Mathématiques et sciences humaines

B. Monjardet

Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres

Mathématiques et sciences humaines, tome 63 (1978), p. 51-82
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1978__63__51_0>

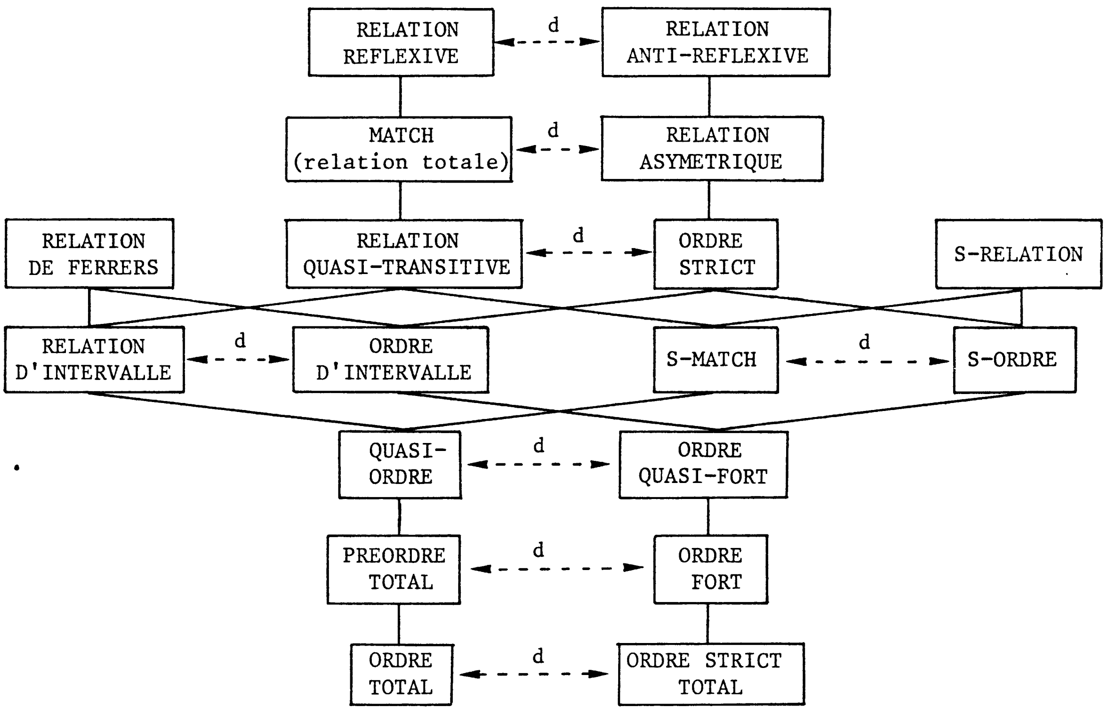
Math. Sci. hum. (*16*^{e} année, n°63, *1978*, p.51-82)

AXIOMATIQUES ET PROPRIETES DES QUASI-ORDRES

B. MONJARDET*

*Université Paris-V et Centre de Mathématique Sociale

La figure ci-dessous résume les liaisons entre les diverses sortes de relations étudiées dans ce texte. Deux ensembles de relations sont reliés par un trait plein si le premier ensemble contient le second, par un trait pointillé marqué d, s'ils se correspondent par dualité.



1. INTRODUCTION

La notion de quasi-ordre (1)* (semiorder en anglais) et celle plus générale de relation d'intervalle sont apparues dans des contextes variés (cf. à ce sujet, [33](2)), d'où une grande variété de présentations et de terminologies. Le but de cet article est de présenter synthétiquement un certain nombre d'axiomatiques et de propriétés de ces relations et de quelques autres apparentées.

Précisons d'abord un point important. Il est bien connu que toute relation binaire se décompose en partie symétrique et partie asymétrique. Dans ce texte, nous nous intéresserons essentiellement à la relation globale, en général totale, et à sa partie asymétrique, en général un ordre strict. L'étude des parties symétriques conduirait par exemple, à l'étude des "graphes d'indifférence" ou à celle des "graphes d'intervalles", par lesquels on pourra se reporter aux excellentes synthèses de Roberts ([40],[41]) et Aigner ([1]), ainsi qu'à [14], [17], [19], [21], [29], [32], [42], [48], et aux notes 14, 15, 18 et 21 de ce texte.

---

* Renvoi aux notes à la fin de l'article

Une première caractéristique de cette étude est d'utiliser le formalisme des relations binaires, plutôt que celui des graphes. Dans ce contexte particulier, le premier se trouve en effet mieux adapté. Une seconde caractéristique est de replacer les relations étudiées dans le cadre plus général des relations totales (ou matchs) et des relations asymétriques en insistant sur la dualité existant entre ces deux ensembles de relations. Cette dualité se particularisera dans les différents cas étudiés, en donnant lieu par exemple à des théorèmes et théorèmes bis(3). Une troisième caractéristique est d'utiliser la notion de relation de Ferrers définie par Riguet [39] et étudiée par quelques auteurs ([34], [6], [11], [12]). La plupart des relations que nous considérerons sont en effet des relations de Ferrers particulières et ce fait rend compte d'un bon nombre de leurs propriétés. Outre la notion de relation de Ferrers, la notion de S-relation, introduite par Chipman ([10]) sous le nom de relation "semi-transitive" joue aussi un rôle important.

Pour chacune des relations étudiées, nous donnerons un ensemble d'axiomatiques, celles apparues dans la littérature plus quelques autres, qui apparaissent aussi "agréables" que les premières, tout en faisant ressortir des propriétés intéressantes. Par contre, on ne trouvera aucun résultat concernant l'indépendance ou l'indépendance complète des systèmes d'axiomes utilisés. Nous avons aussi renoncé à présenter les démonstrations des résultats énoncés. La plupart de ces résultats ont des démonstrations simples obtenues au moyen de deux principes suivants :

1°) Faire un usage systématique des propriétés de l' "algèbre des relations" ([3], [4], [9])(22).

2°) Utiliser les résultats précédemment acquis pour les relations plus générales que celles étudiées.

Terminons par quelques indications de notations concernant d'abord les axiomes. Les symboles $\Rightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ ont les sens usuels d'implication ou d'équivalence entre axiomes. La notation A + B (ou (A + B) signifie que les axiomes A et B sont vérifiés. La notation si A + B, (C $\Longleftrightarrow$ D $\Rightarrow$ E), signifie que si A et B sont vérifiés, l'axiome C est équivalent à l'axiome D et implique l'axiome E. Si A est un axiome pour une relation R, la notation A^* signifie que l'axiome A est vérifié pour la partie asymétrique de cette relation (cette distinction n'a évidemment de sens que pour les relations non asymétriques). Une relation quelconque est notée Q. Une relation totale (asymétrique) sera généralement notée R (P) ; par exemple la partie asymétrique d'une relation Q est notée P_Q. Dans le cas particulier d'un préordre (total ou non), celui-ci sera généralement noté T_α, α étant un certain symbole ; la partie symétrique (équivalence) d'un tel préordre sera notée E_α, sa partie asymétrique F_α.

