MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

NORBERT POLAT
CLAUDE FLAMENT

Applications galoisiennes proches d'une application entre treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 70 (1980), p. 33-49
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1980__70__33_0>

Math. Sci. hum. (*18*^{e} année, n°70, *1980*, p.33-49)

APPLICATIONS GALOISIENNES PROCHES D'UNE APPLICATION ENTRE TREILLIS

Norbert POLAT* et Claude FLAMENT**

On a développé (1) une théorie de la similitude sur les objets d'un ensemble X, qui revient à définir une correspondance de Galois entre le treillis P = $\mathcal{P}$(X) des parties de X, et l'ensemble ordonné Q des valeurs de similitude. Souvent, les *données empiriques* de similitude ne se présentent pas spontanément sous cette forme. Nous avons proposé une solution pour le cas où les données empiriques ont la forme d'un indice numérique sur les paires d'éléments de X (Flament, 1979). D'autres types de données (par exemple, celles que nous mentionnons *in fine*, ou celles résultant de la technique de similitude dite "chassez l'intru"), peuvent, plus ou moins facilement, se traduire par une application f de P = $\mathcal{P}$(X) dans un treillis Q ; *a priori*, l'application f est quelconque, et on veut trouver une correspondance de Galois "proche" de f.

Nous proposons ici *une* solution. Nous rappellerons qu'une correspondance de Galois (g,h) entre deux ensembles ordonnés P et Q, est complètement caractérisée par sa composante g de P dans Q ; nous montrerons que, dans le treillis Q^P des applications de P dans Q, l'ensemble des composantes galoisiennes g supérieure à une application f quelconque, a un minimum. C'est cette composante galoisienne sous-dominante de f que nous construirons.

---

(1) Cf. par exemple : Flament, Degenne et Vergès (1979), Flament (1979).

---

* Boursier du Gouvernement de Québec.

**Centre de Mathématique Sociale de l'EHESS, Marseille.

Pour les besoins de cette construction, on introduira la notion de *dérivée* d'une application d'un demi-treillis dans un autre.

0. NOTATION ET TERMINOLOGIE.

0.1. A et B étant deux ensembles, on définit une relation de A dans B comme un sous-ensemble de $A \times B$, et on note B^A l'ensemble des applications de A dans B. En particulier, on a $B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$.

0.2. Soit P un ensemble ordonné. Pour $x \in P$ on pose $[x,\rightarrow[= \{y \in P : y \geq x\}$ et $]x,\rightarrow[= \{y \in P : y > x\}$.

Une partie A de P est *coinitiale* (resp. *cofinale*) à P si et seulement si, pour tout $x \in P$, il existe $y \in A$ tel que $y \leq x$ (resp. $y \geq x$).

0.3. Un *inf* (resp. *sup*) - *demi-treillis complet*, que l'on notera $\wedge$ (resp. $\vee$) - *demi-treillis*, est un ensemble ordonné dont tout partie *non vide* admet un infimum (resp. un supremum).

Un *treillis complet* est un ensemble qui est à la fois un $\wedge$ - demi-treillis et un $\vee$ - demi-treillis.

0.4. Etant donnés deux ensembles ordonnés P et Q, une application f de P dans Q sera dite *isotone* si et seulement si, quels que soient x , $y \in P$, on a $x \leq y$ implique $fx \leq fy$.

0.5. Si P et Q sont deux $\wedge$ - demi-treillis on notera $\mathrm{Hom}_{\wedge}(P,Q)$, l'ensemble des $\wedge$ - homomorphismes (inf - homomorphismes complets) de P dans Q, i.e. l'ensemble des applications f de P dans Q telles que l'on ait

$$f(\wedge A) = \wedge f A$$

pour toute partie non vide A de P.

0.6. Soit P un ensemble et Q un $\wedge$ - demi-treillis. Si, pour toute partie non vide F de Q^P, on définit $\wedge F$ comme l'application $x \longmapsto \bigwedge_{f \in F} f x$ de P dans Q, alors il est clair que Q^P est lui-même un $\wedge$ - demi-treillis.

On prouve alors aisément que, *si* P *et* Q *sont deux* $\wedge$ - *demi-treillis, alors* $\mathrm{Hom}_{\wedge}(P,Q)$ *est un sous* - $\wedge$ - *demi-treillis de* P^Q. En effet, pour toutes parties non vides F de $\mathrm{Hom}_{\wedge}(P,Q)$ et A de P, on a

$$(\wedge F)(\wedge A) = \bigwedge_{f\in F} f(\wedge A) = \bigwedge_{f\in F} (\wedge f A)$$

$$= \bigwedge_{x\in A} (\bigwedge_{f\in F} f x) = \wedge((\wedge F)A)$$

Ce qui prouve bien que $\wedge F \in \mathrm{Hom}_{\wedge} (P,Q)$.

0.7. Pour tout élément x d'un $\wedge$ - demi-treillis P on posera

$$P_x^{\wedge} = \{A \subseteq P : \wedge A \leq x\}$$

et on le notera plus simplement P_x si aucune confusion n'est à craindre.

0.8. <u>Correspondances de Galois</u>(1).

0.8.1. P et Q étant des ensembles ordonnés, le couple (g,h) d'applications : $g : P \to Q$, $h : Q \to P$ est une correspondance de Galois si et seulement si :
. g et h sont décroissantes ;
. les composés g o h et h o g sont extensifs
($x \leq (h \circ g)(x)$; $y \leq (g \circ h)(y)$; $x \in P$, $y \in Q$).

