérieurs à 1/2 et $P(x,z)$ être nul! Ainsi, pour $U = \{a,b,c\}$, P défini par :

$$P_U(a) = 0,\ P_U(b) = 2/3,\ P_U(c) = 1/3,$$
$$P(a,b) = 2/3,\ P(b,c) = 2/3 \text{ et } P(a,c) = 0,$$

est un système de choix de Luce.

On avait aussi noté (lemme 11) que les systèmes de choix R.I.C. ne diffèrent des systèmes de Luce que par une relative transitivité des choix certains, à savoir :

$$(P(x,y) = 1 \text{ et } P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1.$$

THEOREME 6 Un système de Luce uniforme est fortement transitif.

Preuve Si P est partout incertain, c'est vrai d'après le lemme précédent. Sinon, d'après le lemme 14, il existe une constante S telle que $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq S$, ou bien telle que $P(x,y) = 1 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) > S$. Notons que, nécessairement $S \geq 1$ (car $P(x,x) = 1/2$ et $v(x)/v(x) = 1$). Par conséquent (en utilisant aussi le lemme 13),

$$P(x,y) \geq 1/2 \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq 1.$$

Soient alors $P(x,y) \geq 1/2$ et $P(y,z) \geq 1/2$. Plusieurs cas doivent être distingués :

- si $P(x,y) = 1$, $v(x)/v(y) \geq S$ (resp. $> S$), et comme $v(y)/v(z) \geq 1$, $v(x)/v(z) \geq S$ (resp. $> S$), c'est-à-dire $P(x,z) = 1$.

- si $P(y,z) = 1$, on obtiendrait de la même façon $P(x,z) = 1$.

- si $P(x,y)$ et $P(y,z)$ sont incertains, ainsi que $P(x,z)$, on sait d'après le lemme précédent que $P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z))$.

- sinon, $P(x,z) = 0$ ou 1. Mais si $P(x,z) = 0$, $P(z,x) = 1$, et comme $P(x,y) \geq 1/2$, on obtiendrait $P(x,y) = 1$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, $P(x,z) \geq \sup(P(x,y),P(y,z))$ dans tous les cas. C.Q.F.D.

A l'inverse, un système de choix R.I.C. connexe, fortement transitif, n'est pas nécessairement un système de Luce uniforme. Notons en passant que, si P est un système de choix R.I.C. fortement transitif, P est un système de Luce car, en particulier :

$(P(x,y) = 1 \text{ et } P(y,z) = 1) \Longrightarrow P(x,z) = 1$.

Le système de choix décrit dans le tableau IV, est un système de Luce fortement transitif qui n'est pas uniforme. On note en particulier que $P(d,b) = 1$ et $v(d)/v(b) = 2$. Par ailleurs, $P(c,a) = 3/4$ et $v(c)/v(a) = 3$. Ainsi, $P(c,a) < P(d,b)$ mais $v(c)/v(a) > v(d)/v(b)$, en contradiction avec la propriété (37).

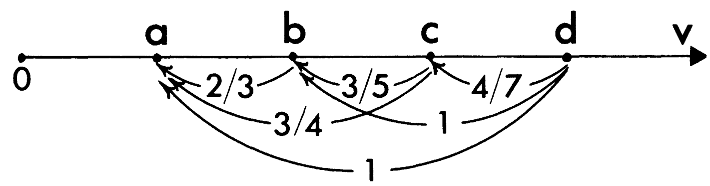

Figure 4. <u>L'échelle v associée au système de choix du tableau IV</u>

La connexité qui a été envisagée ici est plus large que celle définie par Luce (1959, déf. 1 p. 25), qui pourrait être appelée une connexité forte.

DEFINITION 10 Soient x et y, deux éléments de U tels que $P(x,y) \neq 1/2$. On dit que $t = (t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une <u>chaîne</u> P-<u>orientée de</u> x <u>à</u> y si :

- t est une chaîne P-incertaine de x à y;
- $P(x,y) > 1/2 \Longrightarrow (\forall j\{0,..,m-1\}; P(t_j,t_{j+1}) > 1/2)$;
- $P(x,y) < 1/2 \Longrightarrow (\forall j\{0,..,m-1\}; P(t_j,t_{j+1}) < 1/2)$.

Tableau IV <u>Un système de choix de Luce, connexe, fortement transitif mais non uniforme</u>

a	b	c	d	
0	0	3/7	4/7	U
	0	3/7	4/7	A = {b,c,d}
0		3/7	4/7	B = {a,c,d}
0	0		1	C = {a,b,d}
1/6	2/6	3/6		D = {a,b,c}
1/3	2/3			{a,b}
1/4		3/4		{a,c}
0			1	{a,d}
	2/5	3/5		{b,c}
	0		1	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

DEFINITION 11 On dit qu'un système de choix P est <u>fortement connexe</u> si, quels que soient x et y dans U tels que $P(x,y) \neq 1/2$, il existe une chaîne P-orientée de x à y.

Un système de choix fortement connexe est évidemment connexe.

LEMME 18 <u>Un système de choix connexe et fortement transitif est fortement connexe</u>.