2. RAPPELS ET NOTATIONS

2.1. Relations binaires

Soit X un ensemble qui sera toujours supposé fini : $X = \{x,y,z,t,\dots,n\}$. Une relation (binaire) Q sur X est une partie de l'ensemble X^2 des couples de X : $Q \subseteq X^2$. Si (x,y) est un élément de la relation Q, on note indifféremment $(x,y) \in Q$ ou $x\,Q\,y$. Si Q et S sont deux relations on peut considérer leur union ensembliste $Q \cup S$ et leur intersection ensembliste $Q \cap S$. Si $Q \cap S$ est vide, l'union $Q \cup S$ est notée $Q + S$.

Si Q est une relation, on pose

$Q^c = \{(x,y) : (x,y) \notin Q\}$: *complémentaire* de Q

$Q^- = \{(x,y) : (y,x) \in Q\}$: *réciproque*(23) de Q

$Q^d = \{(x,y) : (y,x) \notin Q\}$: *duale*(23) de Q

L'ensemble $P(X^2)$ des relations sur X muni des opérations $\cup$, $\cap$ et complémentation est un treillis booléen, de plus petit élément la relation vide, ϕ, et de plus grand élément la relation universelle X^2. La relation d'ordre de ce treillis est la relation d'inclusion (4) ensembliste : $Q \subseteq Q'$.
Les applications de complémentation : $Q \to Q^c$ et de dualité : $Q \to Q^d$, sont des antiisomorphismes involutifs (5). Par exemple, $Q^{dd} = Q$, $(Q \cup S)^d = Q^d \cap S^d$ et $(Q \cap S)^d = Q^d \cup S^d$.
Remarquer aussi les égalités $Q^d = Q^{-c} = Q^{c-}$.

Si Q et S sont deux relations, on note QS la composée des deux relations $x\,QS\,y$ si et seulement si il existe z tel que $x\,Q\,z$ et $z\,S\,y$. La composée de Q par elle même est notée Q^2. On note D la relation d'égalité : $D = \{(x,x) : x \in X\}$. D est élément neutre pour l'opération de composition.

La donnée d'une relation Q permet de partitionner l'ensemble des couples de X, de la manière suivante :

$$X^2 = Q + Q^c = (Q \cap Q^-) + (Q \cap Q^d) + (Q^c \cap Q^d) + (Q^c \cap Q^-).$$

On note $I_Q = Q \cap Q^-$ $\qquad J_Q = Q^c \cap Q^d$

$\qquad P_Q = Q \cap Q^d$ $\qquad P_Q^- = Q^c \cap Q^-$

On remarquera que I_Q et J_Q sont des relations symétriques* tandis que P_Q et P_Q^- sont deux relations asymétriques*, réciproques l'une de l'autre. On a donc une décomposition de Q en partie asymétrique et partie symétrique : $Q = P_Q + I_Q$.

* définitions, au paragraphe 3.1.

S'il n'y a pas d'ambiguité possible, on note $Q = P + I$.

Dans les contextes où Q représente une relation de préférence ("large"), on appelle souvent P_Q la préférence stricte, I_Q l'indifférence et J_Q l'incomparabilité.
Remarquer aussi les égalités $J_{P_Q} = P_Q^c \cap P_Q^d = I_Q + J_Q$, et $Q^d = P_Q + J_Q$.

2.2. Sections, degrés et scores d'une relation

Si Q est une relation, on pose

$$Q(x) = \{y \in X : x \, Q \, y\}$$
$$Q^-(x) = \{y \in X : y \, Q \, x\}$$

$Q(x)$ [$Q^-(x)$] s'appelle la *section finissante* (6) [*commençante*] de x, relative à Q. On aura aussi besoin des sections relatives aux relations P_Q et I_Q.
S'il n'y a pas d'ambiguité sur la relation Q considérée, on pose alors :

$$P(x) = P_Q(x) = \{y \in X : x \, P_Q \, y\}$$
$$P^-(x) = P_Q^-(x) = \{y \in X : y \, P_Q \, x\}$$
$$I(x) = I_Q(x) = \{y \in X : x \, I_Q \, y\}$$
$$J(x) = J_Q(x) = \{y \in X : x \, J_Q \, y\}$$

On pose aussi :

$$d^+(x) = |Q(x)| \qquad d^-(x) = |Q^-(x)|$$
$$s^+(x) = |P(x)| \qquad s^-(x) = |P^-(x)|$$
$$s(x) = d^+(x) - d^-(x) = s^+(x) - s^-(x)$$

$d^+(x)$ [$d^-(x)$] s'appelle le *degré extérieur* [*intérieur*] de x ; $s^+(x)$ [$s^-(x)$] s'appelle le *score extérieur* [*intérieur*] de x ; $s(x)$ s'appelle le *score* de x.

2.3. Préordres associés à une relation

La considération des sections, des degrés et des scores associés à une relation Q, permet de définir plusieurs préordres sur X :

$x \, T_f \, y \iff Q(x) \supseteq Q(y)$ $\qquad$ $x \, T_+ \, y \iff d^+(x) \geqslant d^-(y)$

$x \, T_c \, y \iff Q^-(x) \subseteq Q^-(y)$ $\qquad$ $x \, T_- \, y \iff d^-(x) \leqslant d^-(y)$

$x \, T_{fc} y \iff Q(x) \supset Q(y)$ ou $Q(x) = Q(y)$ et $Q^-(x) \subseteq Q^-(y)$

$x \, T_{cf} y \iff Q^-(x) \subset Q^-(y)$ ou $Q(x) = Q(y)$ et $Q(x) \supseteq Q(y)$

$x \, T_{+-} y \iff d^+(y) > d^+(y)$ ou $d^+(x) = d^-(y)$ et $d^-(x) \leqslant d^-(y)$

$x \, T_{-+} y \iff d^-(x) < d^-(y)$ ou $d^-(x) = d^-(y)$ et $d^+(x) \geqslant d^+(y)$

$x \, T \, y \iff Q(x) \supseteq Q(y)$ et $Q^-(x) \subseteq Q^-(y)$ $\qquad$ $x \, T_s \, y \iff s(x) \geqslant s(y)$.

T_f $[T_c]$ est appelé le *préordre finissant* [*commençant*] associé à Q.
T_+ $[T_-]$ est appelé le *préordre extérieur* [*intérieur*] associé à Q.
T $[T_s]$ est appelé *préordre des sections* [*des scores*] associé à Q.