0.8.2. Pickert (1952) a donné une définition équivalente :
$g(x) \geq y \Leftrightarrow x \leq h(y)$.

0.8.2.1. En effet, si (g,h) vérifie (0.8.1.) on a :
$g(x) \geq y \Rightarrow h(g(x)) \leq h(y)$; et puisque : $x \leq h(g(x))$, on a : $x \leq h(y)$;
et dualement, on a la réciproque. Si maintenant (g,h) vérifie la relation de Pickert :
. $g(x) \geq (g(x)) \Rightarrow x \leq h(g(x))$;
. $x \leq x' \Rightarrow x \leq h(g(x')) \Rightarrow g(x) \geq g(x')$;
dualement, on a l'extensivité de g o h et la décroissance de h.

0.8.2.2. <u>Remarque</u>. Si Q a une borne inférieure 0, la relation de Pickert montre tout de suite que P doit avoir une borne supérieure, qui est l'image de 0 :

$$(x \in P) \quad g(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq h(0).$$

Dans le cas (0.8.5) nous considérerons Q demi-treillis inférieur complet, et donc borné inférieurement, P étant un demi-treillis supérieur complet, et donc

---

(1) Cf. Barbut et Monjardet (1970) ; Szasz (1971) ; Shmuely (1974) ; Pickert (1952) ; Derderian (1967).

borné supérieurement.

0.8.3. La relation de Pickert permet d'établir qu'une correspondance de Galois (g,h) est complètement caractérisée par l'une de ses composantes, par exemple g.

On dira qu'une application g de P dans Q, ensembles ordonnés, est *galoisienne* si elle est décroissante et telle que pour tout $y \in Q$, $\max \{x : g(x) \geq y\}$ existe. On pose alors : $h(y) = \max \{x : g(x) \geq y\}$. Montrons que (g,h) est une correspondance de Galois :
puisque $h(y) \in \{x : g(x) \geq y\}$, il s'en suit que $g(h(y)) \geq y$; et :
$x \leq h(y) \Rightarrow g(x) \geq g(h(y)) \geq y$; réciproquement :
$g(x) \geq y \Rightarrow x \leq \max \{x' : g(x') \geq y\} = h(y)$. Inversement, si (g,h) est une correspondance de Galois, $\max \{x : g(x) \geq y\}$ existe pour tout y ; par la relation de Pickert, on a : $\{x : g(x) \geq y\} = \{x : x \leq h(y)\}$, et le maximum de cet ensemble n'est autre que $h(y)$.

0.8.4. Si P est un demi-treillis supérieur complet, on peut remplacer la condition d'existence de $\max \{x : g(x) \geq y\}$, par la propriété suivante : l'ensemble $\{x : g(x) \geq y\}$ est non vide et

$$g\left(\bigvee_{g(x)\geq y} x\right) \geq y$$

En effet, si (g,h) est une correspondance de Galois, on a :
$h(y) = \max \{x : g(x) \geq y\} = \bigvee_{g(x)\geq y} x$, et $g(h(y)) \geq y$. Réciproquement, $\{x : g(x) \geq y\} \neq \emptyset$ et $g\left(\bigvee_{g(x)\geq y} x\right) \geq y$ impliquent que

$\bigvee_{g(x)\geq y} x \in \{x : g(x) \geq y\}$ et en est le maximum.

0.8.5. Si P est un demi-treillis supérieur complet, et Q, un demi-treillis inférieur complet, toute application g de P dans Q est galoisienne si et seulement si elle vérifie :

G1 : $g\left(\bigvee_{x\in P'} x\right) = \bigwedge_{x\in P'} g(x) \quad (P' \subseteq P \ ,\ P' \neq \emptyset)$.

G2 : $g(P)$ est cofinale à Q (cf.0.2.).

Si g a cette propriété, alors :
. $x \leq x' \Rightarrow \{g(x'') : x'' \leq x\} \subseteq \{g(x''') : x''' \leq x'\}$

$$\Rightarrow \bigwedge_{x''\leq x} g(x'') \geq \bigwedge_{x'''\leq x'} g(x''') \Rightarrow g\left(\bigvee_{x''\leq x} x''\right) = g(x) \geq g(x') = g\left(\bigvee_{x'''\leq x} x'''\right)$$

. par G2 , $\bigvee_{g(x)\geq y} x$ existe et on a : $g\left(\bigvee_{g(x)\geq y} x\right) = \bigwedge_{g(x)\geq y} g(x) \geq y$.

Si (g,h) est une correspondance de Galois, alors, pour toute partie non-vide P' de P, on a :

$$P' \subseteq \{x' : g(x') \geq \bigwedge_{x\in P'} g(x)\} = P'' \Rightarrow \bigvee_{x\in P'} x \leq \max P'' = h\left(\bigwedge_{x\in P'} g(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\bigvee_{x\in P'} x\right) \geq g\left(h\left(\bigwedge_{x\in P'} g(x)\right)\right) \geq \bigwedge_{x\in P'} g(x) \;;$$

mais : $x' \in P' \Rightarrow x' \leq \bigvee_{x\in P'} x \Rightarrow g(x') \geq g\left(\bigvee_{x\in P'} x\right) \Rightarrow \bigwedge_{x\in P'} g(x) \geq g\left(\bigvee_{x\in P'} x\right)$;

d'où l'égalité annoncée.

0.8.6. Rappelons qu'une application g d'un ensemble ordonné P dans un ensemble ordonné Q est *résiduelle* (cf. Shmuely, 1974) si et seulement si g est une application galoisienne du dual de P dans Q.