<u>Preuve</u> Soit P un système de choix connexe et fortement transitif; x et y, deux éléments de U tels que $P(x,y) \neq 1/2$. Si $P(x,y)$ est incertain, (x,y) est une chaîne P-orientée de x à y. On peut alors considérer que $P(x,y) = 1$, $P(x,y) = 0$ se ramenant à ce cas avec $P(y,x) = 1$.

Comme P est connexe, il existe une chaîne P-incertaine, $t = (t_0,..,t_j, ..,t_m)$, de x à y. On peut admettre par récurrence que les couples d'éléments de U reliés par une chaîne P-incertaine de longueur strictement inférieure à m, sont aussi reliés par une chaîne P-orientée. Si $P(t_1,y) \leq 1/2$, c'est-à-dire $P(y,t_1) \geq 1/2$, P étant fortement transitif et $P(x,y)$ égalant 1, $P(x,t_1) = 1$, ce qui contredit la définition d'une chaîne P-incertaine. Par conséquent, $P(t_1,y) > 1/2$. Mais $(t_1,..,t_j,..t_m)$ est une chaîne P-incertaine de t_1 à y de longueur m-1. L'hypothèse de récurrence permet alors d'admettre :

$$\forall j \in \{1,..,m-1\};\ 1/2 < P(t_j,t_{j+1}) < 1. \qquad (46)$$

Soit alors

$$p = \inf(j \in \{0,..,m\};\ m \geq k \geq j \Longrightarrow P(x,t_k) = 1).$$

Par définition :

$$P(x,t_p) = P(x,t_{p+1}) = \ldots = P(x,t_m) = 1$$

et $\quad P(x,t_{p-1}) < 1.$

Notons aussi que p existe car $P(x,t_m) = 1$, et $p > 1$ car $P(x,t_1) < 1$. Si $P(t_{p-1},x) \geq 1/2$, on sait (lemme 12) que $P(t_{p-1},t_p) \geq P(x,t_p)$, donc $P(t_{p-1},t_p) = 1$, ce qui est absurde. Par conséquent, $1/2 < P(x,t_{p-1}) < 1$, ce qui avec (46), montre que $(x,t_{p-1},t_p,..,t_m)$ est une chaîne P-orientée de x à y, donc que P est fortement connexe.

THEOREME 7 <u>Si P est un système de choix R.I.C. fortement connexe,</u>

$$P(x,y) \geq 1/2 \Longleftrightarrow v(x) \geq v(y). \qquad (47)$$

<u>Preuve</u> Soit P un système R.I.C. fortement connexe. Si $P(x,y) = 1/2$, $v(x)/v(y) = 1$ d'après le lemme 10, ce qui permet de se restreindre au cas d'éléments x et y de U tels que $P(x,y)$ soit distinct de $1/2$. Mais alors,

$$v(x)/v(y) = \prod_{j=0}^{m-1} (P(t_j,t_{j+1})/P(t_{j+1},t_j)),$$

où $(t_0,..,t_j,..,t_m)$ est une chaîne P-orientée de x à y. Dans ce cas :

$$v(x) \geq v(y) \Longleftrightarrow \forall j \in \{0,..,m-1\}; P(t_j,t_{j+1}) \geq 1/2,$$

et l'équivalence (47) s'en déduit immédiatement. C.Q.F.D.

Notons en passant, qu'un système de choix R.I.C. fortement connexe n'est pas nécessairement un système de choix de Luce. Soit par exemple le système P sur $U = \{a,b,c,d,e\}$ dont les probabilités de choix binaires sont représentées par la figure 5. U sera représenté ici par $v(a) = 1$, $v(b) = 2$, $v(c) = 3$, $v(d) = 4$ et $v(e) = 5$. On en déduirait aisément les probabilités de choix dans des sous-ensembles de U contenant plus de deux éléments. Par exemple :

$$P_U(a) = 0,\ P_U(b) = 2/11,\ P_U(c) = 0,\ P_U(d) = 4/11,\ P_U(e) = 5/11$$

et, si $C = \{a,b,d,e\}$:

$$P_C(a) = 1/12,\ P_C(b) = 2/12,\ P_C(d) = 4/12,\ P_C(e) = 5/12.$$

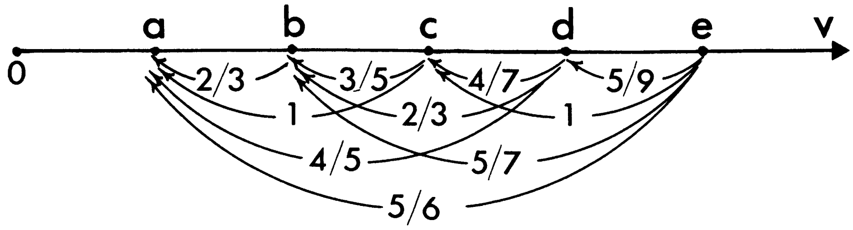

Figure 5. Probabilités de choix binaires d'un système de choix R.I.C. fortement connexe

Ceci montre que P n'est pas un système de choix de Luce car P(c,e) = 0 mais
$\forall x \in U-\{c\}$; $P_U(x) \neq P_{U-\{c\}}(x)$.