Toutes les relations définies ci-dessus sont des préordres, T_+,T_-, T_{+-}, T_{-+}, et T_s étant de plus totaux. Conformément à une convention déjà signalée, la partie symétrique de, par exemple, T_+, sera notée E_+, et sa partie asymétrique F_+. Pour le préordre T des sections, on note E sa partie symétrique et F sa partie asymétrique. On a les relations suivantes :

$$(T_f)^d = QQ^d \qquad (T_c)^d = Q^dQ$$

$$T = T_c \cap T_f = T_{cf} \cap T_{fc} \subseteq T_{+-} \cap T_{-+} = T_+ \cap T_- \subseteq T_s$$

$$T_f \cup T_{+-} \subseteq T_+ \qquad T_c \cup T_{-+} \subseteq T_-$$

$$x \; E \; y \iff Q(x) = Q(y) \text{ et } Q^-(x) = Q^-(y)$$

Les préordres définis ci-dessus sont associés à la relation Q ; s'il est nécessaire de le préciser, on utilisera la notation T^Q_α . On aura aussi besoin de considérer les mêmes préordres associés à la partie asymétrique P_Q de Q. On les notera alors T^*_α, où T_α est un des préordres précédents.
Par exemple, x T^*_f y si et seulement si $P(x) \supseteq P(y)$.

2.4. Tableaux d'une relation

On appelle *tableau* associé à une relation Q sur X, le triplet (Q,O_1,O_2) où O_1 et O_2 sont deux ordres totaux sur X.

Un tableau (Q,O_1,O_2) se représente par un tableau d'incidence usuel (figure 1) : les lignes et les colonnes sont étiquetées par les éléments de X, suivant les ordres O_1 et O_2 ; la case (x,y) contient un 1 (0) si et seulement si x Q y (x Q^c y).

Si $O_1 = O_2 = O$, le tableau est noté (Q,O) (figure 2).

	a	b	c	d	e
b	1	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1
d	1	0	1	1	1
a	1	1	1	1	1
e	0	0	0	1	1

(Q,bcdae,abcde)

Figure 1

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1
d	1	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1

(Q,abcde)

Figure 2

Un tableau (Q,O_1,O_2) est en *escalier* si et seulement si

$$\forall x,y,z,t \in X, \quad [x\ O_1\ y,\ y\ Q\ z,\ z\ O_2\ t] \Rightarrow [x\ Q\ t]$$

Dans la représentation d'un tel tableau, on a une zone de 0 et une zone de 1 séparées par une "frontière en escalier" (figures 5 et 6).
Un tableau (Q,O) est *sur-diagonal* si et seulement si $Q \subset O$. Dans la représentation d'un tel tableau, tous les 1 sont au-dessus de la diagonale principale. On définit dualement un tableau *sous-diagonal*.

3. MATCHS QUASI TRANSITIFS ET ORDRES STRICTS

3.1. Matchs et relations symétriques

On considère les axiomes suivants pour une relation Q :

$$\begin{array}{llll} L1 : & Q \cup D = Q & ; & Q \textit{ réflexive} \\ L2 : & Q \cup Q^- = X^2 & ; & Q \textit{ totale}^{(7)} \\ S1 : & Q \cap D = \phi & ; & Q \textit{ antiréflexive} \\ S2 : & Q \cap Q^- = \phi & ; & Q \textit{ asymétrique}^{(8)} \end{array}$$

On remarque que ces axiomes s'écrivent aussi : L1 : $Q \supseteq D$, L2 : $Q^d \subset Q$, S1 : $Q^d \supseteq D$, S2 : $Q \subset Q^d$. On a les implications

$$L2 \Rightarrow L1 \qquad\qquad S2 \Rightarrow S1$$

Dans la suite, nous appelons *match* [(9)] une relation totale. Si R est un match, on a donc $J_R = \phi$ et $X^2 = P_R + I_R + P_R^-$ (soit $R^c = P_R^-$). Si P est asymétrique, on a $I_P = \phi$ et $X^2 = P + J_P + P^-$.

PROPOSITION 1

L'application de dualité $R \to R^d$ est une involution [(5)] entre l'ensemble des matchs et l'ensemble des relations asymétriques.

De façon plus précise, si R est un match, $R^d = P_R$ est asymétrique, et si P est asymétrique $P^d = P + J_P$ est un match. Ainsi si R est un match et P sa partie asymétrique, on a $I_R = J_P$. Lorsque R représente une relation de préférence (totale), cela signifie que l'indifférence pour la préférence large correspond à l'incomparabilité pour la préférence stricte.

Considérons maintenant une propriété quelconque d'une relation totale R, s'exprimant en fonction de R, P_R et I_R. Il résulte de la dualité précédente que cette propriété peut s'interpréter comme la propriété d'une relation asymétrique P, avec $R = P^d$ et $I_R = I_{P^d} = J_P$. Ainsi si cette propriété est vraie pour un ensemble de relations totales, la "même" propriété est vraie pour l'ensemble des relations asymétriques duales. Dans la suite on utilisera cette observation de la manière suivante. On écrira qu'une propriété faisant intervenir en général

P,I et les sections de P est vérifiée, pour une classe de relations totales *ou* la classe des relations asymétriques correspondantes. Dans le premier cas P(I) s'interprétera comme la partie asymétrique P_R (symétrique I_R) d'une relation totale R ; dans le second cas, P s'interprétera comme une relation asymétrique dont I est la relation d'incomparabilité associée ($I = J_P = I_P d$).

Par exemple, pour R totale (ou P asymétrique) on a toujours les propriétés suivantes :

(1) $P \subseteq PI \subseteq PP^d = (T_c^R)^d$ soit, $x\,Pz\,Iy \Rightarrow P(x) \not\subseteq P(y)$

(2) $P \subseteq IP \subseteq P^dP = (T_f^R)^d$ soit, $x\,Iz\,Py \Rightarrow P^-(y) \not\supseteq P^-(x)$

$P(x) = P(y)$ et $P^-(x) = P^-(y) \Rightarrow I(x) = I(y)$

Soit R totale ; on a pour tout x de X (avec $\bar{A} = X - A$ et $|X| = n$):

$$X = P(x) + I(x) + P^-(x)$$

$$R(x) = \overline{P^-(x)} \qquad R^-(x) = \overline{P(x)}$$

$$d^+(x) = n - s^-(x) \quad d^-(x) = n - s^+(x)$$

D'où les égalités suivantes entre les préordres associés à R et à P_R :

$$T_f = T_c^* \qquad T_c = T_f^* \qquad T_+ = T_-^* \qquad T_- = T_+^*$$

$$T_{fc} = T_{cf}^* \qquad T_{cf} = T_{fc}^* \qquad T_{+-} = T_{-+}^* \qquad T_{-+} = T_{+-}^*$$

$$T = T^* \qquad T_s = T_s^*$$

Ainsi pour les relations(1) et (2), écrites ci-dessus, on a $PP^d = (T_c^R)^d = (T_f^P)^d$, et $P^dP = (T_f^R)^d = (T_c^P)^d$.