En raison de (0.8.5.), *si* P *et* Q *sont deux* $\wedge$*-demi-treillis, une application g de* P *dans* Q *est résiduelle si et seulement si c'est un* $\wedge$*-homomorphisme de P dans Q qui vérifie la condition G2.*

0.8.7. Pour simplifier l'écriture nous choisirons par la suite de ne travailler qu'avec des $\wedge$-demi-treillis, et par conséquent le problème qui nous intéresse est celui de déterminer, lorsqu'elle existe, *l'application résiduelle sous-dominante* à une application quelconque d'un $\wedge$-demi-treillis dans un autre, i.e. d'après (0.8.6.), le $\wedge$-homomorphisme vérifiant G2 qui est sous-dominant à l'application considérée.

Nous ne résoudrons pas ce problème dans toute sa généralité. En fait nous nous bornerons à rechercher le $\wedge$-homomorphisme sous-dominant d'une telle application. Par ailleurs des exemples très simples montrent que l'existence d'un $\wedge$-homomorphisme sous-dominant n'implique pas nécessairement celui d'une application résiduelle sous-dominante, à moins évidemment que la fonction considérée vérifie déjà elle-même la condition G2, puisqu'alors toute application qui lui est supérieure ou égale vérifie aussi cette même condition. Ceci étant le cas de toutes les applications considérées en technique de similitude, la recherche du $\wedge$-homomorphisme sous-dominant sera donc suffisante pour les applications envisagées.

1. $\wedge$ -DERIVEE.

1.1. <u>Définition</u> : Soit P et Q deux $\wedge$ - demi-treillis (non vides), et soit f une application de P dans Q. On appellera $\wedge$ - *dérivée de* f *en* $x \in P$, et on notera $D_\wedge fx$, le suprémum s'il existe de l'ensemble $\{\wedge fA : A \in P_x\}$, i.e.

$$D_\wedge f x = \bigvee_{A \in P_x} (\wedge f A)$$

Si $D_\wedge fx$ existe on dira que f est $\wedge$ - *dérivable en* x.

1.2. <u>Remarque</u> : Q étant complet $D_\wedge fx$ *existe si et seulement si l'ensemble* $\{\wedge fA : A \in P_x\}$ *est majoré*, ce qui sera évidemment toujours le cas si Q a un plus grand élément, i.e. si c'est un treillis complet, ou si P est un treillis complet et f isotone puisque dans ce cas $f(\vee P)$ majore l'ensemble

$$\{\wedge fA : A \subseteq P\}$$

1.3. La fonction $D_\wedge f : x \longrightarrow D_\wedge fx$, du sous-ensemble de P où f est $\wedge$ - dérivable sur Q, sera appelée la $\wedge$ - *dérivée* de f.

Remarquons que si f n'est dérivable en aucun point de P alors $D_\wedge f = \emptyset$. D'autre part, puisque $Q^\emptyset = \{\emptyset\}$, nous poserons par convention

$$D_\wedge \emptyset = \emptyset$$

1.4. <u>Proposition</u> : dom $D_\wedge f$ *est une partie héréditaire de* P (i.e. $y \leq x \in \text{dom}\, D_\wedge f$ implique $y \in \text{dom}\, D_\wedge f$).

En conséquence c'est un sous - $\wedge$ - demi-treillis de P.

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in \text{dom}\, D_\wedge f$ et $y \leq x$. Pour tout $A \in P_y$ on a $\wedge A \leq y \leq x$, donc $A \in P_x$. On a donc $P_y \subseteq P_x$, et par suite $\{\wedge fA : A \in P_y\}$ est majoré par $D_\wedge fx$, ce qui prouve que $D_\wedge fy$ existe d'après (1.2.).

C.Q.F.D.

1.5. Si $A \subseteq \text{dom}_\wedge f$ on dit que f est $\wedge$-*dérivable sur* A. On notera $\mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ l'ensemble des fonctions de P dans Q $\wedge$ - *dérivables sur* P.

D'après (1.2.), si Q est un treillis complet et P un $\wedge$ - demi-treillis quelconque, alors $\mathcal{D}_\wedge(P,Q) = Q^P$ et $\mathcal{D}_\wedge(Q,P)$ contient toutes les applications isotones de Q dans P.

1.6. Théorème : *Soit* $f \in \mathcal{D}_\wedge(P, Q)$. *On a les propriétés suivantes :*

(i) $f \leq D_\wedge f$;

(ii) $g \leq f$ *implique* $g \in \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ *et* $D_\wedge g \leq D_\wedge f$;

(iii) $D_\wedge f$ *est isotone*

(iv) $f \in \mathrm{Hom}_\wedge(P,Q)$ *si et seulement si* $D_\wedge f = f$

Démonstration : (i) Pout tout $x \in P$ on a $\{x\} \in P_x$ et $\wedge f\{x\} = fx$, donc $D_\wedge fx \geq fx$

(ii) Soit $x \in P$. Pour tout $A \in P_x$ et tout $y \in A$ on a $gy \leq fy$, donc $\wedge gA \leq \wedge fA$ L'ensemble $\{\wedge gA : A \in P_x\}$ est donc majoré par $D_\wedge fx$, et par suite g est dérivable en x, et on a de plus

$$D_\wedge fx = \bigvee_{A \in P_x} (\wedge gA) \leq D_\wedge fx.$$

(iii) Soit $x, y \in P$ tels que $x \leq y$. On a $P_x \subseteq P_y$ (cf. démonstration de (1.4.)) , donc

$$D_\wedge fx = \bigvee_{A \in P_x} (\wedge fA) \leq \bigvee_{A \in P_y} (\wedge fA) = D_\wedge fy$$

(iv) Si $f \in \mathrm{Hom}_\wedge(P,Q)$ alors, pour tout $x \in P$ et tout $A \in P_x$, on a

$$\wedge fA = f(\wedge A) \leq fx$$

puisque $\wedge A \leq x$. De plus $\{x\} \in P_x$. En conséquence on a

$$fx \leq D_\wedge fx \leq fx$$

d'où $D_\wedge fx = fx$.