Pourtant, P est fortement connexe : les deux seuls choix certains sont celui de c contre a, et celui de e contre c; on vérifiera sur la figure 5 que (c,b,a) et (e,d,c) sont deux chaînes P-orientées, de c à a et de e à c respectivement.

Ceci montre, entre autres, que la réciproque du lemme 18 est fausse : un système de choix fortement connexe n'est pas nécessairement fortement transitif (car un système R.I.C. qui n'est pas de Luce, n'est pas fortement transitif; cf. lemme 11).

Mais la réciproque du théorème 7 est fausse aussi : le tableau V donne un exemple de système de choix R.I.C. connexe qui vérifie (47) mais n'est pas fortement connexe.

Tableau V Un système de choix R.I.C. connexe mais non fortement connexe, tel que $P(x,y) \geq 1/2 \iff v(x) \geq v(y)$

a	b	c	d	
0	0	3/7	4/7	U
	0	3/7	4/7	A = {b,c,d}
1/8		3/8	4/8	B = {a,c,d}
0	1/3		2/3	C = {a,b,d}
0	0	1		D = {a,b,c}
0	1			{a,b}
1/4		3/4		{a,c}
1/5			4/5	{a,d}
	0	1		{b,c}
	1/3		2/3	{b,d}
		3/7	4/7	{c,d}

L'échelle v, identique à celle de la plupart des exemples précédents, est reportée sur la figure 6. On vérifiera que les probabilités de choix binaires satisfont l'équivalence (47). Par contre, P n'est pas fortement connexe.

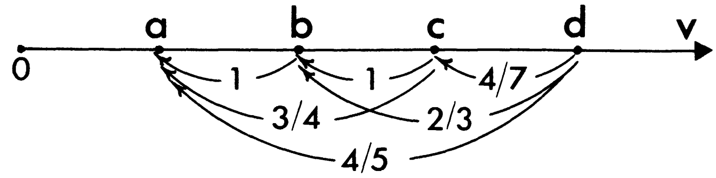

Figure 6. L'échelle v associée au système de choix du tableau V

Par exemple, il n'existe pas de chaîne P-orientée de b à a : (b,d,a) et (b,d,c,a) sont pratiquement les deux seules chaînes P-incertaines de b à a et, bien que P(b,a) = 1, P(b,d) = 1/3 < 1/2.

8. DISCUSSION

On a proposé ici une extension aux systèmes de choix connexes, d'une échelle qui vérifie la relation

$$\forall E \in \Phi(U);\ P_E(x) = v(x) / \sum_{y \in E} v(y)$$

lorsque P est partout incertain. La condition plus générale

$$\forall E \in \Phi(U);\ \forall x \in E^{P>};\ P_E(x) = v(x) / \sum_{y \in E^{P>}} v(y),$$

et l'existence d'une fonction non décroissante k: $]0,1[\to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall \alpha \in]0,1[;\ P(x,y) \geq \alpha \Longleftrightarrow v(x)/v(y) \geq k(\alpha),$$

permettent d'étendre de façon cohérente ce type de mesure, sur la base de choix qui peuvent être parfois certains.

Les choix certains ne peuvent justifier l'intérêt qu'on leur porte que s'ils s'avèrent suffisamment denses pour n'être pas que des limites théoriques de choix presque certains mais cependant incertains. Dans le cas présent, ceci pourrait signifier qu'à un rapport "modéré" v(x)/v(y) corresponde éventuellement un choix certain de x contre y.

Imaginons par exemple que v(x)/v(y) = 2 et P(x,y) = 1. Si P est un système de choix de Luce uniforme, on en déduirait immédiatement que toutes les probabilités de choix binaires incertains sont compris entre 1/3 et 2/3. C'est là un résultat paradoxal qui signifie simplement qu'il ne peut exister de probabilités de choix incertains aussi proches que l'on veut de 1. L'existence d'une telle discontinuité rendue nécessaire, pose quelques problèmes quant à la pertinence du modèle pour des réponses qui combinent l'incertitude et la certitude.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FISHBURN P.C., "Binary Choice Probabilities : on the Varieties of Stochastic Transitivity", *J. of math. Psychol.*, 10 (1973), 327-352.

[2] LUCE R.D., *Individual Choice Behavior,* New York, Wiley, 1959.

[3] LUCE R.D., "The Choice Axiom after Twenty Years", *J. of math. Psychol.,* 15 (1977), 215-233.

[4] LUCE R.D., GALANTER E., "Discrimination", in *Handbook of Mathematical Psychology,* Vol. 1, R.D. Luce, R.R. Bush, E. Galanter (eds), New York, Wiley, 1963.

[5] LUCE R.D., SUPPES P., "Preference, Utility, and Subjective Probability", in *Handbook of Mathematical Psychology,* Vol. 3, R.D. Luce, R.R. Bush, E. Galanter (eds), New York, Wiley, 1965.

[6] TVERSKY A., RUSSO J.E., "Substitutability and Similarity in Binary Choices", *J. of math. Psychol.,* 6 (1969), 1-12.