3.2. Quasi-transitivité et ordres stricts

On considère les axiomes suivants pour une relation Q quelconque

Tr : $Q^2 \subseteq Q$: Q *transitive*

Trn : $(Q^c)^2 \subseteq Q^c$: Q *négativement transitive*

Tr* : $(P_Q)^2 \subseteq P_Q$: Q *quasi-transitive*(10)

On remarque que Trn peut s'écrire des deux manières équivalentes suivantes :

$(x,y) \notin Q$ et $(y,z) \notin Q \Rightarrow (x,z) \notin Q$

ou, $x\,Q\,z \Rightarrow x\,Q\,y$ ou $y\,Q\,z$

Conformément à nos conventions Tr* signifie que la partie asymétrique de Q vérifie Tr, c'est-à-dire est transitive.

On a les implications suivantes entre axiomes :

$$L1 + Trn \Rightarrow L2 \qquad S1 + Tr \Rightarrow S2$$
$$\text{si } L2,\ (Trn \Longleftrightarrow Tr^*)$$
$$(L2 + Tr) \Longleftrightarrow (L2 + Trn^*) \Rightarrow (Tr^* + Trn) \qquad S2 + Trn \Rightarrow Tr$$

Une relation est un *ordre strict* (11) si et seulement si elle est antiréflexive et transitive (et donc asymétrique).
Il résulte des définitions et implications précédentes qu'une relation quelconque est quasi-transitive si et seulement si sa partie asymétrique est un ordre strict, et qu'un match est quasi-transitif si et seulement si il est négativement transitif.
Une relation est un *préordre total* (11) si et seulement si c'est un match transitif. Une relation est un *ordre fort* (12) si et seulement si elle est asymétrique et négativement transitive (et donc un ordre strict).

PROPOSITION 2
L'application de dualité $R \rightarrow R^d$ est une involution entre d'une part l'ensemble des matchs quasi-transitifs et l'ensemble des ordres stricts, d'autre part l'ensemble des préordres totaux et l'ensemble des ordres forts(13).

Soit R un match quasi-transitif (ou P un ordre strict) ; les relations (1) et (2) du paragraphe 3.1. deviennent :

$$(4)\ P \subseteq PI = (T_c^R)^d = (T_f^P) = PP^d \qquad (5)\ P \subseteq IP = (T_f^R)^d = (T_c^P)^d = P^dP$$

Donc : $P(x) \supseteq P(y) \Longleftrightarrow x\ (PI)^d y \qquad P^-(x) \subseteq P^-(y) \Longleftrightarrow x(IP)^d y$

Considérons maintenant T le préordre des sections associé à R (ou à P) :

$$x\ T\ y \Longleftrightarrow P(x) \supseteq P(y) \text{ et } P^-(x) \subseteq P^-(y)$$

Pour sa partie asymétrique F, on a

$$x\ F\ y \Longleftrightarrow [P(x) \supset P(y) \text{ et } P^-(x) \subseteq P^-(y)] \text{ ou } [P^-(x) \subset P^-(y) \text{ et } P(x) \supseteq P(y)].$$

Pour sa partie symétrique E, on a

$$x\ E\ y \Longleftrightarrow P(x) = P(y) \text{ et } P^-(x) = P^-(y) \Longleftrightarrow I(x) = I(y).$$

D'autre part, on déduit des relations précédentes, les expressions :

$$T = (PI)^d \cap (IP)^d = (PI \cup IP)^d$$

$$F = [PI \cap (PI)^d \cap (IP)^d] \cup [IP \cap (IP)^d \cap (PI)^d] \qquad E = (PI)^c \cap (PI)^d \cap (IP)^c \cap (IP)^d$$

On a aussi toujours $\qquad PE \cup EP = P$

L'équivalence E est incluse dans la relation I ; si E égale I ou si I est une équivalence, ou si PI(ou IP) égale P, on a

$$PI \cup IP = PE \cup EP = P$$
$$T = P^d = R$$

Donc si R est un préordre total (ou P un ordre fort), le préordre T des sections est égal à R (et inversement). Il est alors bien connu que l'ensemble quotient de X par E est un ordre total.

Dans le cas général d'une relation R quasi-transitive (ou d'un ordre strict P), nous définissons l'ensemble quotient de X par l'équivalence E et nous le notons X'. Les relations R,P,I induisent des relations R',P' et I' sur X'. On a, par exemple, en notant u et v deux éléments de X' (c'est-à-dire deux classes de E) :

$$u\ R'\ v \iff \exists\ x \in u,\ \exists\ y \in v \text{ avec } x\ R\ y$$
$$\iff \forall\ x \in u,\ \forall\ y \in v\ ,\ x\ R\ y$$

et de même pour P' et I'. Il est facile de voir que la quasi-transitivité de R implique la quasi-transitivité de R', la relation E' définie comme plus haut, étant alors l'identité. On remarque aussi que pour tout élément x d'une classe u, l'ensemble P(x) est égal à la réunion des classes v telles que u P' v (c'est-à-dire des classes de P(u)) et de même pour B(x) et I(x).

4. RELATIONS DE FERRERS

Nous commençons par énoncer l'équivalence de plusieurs conditions pour une relation Q ; les conditions 2 à 8 se dédoublant en la condition écrite et une condition duale écrite entre crochets.

THEOREME 1

Pour une relation Q, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout x,y,z,t, x Q y et z Q t implique x Q t ou z Q y.

(2) Pour tout x,y, $Q(x) \subseteq Q(y)$ ou $Q(y) \subseteq Q(x)$. $[Q^-(x) \subseteq Q^-(y)$ ou $Q^-(y) \subseteq Q^-(x)]$

(3) $QQ^dQ \subset Q$ $\quad [Q^dQQ^d \subset Q^d]$

(4) Le préordre finissant T_f égale le préordre supérieur T_+ $[T_c = T_-]$.

(5) Le préordre finissant T_f [commençant T_c] est total.

(6) QQ^d $[Q^dQ]$ est une relation asymétrique : $QQ^d \subset (QQ^d)^d$.

(7) Pour tout ordre total $O_1[O_2]$ inclus dans $T_+[T_-]$, $O_1Q \subset Q$ $[QO_2 \subset Q]$.

(8) Il existe un ordre total $O_1[O_2]$ tel que $O_1Q \subset Q$. $[QO_2 \subset Q]$.

(9) Pour tout ordre total O_1 inclus dans T_+ et O_2 inclus dans T_-, le tableau (Q,O_1,O_2) est en escalier.

(10) Q admet un tableau en escalier.