Réciproquement supposons que $D_\wedge f = f$ et soit $P' \subseteq P$. D'après (iii) f est isotone donc $f(\wedge P') \leq \wedge f P'$. D'autre part on a $P' \in P_{\wedge P'}$, et par suite

$$f(\wedge P') = D_\wedge f(\wedge P') = \bigvee_{A \in P_{\wedge P'}} (\wedge fA) \geq \wedge fP'$$

on a donc bien $f(\wedge P') = \wedge fP'$. D'où le résultat.

C.Q.F.D.

Comme conséquences triviales nous obtenons :

1.7. Corollaire : *Etant donnés deux* $\wedge$*-demi-treillis quelconques* P *et* Q, *nous avons les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ *est une partie héréditaire du* $\wedge$ *- demi-treillis* Q^P.

(ii) $\mathrm{Hom}_\wedge(P,Q) \subseteq \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$.

(iii) *Soit* $f \in Q^P$ *et* $g \in \mathrm{Hom}_\wedge(P,Q)$ *telle que* $f \leq g$. *On a alors* $f \in \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ *et* $D_\wedge f \leq g$.

(iv) *Si* Q *est un treillis complet alors* $D_\wedge$ *est un opérateur dans le treillis complet* Q^P (i.e. une application extensive et isotone de Q^P dans lui-même) *dont* $\mathrm{Hom}_\wedge(P,Q)$ *est l'ensemble des points fixes.*

Pour ce qui est de (1.7.iv), en vertu d'un résultat de Flament [1978, théorème 3] nous savons qu'il existe alors dans Q^P une fermeture Δ (i.e. un opérateur idempotent) dont les fermés sont les $\wedge$ - homomorphismes de P dans Q, et telle que, pour tout $f \in Q^P$ et tout entier n, on ait $D^n_\wedge f \leq \Delta f$. Nous caractériserons cette fermeture dans la section suivante.

1.8. Théorème : *Soit* P *et* Q *deux* $\wedge$ *- demi-treillis quelconques tels que toute application isotone de* P *dans* Q *soit* $\wedge$ *- dérivable sur* P*, et soit* $f \in Q^P$. *Alors on a* $f \in \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ *si et seulement si l'ensemble* $\{fy : y \leq x\}$ *est majoré pour tout* $x \in P$.

Démonstration : *Suffisance :* Pour tout $x \in P$, si $\{fy : y \leq x\}$ est majoré alors $\bigvee_{y \leq x} fy$ existe puisque Q est complet. On prouve alors aisément que l'application $g : x \longmapsto \bigvee_{y \leq x} fy$ est la plus petite application isotone de P dans Q supérieure ou égale à f. Or, en vertu de l'hypothèse du théorème, g est $\wedge$ - dérivable sur P. Il suffit alors d'appliquer (1.6.ii), on a $f \leq g \in \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$ donc $f \in \mathcal{D}_\wedge(P,Q)$.

Nécessité : Supposons que f soit $\wedge$ - dérivable sur P et soit $x \in P$. Alors comme $\{\{y\} : y \leq x\} \subseteq P_x$ on a $\{fy : y \leq x\} \subseteq \{fA : A \in P_x\}$ qui est majoré par $D_\wedge f x$ D'où le résultat.

C.Q.F.D.

2. $\wedge$ - DERIVEES ITEREES.

2.1. Définition : Soit P et Q deux $\wedge$ - demi-treillis et soit $f \in Q^P$. On définit par récurrence les fonctions $D^\alpha_\wedge f$, où α est un ordinal, en posant

$$D^0_\wedge f = f$$

$$D^{\alpha+1}_\wedge f = D_\wedge (D^\alpha_\wedge f)$$

et si α est limite $D_\wedge^\alpha f : x \longmapsto \bigvee_{\xi<\alpha} D_\wedge^\xi fx$ pour tout $x \in \bigcap_{\xi<\alpha} \operatorname{dom} D_\wedge^\xi f$ tel que l'ensemble $\{D_\wedge^\xi fx \ : \xi < \alpha\}$ soit majoré.

$D_\wedge^\alpha f$ est appelée la $\wedge$*-dérivée d'ordre* α de f.

Remarquons qu'en raison de la convention faite en (1.3) $D_\wedge^\alpha f$ a toujours un sens. De plus on a :

$$\operatorname{dom} D_\wedge^\alpha f \subseteq \operatorname{dom} D_\wedge^\beta f \text{ si et seulement si } \beta \leq \alpha.$$

2.2. <u>Proposition</u> : *Quelles que soient* $f, g \in Q^P$ *et quels que soient les ordinaux* α *et* β*, on a les propriétés suivantes* :

(i) $(D_\wedge^\alpha f \mid \operatorname{dom} D_\wedge^\beta f) \leq D_\wedge^\beta f$ *si* $\alpha \leq \beta$;

(ii) $f \leq g$ *implique* $(D_\wedge^\alpha f \mid \operatorname{dom} D_\wedge^\alpha g) \leq D_\wedge^\alpha g$;

(iii) $D_\wedge^\alpha f$ *est isotone.*

<u>Démonstration</u> : En raison de (1.6) nous ne prouverons que la propriété (iii) et seulement dans le cas où α est limite.