DEFINITION

Une relation Q vérifiant les conditions du théorème 1 est dite *relation de Ferrers*.

Ces relations ont été définies par Riguet ([39]), qui donne la plupart des conditions du théorème mais non la première. Celle-ci se trouve dans Scott et Suppes [45]. La condition (2) se trouve aussi dans Mirkin [32] et Guilbaud [23] ; elle signifie que les sections finissantes (ou commençantes) de Q sont totalement ordonnées. L'équivalence entre (1), (2) et (3) se trouve dans Mirkin et Ore [34]. La condition (6) est équivalente à la condition que QQ^d (ou Q^dQ) est un ordre fort ; en effet $QQ^d = (T_f)^d$ étant la duale d'un préordre est négativement transitive et antiréflexive.

PROPOSITION 3

Pour une relation Q les conditions suivantes sont équivalentes :

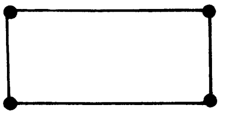
- Q de Ferrers
- Q^- de Ferrers
- Q^c de Ferrers
- Q^d de Ferrers
- QQ^d de Ferrers
- Q^dQ de Ferrers

Si Q est une relation de Ferrers, on a les égalités suivantes entre les préordres associés à Q :

$$T_f = T_+ \qquad T_c = T_- \qquad T_{fc} = T_{+-} \qquad T_{cf} = T_{-+}$$

5. RELATIONS ET ORDRES D'INTERVALLES (14)

Donnons d'abord des définitions. On appelle *relation carrée*, ou simplement carré, une relation symétrique sur quatre éléments, isomorphe à la relation représentée figure 3.



Carré

Figure 3

On dit qu'une relation Q sur X est *sans carré*, si pour tout sous-ensemble Y à quatre éléments de X, la restriction de Q à Y, n'est pas isomorphe à un carré . (Il est équivalent de dire, dans la terminologie de la théorie des graphes, que tout cycle d'ordre 4 du graphe (X,Q) admet une corde).

On considère les axiomes suivants pour une relation Q :

F3 : Q est une relation de Ferrers.

W3 : $Q\ J_Q\ Q \subset Q$.

E3 : La relation J_Q est sans carré.

L3 : $P_Q\ I_Q\ P_Q \subset P_Q$

H_3 : $(I_Q P_Q) \subset (I_Q P_Q)^d$.

L'axiome W3 est dû à Wiener ([50],[51]). L'axiome E3 est utilisé par Roberts [41]. L'axiome L3 dû à Luce [30] s'écrit encore

$$[x\ P_Q\ y,\ y\ I_Q\ z,\ z\ P_Q\ t] \quad \Rightarrow \quad [x\ P_Q\ t].$$

L'axiome H3 signifie que la relation $I_{\cap}P_{\cap}$ est asymétrique. Il est facile de voir qu'il est équivalent à l'axiome $P_Q I_Q$ est une relation asymétrique, où à la condition $I_Q \cap I_Q P_Q$ est asymétrique. On le trouve pratiquement sous cette dernière forme dans Halphen [24].

On a les relations suivantes entre ces axiomes :

$$F3 \Rightarrow W3 \Rightarrow E3$$

si S1, $(F3 \Longleftrightarrow W3)$

si Tr, $(F3 \Longleftrightarrow W3 \Longleftrightarrow E3)$

$S1 + W3 \Rightarrow S2 + Tr$

$W3^* \Longleftrightarrow F3^* \Rightarrow L3 \Rightarrow H3$

si L2, $(F3 \Longleftrightarrow F3^* \Longleftrightarrow L3 = W3^* \Rightarrow H3 \Rightarrow E3^*)$

si L2 + Tr^*, $(F3 \Longleftrightarrow F3^* \Longleftrightarrow L3 = W3^* \Longleftrightarrow H3 \Longleftrightarrow E3^*)$

$L1 + F3 \Rightarrow L2$

On en déduit les résultats suivants :

THEOREME 2

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation R.

(1) L1 + F3

(2) L2 + L3

(3) L2 + Tr^* + H3

(4) L1 + L2 + F3 + L3 + H3 + E3 + Tr^* + $F3^*$ + $W3^*$ + $E3^*$

THEOREME 2 Bis

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation P :

(1) S1 + F3

(2) S1 + W3

(3) S1 + Tr + E3

(4) S1 + S2 + Tr + F3 + W3 + E3

DEFINITIONS

Une relation est une *relation d'intervalle* si elle vérifie les conditions du théorème 2.

Ainsi la notion de relation d'intervalle est identique à celle de relation de Ferrers réflexive, ou à celle de match vérifiant la condition L3 de Luce ou à celle de match quasi-transitif vérifiant la condition H3 d'Halphen.

Une relation est un *ordre d'intervalle* si elle vérifie les conditions du théorème 2bis.

La notion d'ordre d'intervalle est due à Fishburn [14] qui utilise l'axiome S1 et l'axiome F3, sous la forme de la condition (1) du théorème 1. Mirkin [32], utilise la condition (2) de ce théorème et note que les ordres d'intervalle sont les relations de Ferrers antiréflexives. Riguet [39] remarque l'équivalence de cette dernière notion avec les conditions S1 et W3 données par Wiener. La condition (3) dans le théorème 2bis est due à Fishburn (15).

PROPOSITION 4

L'application de dualité $R \rightarrow R^d$ est une involution entre l'ensemble des relations d'intervalle et l'ensemble des ordres d'intervalle.

Cette proposition jointe aux théorème 1 (caractérisation des relations de Ferrers), 2 et 2 bis, fournit une multitude de caractérisations des relations ou ordres d'intervalle. Par exemple, R est une relation d'intervalle, si et seulement si R est réflexive et le préordre finissant T_f égale le préordre extérieur T_+. Ainsi pour reconnaitre si R est une relation d'intervalle il suffit de

1°) tester la réflexivité de R.

2°) ordonner les éléments de X suivant l'ordre de leurs degrés extérieurs d^+.

3°) tester que deux éléments de même degré ont même section finissante.

4°) tester que deux éléments de degré consécutif ont des sections finissantes comparables.

On a évidemment le même test pour la reconnaissance d'un ordre d'intervalle.

Un test analogue consiste à construire deux ordres totaux O_1 (O_2) inclus dans le préordre des degrés extérieurs (intérieurs), et à rechercher si le tableau (R,O_1,O_2) est en escalier et réflexif. On notera que si R est une relation d'intervalle et (R,O_1,O_2) un tableau en escalier de R, (P,O_2,O_1) est un tableau en escalier de l'ordre d'intervalle P associé à R (puisque $T_+^* = T_-$ et $T_-^* = T_+$).

Si R est une relation d'intervalle, (ou P un ordre d'intervalle), on a

$$x \; PI \; y \iff P(x) \supset P(y) \iff s^+(x) > s^+(y) \iff R^-(x) \subset R^-(y) \iff d^-(x) < d^-(y)$$
$$x \; IP \; y \iff P^-(x) \subset P^-(y) \iff s^-(x) < s^-(y) \iff R(x) \supset R(y) \iff d^+(x) > d^+(y)$$

Ainsi les ordres forts PI et IP ont une interprétation simple en termes de sections, ou de scores ou de degrés.

On a aussi pour le préordre des sections :

$$T = (PI)^d \cap (IP)^d = (PI \cup IP)^d$$
$$F = [PI \cap (IP)^d] \cup [IP \cap (PI)^d]$$
$$E = (PI)^c \cap (PI)^d \cap (IP)^c \cap (IP)^d$$

$$T = T_f \cap T_c = T_+ \cap T_- = T_{fc} \cap T_{cf} = T_{+-} \cap T_{-+} \subset T_s$$

$$x\ E\ y \iff d^+(x) = d^+(y) \text{ et } d^-(x) = d^-(y) \iff s^+(x) = s^+(y) \text{ et } s^-(x) = s^-(y)$$

Si R est une relation d'intervalle, on vérifie facilement que R' définie sur $X' = X /_E$ (comme au paragraphe 3.2) est une relation d'intervalle pour laquelle E' est l'identité.

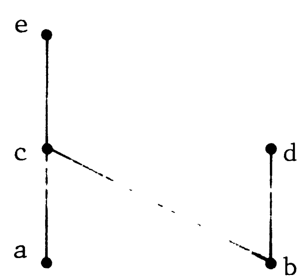
EXEMPLE

La figure 1 représente le tableau d'une relation d'intervalle R. La figure 5 représente le diagramme de Hasse ([3],[4]) de l'ordre d'intervalle P correspondant. La figure 4 représente un tableau en escalier de R, tandis que la figure 6 représente le tableau en escalier de P déduit du précédent par échange des lignes et des colonnes et restriction à la partie asymétrique.

	b	a	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
d	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1

(R, abdce, bacde)

Figure 4



P

Figure 5

	a	b	d	c	e
b	0	0	1	1	1
a	0	0	0	1	1
c	0	0	0	0	1
d	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0

(P, bacde, abdce)

Figure 6

6. S-MATCHS ET S-ORDRES

De même que les relations (ordres) d'intervalle sont les relations de Ferrers réflexives (anti-réflexives), les S-matchs (ordres) sont les "S-relations" réflexives (antiréflexives). Nous commençons donc par cette dernière notion.

THEOREME 3

Pour une relation Q les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout x,y,z,t, $x\ Q\ y\ Q\ z$ implique $x\ Q\ t$ ou $t\ Q\ z$.

(2) Pour tout x,y, $Q(x) \supseteq Q(y)$ ou $Q^-(x) \supseteq Q^-(y)$

(3) $Q^d Q^2 \subseteq Q$.

(4) $Q^2 Q^d \subseteq Q$.

(5) $QQ^d \subseteq (Q^dQ)^d$ $\quad (T_f^d \subseteq T_c)$

(6) $Q^dQ \subseteq (QQ^d)^d$ $\quad (T_c^d \subseteq T_f)$

(7) Q^- vérifie (1).

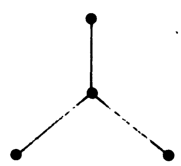
(8) Q^c vérifie (1).

(9) Q^d vérifie (1).

DEFINITION

Une relation Q vérifiant les conditions du théorème 3 est dite *S-relation* (16). La condition (1) se trouve dans Scott et Suppes [45]. Mirkin [32] montre l'équivalence des conditions (1) et (2). Chipman [10] signale l'équivalence des conditions (1), (3),(4),(5),(6) et (8) et note que (1) s'écrit aussi $P^2 \subseteq 2P$, où $2P = P \dotplus P$ (opération $\dotplus$ de somme relative définie à la note 22).

Donnons maintenant d'autres définitions. On appelle *relation étoile*, ou simplement étoile une relation symétrique sur quatre éléments, isomorphe à la relation représentée figure 7 ; on la note K_{13}.



Etoile K_{13}

Figure 7

Une relation Q sur X est *sans étoile*, si pour tout sous-ensemble Y à quatre éléments de Q, la restriction de Q à Y, n'est pas isomorphe à une étoile (17).

On considère maintenant les axiomes suivants pour une relation Q :

S4 : Q est une S-relation.

H4 : $I_Q(P_Q)^2 \subset P_Q$.

J4 : $(P_Q)^2 I_Q \subset P_Q$.

L4 : $x P_Q y P_Q z$ et $y I_Q t$ impliquent $x (I_Q)^c t$ ou $z (I_Q)^c t$.

K4 : $(I_Q)^2 \cap (P_Q)^2 = \phi$.

E4 : La relation J_Q est sans étoile.

R4 : Pour tout x,y, $[Q(x) \supset Q(y)]$ implique $[Q^-(x) \subseteq Q^-(y)]$ et $[Q^-(x) \subset Q^-(y)]$ implique $[Q(x) \supseteq Q(y)]$

L'axiome H4, dû à Halphen [24], s'écrit aussi

$$x \, I_Q \, y \, P_Q \, z \, P_Q \, t \Rightarrow x \, P_Q \, t \, .$$

L'axiome J4 se trouve dans Sharp [47]. L'axiome K4 est dû à Krantz [28]. Il est équivalent aux deux axiomes suivants : $P_Q I_Q \subseteq (I_Q P_Q)^d$; $I_Q P_Q \subseteq (P_Q I_Q)^d$.
L'axiome E4 est utilisé par Roberts et l'axiome R4 est dû à Rabinovitch [36].
On a les implications suivantes entre ces axiomes :

$$S4 \Rightarrow E4 + R4$$

$$S1 + S4 \Rightarrow Tr + S2$$

$$\text{si } Tr \ (S4 \Leftrightarrow E4 \Rightarrow R4)$$

$$\text{si } F3 \ (S4 \Leftrightarrow R4 \Rightarrow E4)$$

$$\text{si } S1 + F3 \ (S4 \Leftrightarrow E4 \Leftrightarrow R4)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & H4 & \searrow & & & \\ S4^* & & & & K4 & \Rightarrow & L4 \\ & \searrow & J4 & \nearrow & & & \end{array}$$

$$L1 + S4 \Rightarrow L2 + H4 + J4$$

$$L1 + H4 \Rightarrow Tr^* \qquad L1 + J4 \Rightarrow Tr^*$$

$$\text{si } L2 \ (S4 \Leftrightarrow S4^* \Leftrightarrow H4 \Leftrightarrow J4 \Rightarrow K4 \Rightarrow E4^* \Leftrightarrow L4)$$

$$\text{si } L2 + Tr^* (S4 \Leftrightarrow S4^* \Leftrightarrow H4 \Leftrightarrow J4 \Leftrightarrow K4 \Leftrightarrow E4^* \Leftrightarrow L4)$$