Soit $x, y \in \operatorname{dom} D_\wedge^\alpha f$. Pour tout $\xi < \alpha$ on a $D_\wedge^\xi fx \leq D_\wedge^\xi fy$ si $x \leq y$. Alors $D_\wedge^\alpha fx = \bigvee_{\xi<\alpha} D_\wedge^\xi fx \leq \bigvee_{\xi<\alpha} D_\wedge^\xi fy = D_\wedge^\alpha fy$.

C.Q.F.D.

2.3. Soit $f \in Q^P$. Pour des raisons de cardinalité il existe un ordinal α tel que $D_\wedge^{\alpha+1} f = D_\wedge^\alpha f$. Le plus petit de ces ordinaux sera appelé le $\wedge$ *-rang* de f, et sera noté $r_\wedge(f)$.

D'autre part, f sera dite *indéfiniment* $\wedge$ *- dérivable sur* P si et seulement si $D_\wedge^\alpha f = P$ pour tout ordinal α, ce qui est équivalent à $\operatorname{dom} D_\wedge^\alpha f = P$ pour $\alpha = r_\wedge(f)$.

2.4. <u>Exemple</u>

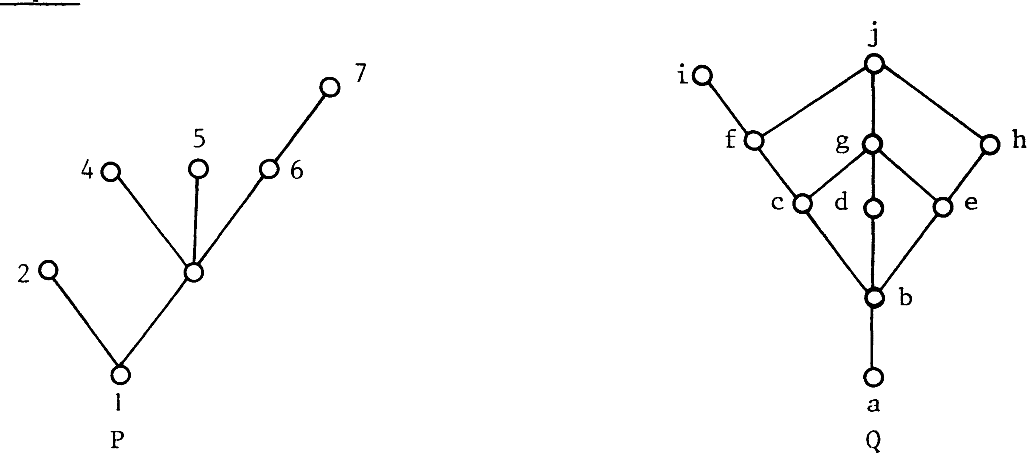

Figure 1

Soit P et Q les $\wedge$ - demi-treillis tels que définis dans la Figure 1. Considérons la fonction φ de P dans Q ainsi que ses $\wedge$ - dérivées itérées décrites dans le tableau ci-dessous.

x	φx	$D_\wedge \varphi x$	$D^2_\wedge \varphi x$	$D^3_\wedge \varphi x$
1	b	b	c	f
2	i	i	i	i
3	a	e	g	j
4	d	g	g	j
5	e	e	g	j
6	e	e	g	j
7	h	h	j	j

On a $D^4_\wedge \varphi = D^3_\wedge \varphi$ et dom $D^3_\wedge \varphi = P$. Donc φ est indéfiniment $\wedge$ - dérivable sur P avec $r_\wedge(\varphi) = 3$.

2.5. <u>Proposition</u> : *On a* $f \in \mathrm{Hom}_\wedge(P,Q)$ *si et seulement si* $r_\wedge(f) = 0$

C'est une conséquence immédiate de (1.6.iv).

2.6. <u>Proposition</u> : *Soit* $f \in Q^P$. *L'ensemble des* $\wedge$ *- homomorphismes de* P *dans* Q *supérieurs ou égaux à* f *a un plus petit élément si et seulement si* f *est indéfiniment* $\wedge$ *- dérivable sur* P. *De plus cet élément (i.e. le* $\wedge$ *- homomorphisme sous-dominant de* f*) est* $D^\alpha_\wedge f$ *où* $\alpha = r_\wedge(f)$.

C'est une conséquence triviale de (1.6.iv) et de (1.7.iii).

2.7. <u>Remarque</u> : Pour $f \in Q^P$ notons Δf le $\wedge$ -homomorphisme sous-dominant de f s'il existe, et supposons que Q soit un treillis complet et P un $\wedge$ - demi-treillis quelconque. D'après (1.5.) tout élément de Q^P ainsi que toute application isotone de Q dans P admettent un $\wedge$ - homomorphisme sous-dominant.

L'opérateur Δ est évidemment la fermeture de Q^P associée à $D_\wedge$ telle que mentionnée en (1.7.). En conséquence nous savons que, pour tout $f \in Q^P$, l'ensemble $\{g \in Q^P : \Delta g = \Delta f\}$ est une partie convexe de Q^P admettant un élément maximum, mais par contre ce n'est pas en général un sous-inf-demi-treillis de Q^P, comme le montre l'exemple suivant.

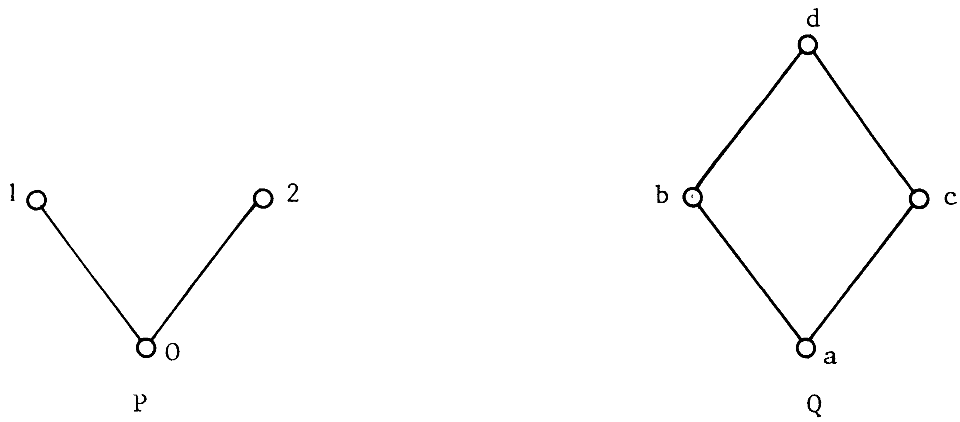

Figure 2

Considérons P et Q tels que définis dans la fig. 2, et soit les fonctions :

$$f = \{(0, b), (1, d), (2, c)\}$$

et

$$g = \{(0, c), (1, b), (2, d)\}$$

On a

$$\Delta f = \Delta g = \{(x, d) : x \in P\},$$

tandis que

$$f \wedge g = \{(0, a), (1, b), (2, c)\}$$

est aussi un $\wedge$-homomorphisme mais qui est différent de Δf.

3. CAS PARTICULIERS

Nous finirons cette étude en voyant deux cas particuliers. Rappelons tout d'abord certaines définitions.

3.1. Soit P un $\wedge$-demis-treillis et soit $x \in P$.

. Une $\wedge$-*décomposition* de x est toute partie A de P telle que $\wedge A = x$.

. Une $\wedge$-décomposition A de x est *non-redondante* si pour toute partie stricte B de A on a $\wedge B \neq x$.

. x est $\wedge$-*irréductible* si x appartient à toutes ses $\wedge$-décompositions. Il est $\wedge$-*réductible* dans le cas contraire.

. Une $\wedge$-décomposition est *irréductible* si et seulement si tous ses éléments sont $\wedge$-irréductibles.

. P et $\wedge$-*engendré de manière unique par ses éléments* $\wedge$-*irréductibles* si et seulement si tout élément de P admet une unique $\wedge$-décomposition irréductible non redondante.

3.2. Théorème : *Soit* P *un* $\wedge$*-demi-treillis* $\wedge$*-engendré de manière unique par ses éléments* $\wedge$*-irréductibles. Alors quel que soit le* $\wedge$*-demi-treillis* Q, *toute application isotone* f *de* P *dans* Q *est indéfiniment* $\wedge$*-dérivable sur* P *et de* $\wedge$*-rang* ≤ 1*. De plus, pour tout* $x \in P$*, on a*

$$D_\wedge fx = \Delta fx = fC_x$$

où C_x *est l'unique* $\wedge$*-décomposition irréductible non redondante de* x.

Ce sera en particulier le cas de tout $\wedge$-demi-treillis libre et celui du treillis des parties de tout ensemble.

Démonstration : (i) Soit $x \in P$ et $A \in P_x$. On a $\wedge A \leq x = \wedge C_x$. Pour tout $y \in A$ il existe $z \in C_{\wedge A}$ tel que $y \leq z$, et comme f est isotone on a $fy \leq fz$, et par suite $\wedge fA \leq \wedge fC_{\wedge A}$. D'autre part $\wedge A \leq x$ implique $C_x \subseteq C_{\wedge A}$, donc $fC_x \subseteq fC_{\wedge A}$. Par conséquent on a

$$\wedge fA \leq \wedge fC_{\wedge A} \leq \wedge fC_x,$$

ce qui, puisque $C_x \in P_x$, entraîne bien

$$D_\wedge fx = \bigvee_{A \in P_x} (\wedge fA) = \wedge fC_x$$

(ii) Montrons que $D_\wedge^2 f = D_\wedge f$ ce qui prouvera que $r_\wedge(D_\wedge f) = 0$ donc $r_\wedge(f) \leq 1$. Soit $x \in P$, on a

$$D_\wedge^2 fx = D_\wedge(D_\wedge f)x = \wedge D_\wedge fC_x$$

en raison de (i) puisque $D_\wedge f$ est isotone. D'autre part pour $y \in C_x$ on a $C_y = \{y\}$ puisque y est $\wedge$-irréductible, donc $D_\wedge fy = fy$.

En conséquence on obtient

$$D_\wedge^2 fx = \wedge fC_x = D_\wedge fx.$$

C.Q.F.D.

3.3. Nous allons voir maintenant une autre classe de $\wedge$-demi-treillis pour qui un résultat analogue à (3.2) pourra être énoncé. Ce sont les $\wedge$-demis-treillis P vérifiant la propriété suivante :

3.3.1. *Pour tout* $x \in P$, *toute* $\wedge$*-décomposition de* x *ne contenant pas* x *est coinitiale à* $]x, \rightarrow[$.

Toute chaîne vérifie évidemment cette propriété. Plus généralement nous avons le résultat suivant.

3.3.2. Proposition : *Soit* P *un* $\wedge$*-demi-treillis vérifiant la condition* (3.3.1.), *et soit* $x \in P$. *On a alors les propriétés suivantes :*

(i) *Si* x *est* $\wedge$*-réductible alors les* $\wedge$*-décompositions de* x *ne contenant pas* x *sont les parties coinitiales de* $]x, \rightarrow[$.

(ii) x *admet une unique* $\wedge$*-décomposition irréductible non redondante et celle-ci ne possède au plus que deux éléments, ou il admet une* $\wedge$*-décomposition qui est une chaîne de* $]x, \rightarrow[$.