On en déduit les résultats suivants :

THEOREME 4

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation R :

(1) L1 + S4

(2) L2 + H4

(3) L2 + J4

(4) L2 + Tr^* + K4

(5) L2 + Tr^* + L4

(6) L1 + L2 + S4 + H4 + J4 + R4 + K4 + L4 + Tr^* + $S4^*$ + $R4^*$ + $E4^*$

THEOREME 4bis

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation P :

(1) S1 + S4

(2) S1 + Tr + E4 (18)

(3) S1 + S2 + Tr + S4 + E4 + R4

DEFINITIONS

Une relation est un *S-match* (16) si elle vérifie les conditions du théorème 4.
Ainsi un S-match est une S-relation réflexive ou un match vérifiant la condition H4 d'Halphen, ou un match quasi-transitif vérifiant la condition L4 de Luce, ou K4 de Krantz.

Une relation est un *S-ordre* [16] si elle vérifie les conditions du théorème 4bis.

Ainsi un S-ordre est une S-relation antiréflexive, ou un ordre strict vérifiant la condition E4 . Les S-ordres ont été considérés par Chipman [10] et Fishburn [16].

PROPOSITION 5

L'application de dualité $R \to R^d$ est une involution entre l'ensemble des S-matchs et l'ensemble des S-ordres.

On déduit de cette proposition et des théorèmes précédents d'autres axiomatiques des S-matchs ou des S-ordres. Par exemple, un S-match est une relation réflexive dont la partie asymétrique est un S-ordre.

Si R est un S-match (ou P un S-ordre), on a

$$PI \subseteq (IP)^d \quad \text{et} \quad (IP) \subseteq (PI)^d.$$

On en déduit l'expression suivante pour la partie asymétrique F du préordre T des sections :

$$F = [PI \cap (PI)^d] \cup [IP \cap (IP)^d].$$

Si E est l'équivalence associée à T, on montre aisément que sur $X' = X /_E$, R' est un S-match, avec E' égale à l'identité.

7. QUASI-ORDRES ET ORDRES QUASI-FORTS [1]

7.1. DEFINITIONS

Un *quasi-ordre* est une S-relation d'intervalle (c'est-à-dire une S-relation qui est aussi une relation d'intervalle).

On déduit de cette définition et des résultats précédents une multitude d'axiomatiques pour un quasi-ordre. Par exemple, R est un quasi-ordre si il vérifie l'une des conditions suivantes :

(1) L1 + F3 + S4

(2) L2 + H3 + H4 (Halphen [19])

(3) L2 + L3 + L4 (Luce)

(4) L2 + L3 + K4 (Krantz)

(5) L2 + L3 + H4

(6) L2 + L3 + J4 (Sharp [20])

Un *ordre quasi-fort* est un S-ordre d'intervalle (c'est-à-dire un S-ordre qui est aussi un ordre d'intervalle).

Ainsi P est un ordre quasi-fort si il vérifie, par exemple, l'une des conditions suivantes :

(1) S1 + F3 + S4 (Scott, Suppes, Mirkin)

(2) S1 + W3 + S4

(3) S1 + E3 + S4

(4) S1 + F3 + R4 (Rabinovitch)

(5) S1 + F3 + E4

(6) S1 + W3 + E4

(7) S1 + W3 + R4

(8) S1 + Tr + E3 + E4 (Roberts[21])

PROPOSITION 6

L'application de dualité $R \to R^d$ est une involution entre l'ensemble des quasi-ordres et l'ensemble des ordres quasi-forts.

Dans les paragraphes suivants, nous allons considérer des propriétés des préordres ou des tableaux associées à un quasi-ordre, ces propriétés conduisant à de nouvelles caractérisations.

7.2. Préordre des sections

Soit R un quasi-ordre (ou P un ordre quasi-fort) et T le préordre des sections.

On a

$$T = PI \cup IP \cup E$$

$$F = PI \cup IP = P + (PI \cap I) \cup (IP \cap I)$$

$$P \subseteq F = T^d \subset T \subset R = P^d.$$

Ainsi T est maintenant un préordre total et sa partie asymétrique F un ordre fort. La deuxième expression donnée pour F, montre explicitement comment on passe de l'ordre quasi-fort P à l'ordre fort F : on ajoute à P des arêtes d'incomparabilité orientées par la relation PI ou IP. Les relations T et F s'explicitent ainsi :

$$\begin{aligned} x\ T\ y &\iff P(x) \supseteq P(y) \text{ et } P^-(x) \subseteq P^-(y) \\ &\iff P(x) \supseteq P(y) \text{ ou } P^-(x) \subseteq P^-(y) \\ x\ F\ y &\iff [P(x) \supset P(y) \text{ et } P^-(x) \subseteq P^-(y)] \text{ ou } \\ &\quad\;\;\; [P(x) \supseteq P(y) \text{ et } P^-(x) \subset P^-(y)] \\ &\iff P(x) \supset P(y) \text{ ou } P^-(x) \subset P^-(y) \end{aligned}$$

Si on passe à l'ensemble quotient $X'/_E$, il est clair que R' est un quasi-ordre avec E' égal à l'identité. T' est donc un ordre total et F' l'ordre strict associé.

La propriété fondamentale exposée ci-dessus est qu'à tout quasi-ordre correspond un préordre total, qui n'est autre que le préordre des sections de ce quasi-ordre. La réciproque de ce résultat découle d'un lemme très simple.

LEMME

Si Q est une relation dont le préordre T des sections est total, Q est une relation de Ferrers et une S-relation.

On déduit du lemme les résultats suivants.

THEOREME 5

Une relation R est un quasi-ordre si et seulement si R est une relation réflexive dont le préordre des sections est total.

THEOREME 5bis

Une relation P est un ordre quasi-fort si et seulement si P est une relation antiréflexive dont le préordre des sections est total.

On déduit de ce théorème deux corollaires. Rappelons que F est la partie asymétrique du préordre T des sections.

COROLLAIRE 1

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation R :

(1) R quasi-ordre

(2) R match quasi-transitif et (PI $\cup$ IP) asymétrique

(3) R match quasi-transitif et F = PI $\cup$ IP

(4) R match quasi-transitif et (PI $\cup$ IP) ordre fort

(5) R relation d'intervalle et $T = T_{fc}$ (ou T_{cf})

(6) R relation d'intervalle et $T_{fc} = T_{cf}$

COROLLAIRE 2

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation P :

(1) P ordre quasi-fort

(2) P transitif et (P $\cup$ PI $\cup$ IP) ordre fort

(3) P transitif et (P $\cup$ PI $\cup$ IP) asymétrique

(4) P antireflexif, transitif et (PI $\cup$ IP) asymétrique

(5) P ordre strict et F = PI $\cup$ IP

(6) P ordre strict et (PI $\cup$ IP) ordre fort

(7) P ordre d'intervalle et $F = F_{fc}$ (ou F_{cf})

(8) P ordre d'intervalle et $F_{fc} = F_{cf}$

L'équivalence de (1) et (2) dans le corollaire 2 est un résultat de Luce [30] qui montrait ainsi l'existence d'un préordre total "sousjacent" à un quasi-ordre ainsi que la propriété réciproque.