Démonstration : (i) C'est évident en raison de (3.3.1.) et du fait que, si A est coinitial à $]x, \rightarrow[$, alors

$$\wedge A = \wedge\,]x, \rightarrow[\, = x$$

puisque x est $\wedge$-réductible.

(ii) Supposons que x soit $\wedge$-réductible et qu'il n'admette aucune chaîne de $]x, \rightarrow[$ comme $\wedge$-décomposition. Posons alors

$$A = \{\wedge C : C \text{ chaîne maximale de }]x, \rightarrow[\}.$$

En raison de la maximalité des chaînes considérées, A est formé d'éléments deux à deux incomparables. D'autre part A est coinitial à $]x, \rightarrow[$ et c'est donc une $\wedge$-décomposition de x.

Montrons que $|A| = 2$. On a évidemment $|A| > 1$. Supposons que A possède au moins trois éléments, soit y_0, y_1 et y_2. Alors, en raison de la coinitialité de A avec $]x, \rightarrow[$ et de l'incomparabilité des éléments de A on a

$$y_0 \wedge y_1 = x = y_1 \wedge y_2.$$

Mais ni $\{y_0, y_1\}$ ni $\{y_1, y_2\}$ ne sont coïnitiaux à $]x, \rightarrow[$ contrairement à l'hypothèse, et par conséquent on a bien $|A| = 2$.

De plus les deux éléments y_0 et y_1 de A doivent être $\wedge$-irréductibles, car si l'un d'eux, disons y_0, ne l'était pas, alors on aurait

$$\wedge(\{y_1\} \cup\,]y_0, \rightarrow[) = x$$

avec $\{y_1\} \cup\,]y_0, \rightarrow[$ non coinitial à $]x, \rightarrow[$. Il s'en suit que A est une $\wedge$-décomposition irréductible non redondante de x, et qu'elle est évidemment unique.

C.Q.F.D.

3.3.3. Théorème : *Soit* P *un* $\wedge$*-demi-treillis vérifiant la condition* (3.3.1.). *Alors quel que soit le* $\wedge$*-demi-treillis* Q, *toute application isotone* f *de* P *dans* Q *est indéfiniment* $\wedge$*-dérivable sur* P *et de* $\wedge$*-rang* ≤ 1. *De plus, pour tout* $x \in P$ *on a*

$$D_\wedge fx = \begin{cases} fx \text{ si } x \text{ est } \wedge - \text{irréductible} \\ \bigwedge_{y>x} fy \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration : (i) Soit $x \in P$. Pour tout $A \in P_x$ tel que $\wedge A < x$ on a $x \in \bigcup_{y \in A} [y, \rightarrow[$, car A est coïnitial soit à $[\wedge A, \rightarrow[$ soit à $]\wedge A, \rightarrow[$.
Par suite, puisque f est isotone, on a $\wedge fA < fx$, ce qui implique que

$$D_\wedge fx = \vee \{\wedge fA : A \in P_x \text{ et } \wedge A = x\}$$

Si x est $\wedge$-irréductible alors, puisque f est isotone, on a $\wedge fA = fx$ pour toute $\wedge$-décomposition de x, et par conséquent

$$D_\wedge fx = fx.$$

Si x n'est pas $\wedge$-irréductible, alors toute $\wedge$-décomposition A de x ne contenant pas x est coïnitiale à $]x, \rightarrow[$ et, en raison de l'isotonie de f, fA est aussi coïnitiale à $f(]x, \rightarrow[)$. Par suite on a $\wedge fA = \wedge f(]x, \rightarrow[)$ donc

$$D_\wedge fx = \bigwedge_{y>x} fy \quad (=\wedge fA).$$

(ii) Montrons que $D^2_\wedge f = D_\wedge f$ ce qui prouvera que $r_\wedge(D_\wedge f) = 0$ donc que $r_\wedge(f) \leq 1$. Soit $x \in P$. Comme $D_\wedge f$ est aussi isotone on a en raison de (i)

$$D^2_\wedge fx = D_\wedge(D_\wedge f)\ x = \begin{cases} D_\wedge fx = fx \text{ si } x \text{ est } \wedge\text{-irréductibl} \\ \bigwedge_{y>x} D_\wedge fy \text{ sinon} \end{cases}$$

Il reste donc à étudier le cas où x est $\wedge$-réductible. En raison de l'isotonie de $D_\wedge f$, et d'après la fin de (i), on a

$$D^2_\wedge fx = \wedge D_\wedge fA$$

pour une $\wedge$-décomposition A quelconque de x ne contenant pas x.

Si x admet une $\wedge$-décomposition irréductible A on a alors en raison de ce qui précède

$$D^2_\wedge fx = \wedge D_\wedge fA = \wedge fA = D_\wedge fx$$

Supposons donc que x n'admette pas de $\wedge$-décomposition irréductible. Alors en vertu de (3.3.2.i), l'ensemble I des éléments $\wedge$-irréductibles de $]x, \to[$ n'est pas coïnitial à $]x, \to[$ et par conséquent on a $\wedge I > x$ si $I \neq \emptyset$. Posons

$$A = \begin{cases}]x, \wedge I[& \text{si } I \neq \emptyset \\ ]x, \to[& \text{sinon} \end{cases}$$

A est coinitial à $]x, \to[$, donc $\wedge A = \wedge\ ]x, \to[\ = x$, et par suite

$$D^2_\wedge fx = \bigwedge_{y \in A} D_\wedge fy = \bigwedge_{y \in A} \left(\bigwedge_{\substack{z \in A \\ z > y}} fz \right) = \bigwedge_{z \in A} fz = D_\wedge fx$$

ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

3.4. <u>Corollaire</u> : *Soit* P *un* $\wedge$*-demi-treillis vérifiant la condition* (3.3.1.) *ou celle du théorème* (3.2.). *Alors quel que soit le* $\wedge$*-demi-treillis* Q, *toute application* $f \in \mathcal{D}_\wedge(P, Q)$ *est indéfiniment* $\wedge$*-dérivable sur P et de rang* ≤ 2.

En effet on a

$$f \in \mathcal{D}_\wedge(P, Q) \xRightarrow[(1.6.\ iii)]{} D_\wedge f \text{ est isotone}$$

$$\xRightarrow[(3.2.)\text{ ou }(3.3.3.)]{} D_\wedge f \quad \wedge\text{-dérivable sur P et } r_\wedge(D_\wedge f) \leq 1.$$

$$\Longrightarrow f \quad \text{indéfiniment } \wedge\text{-dérivable sur P et } r_\wedge(f) \leq 2.$$

3.5. Soit P un $\wedge$-demi-treillis vérifiant la condition (3.3.1.) ou celle du théorème (3.2.). D'après (1.8.) une fonction f de P dans Q est $\wedge$-dérivable sur P ssi l'ensemble$\{fy = y \leq x\}$ est majoré pour tout $x \in P$.

Considérons donc une telle fonction f et notons encore g son application isotone sous-dominante. On a $gx = \bigvee_{y \leq x} fy$ pour tout $x \in P$ (cf. démonstration de (1.8.). Alors en raison de (1.6. iii), de (3.2.) et de (3.3.3.) on a

$$g \leq D_\wedge f \leq D_\wedge g = \Delta g.$$

d'où, en $\wedge$-dérivant tous les membres de ces inégalités,

$$\Delta g = D_\wedge g \leq D^2_\wedge f = \Delta f \leq D_\wedge \Delta g = \Delta g$$

et en conséquence

$$\Delta f = \Delta g = D_\wedge g.$$

Ceci nous permet d'écrire que, pour tout $x \in P$, si P vérifie la condition :

. du théorème (3.2.) alors $\Delta fx = \bigwedge_{y \in C_x} gy = \bigwedge_{y \in C_x} \left(\bigvee_{z \leq y} fz \right)$;

. (3.3.1.) alors $\Delta fx = \begin{cases} gx = \bigvee_{y \leq x} fy & \text{si } x \text{ est } \wedge\text{-irréductible} \\ \bigwedge_{y > x} gy = \bigwedge_{y > x} \left(\bigvee_{z \leq y} fz \right) & \text{sinon.} \end{cases}$

4. EXEMPLE

On a un ensemble X d'objets, et un ensemble Y de traits caractérisant ces objets. On peut (comme dans les recherches mentionnées en note 1), utiliser la correspondance de Galois associée au tableau booléen X.Y pour définir une similitude : $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, où, pour toute partie non vide A de X, $\alpha(A)$ est l'ensemble des traits communs à tous les objets de A.

Mais on peut aussi considérer dans certains contextes, que toute propriété commune aux objets d'une partie A ne soit *pas pertinente* pour l'appréciation de la similitude de A : si on pense à {souris, baleine}, il n'est pas sûr que le trait (mammifère) s'impose à l'esprit, alors qu'il risque de devenir pertinent pour {souris, chien, éléphant, dauphin, baleine}. Un tel mécanisme peut entraîner une application f de similitude non-décroissante : f(souris, baleine) < f(souris, chien, éléphant, dauphin, baleine).

Cherchons l'application galoisienne sous-dominante d'une telle similitude f ; on est dans le cas du théorème (3.2.), puisque $\mathcal{P}(Y)$ est un demi-treillis inférieur complet, et $\mathcal{P}(X)$, un demi-treillis supérieur complet libre, avec pour base $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$; si A est une partie non vide de X, $C_A = A$. La formule du cas du théorème (3.2.), donnée en (3.5.) devient alors :

$$\Delta f(A) = \bigcap_{x \in A} \left(\bigcup_{A' \ni x} f(A') \right)$$

f(A') est l'ensemble des traits pertinents pour A', communs aux objets de A' et $\bigcup\limits_{A'\ni x} f(A')$ est l'ensemble des traits possédés par x et qui ont été au moins une fois pertinents dans un ensemble A' où figure x (si X est suffisamment "riche", on peut espérer, mais sans garantie, que tous les traits de x apparaitront ainsi). Enfin, $\Delta\, f(A)$ est l'ensemble des traits communs aux objets de A, et on est ramené à l'idée de la similitude α évoquée au début de ce paragraphe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT, M., MONJARDET, B., *Ordre et classification*, Tome 2, Paris, Hachette, 1970.

[2] DERDERIAN, J.C., Residuated mappings, *Pacific journal of Mathematics*, 1967, 20 (1), 35-43.

[3] FLAMENT, C., Un théorème de point fixe dans les treillis, *Mathématiques et Sciences humaines*, 1978, 16 (61), 61-64.

[4] FLAMENT, C., Un modèle des jugements de similitude, *Mathématiques et Sciences humaines*, 1979, 17 (65), 5-21.

[5] FLAMENT, C., DEGENNE, A., VERGES, P., Analyse de similitude ordinale, *Informatique et Sciences humaines*, 1979, 11 (40-41), 223-23).

[6] PICKERT, G., Bemerkungen über Galois-Verdindungen, *Archiv. Math.*, 1952, 3, 285-289.

[7] SHMUELY, Z., The structure of Galois connections, *Pacific Journal of Mathematics*, 1974, 54, 209-225.

[8] SZASZ, G., *Théorie des treillis*, Paris, Dunod, 1971.