7.3. Compatibilité avec un préordre

DEFINITIONS

Une relation asymétrique P est compatible avec le préordre T si et seulement si:

1) $P \subset T$

2) x T y T z et x I z implique x I y et y I z.

Intuitivement, la condition 2 ajoutée à la compatibilité usuelle, signifie qu'un T-intervalle entre deux éléments incomparables pour P, ne contient pas d'élément qui leur soit comparable.

Une relation asymétrique P est compatible avec l'ordre O si et seulement si :

1) $P \subset O$

2) x O y O z et x I z implique x I y et y I z.

LEMME

Une relation asymétrique est compatible avec un préordre si et seulement si elle est compatible avec un ordre.

Ces définitions de la compatibilité sont dues à Goodman [22], Galanter [18] et Roberts [42] qui utilisent également la forme équivalente suivante de la condition 2 : x T u T v T y et x I y implique u I v. On pourrait aussi définir dualement une notion de compatibilité pour un match, conduisant à des résultats duaux de ceux énoncés ci-dessous.

THEOREME 6

Une relation P est un ordre quasi-fort si et seulement si P est anti-réflexive et compatible avec un préordre total.

Cette caractérisation des ordres quasi-forts est essentiellement due à Roberts ([41],[42]). Les résultats suivants précisent quels sont les préordres totaux compatibles avec un ordre quasi-fort et en particulier les cas d'unicité.

PROPOSITION 7

Les préordres totaux compatibles avec un ordre quasi-fort P sont les préordres totaux inclus dans le préordre T des sections de P.

COROLLAIRE 1

Le préordre T des sections d'un ordre quasi-fort P est le seul préordre total compatible avec P, dont l'équivalence associée soit l'équivalence E (définie par l'égalité des sections I(x)).

COROLLAIRE 2

Les ordres totaux compatibles avec un ordre quasi-fort P sont les ordres totaux inclus dans le préordre T des sections de P. Il existe un ordre total unique O compatible avec P si et seulement si E est l'identité, et on a alors O = T.

COROLLAIRE 3

L'ordre quasi-fort P' défini sur l'ensemble quotient $X' = X /_E$, admet un ordre total compatible unique T'.

7.4. Degrés et scores

Si R est un quasi-ordre (ou P un ordre quasi-fort), on a les égalités suivantes pour les préordres associés à R (ou à P) :

$$T = T_{+-} = T_{-+} = T_s$$

Les résultats suivants fournissent des réciproques caractérisant un quasi-ordre. Ce sont des conséquences faciles des théorèmes 5 et 5bis.

THEOREME 7

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation R :

(1) R quasi-ordre

(2) R réflexive et $T_{+-} \subseteq T$ (ou $T_{+-} = T$)

(3) R réflexive et $T_{-+} \subseteq T$ (ou $T_{-+} = T$)

(4) R réflexive et $T_s \subseteq T$ (ou $T_s = T$)

(5) R relation d'intervalle et $T_{+-} = T_{-+}$

THEOREME 7bis

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation P :

(1) P ordre quasi-fort

(2) P antiréflexif et $T_{+-} \subseteq T$

(3) P antiréflexif et $T_{-+} \subseteq T$

(4) P antiréflexif et $T_s \subseteq T$

(5) P ordre d'intervalle et $T_{+-} = T_{-+}$

Dans ce théorème, l'équivalence (1) à (4) a été démontrée par Avery [2] et l'équivalence (1) à (5) par Rabinovitch [36].

REMARQUE

On obtient des conditions suffisantes pour que R soit un quasi-ordre (ou P un ordre quasi-fort) en remplaçant T_{+-} par T_+ et T_{-+} par T_- dans les théorèmes précédents. Mais un quasi-ordre ne vérifie pas nécessairement ces conditions. Il pourrait être intéressant d'affiner ainsi la notion de quasi-ordre.

7.5. Tableaux

Si R est un quasi-ordre, on a $T = T_s = T_f \cap T_c = T_c^* \cap T_f^*$. De ces égalités et des théorèmes 5 et 5bis, on déduit facilement les caractérisations suivantes :

THEOREME 8

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation R :

(1) R quasi-ordre

(2) Pour tout ordre total O inclus dans le préordre des scores T_s, le tableau (R,O) est en escalier sous-diagonal.

(3) R admet un tableau (R,O) en escalier sous-diagonal.

THEOREME 8bis

Les conditions suivantes sont équivalentes pour une relation P :

(1) P ordre quasi-fort

(2) Pour tout ordre total O inclus dans T_s, le tableau (P,O) est en escalier sur-diagonal.

(3) P admet un tableau (P,O) en escalier sur-diagonal.

L'équivalence de (1) et (3) dans ce dernier théorème se trouve, sous des formes différentes, dans Sharp [47] et Mirkin [32]. Considérons un ordre total O inclus dans le préordre des scores d'un quasi-ordre R et le tableau associé (R,O). La partie symétrique I de R, est symétrique par rapport à la diagonale du tableau. En construisant la symétrique de la frontière de R par rapport à cette diagonale, on obtient donc le tableau (P,O). C'est la "forme standard" d'un quasi-ordre définie par Jacquet-Lagrèze [25]. Dualement, si on a le tableau (P,O) d'un ordre quasi-fort, on en déduit le tableau (R,O) du quasi-ordre associé, en considérant la frontière en escalier symétrique de celle de (P,O) par rapport à sa diagonale. La figure 2 représente le tableau d'une relation de quasi-ordre. La figure 8 représente le diagramme de Hasse de l'ordre quasi-fort correspondant, et la figure 9 un tableau en escalier de R ; pour mettre en évidence la forme standard, on a noté P ou I suivant que x P y ou x I y dans R et représenté les frontières correspondantes .

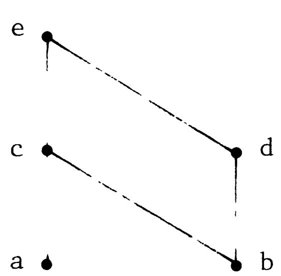


Figure 8

	b	a	d	c	e
b	I	I	P	P	P
a	I	I	I	P	P
d		I	I	I	P
c			I	I	P
e					I

(R,badce)

Figure 9

On remarque que le nombre de tableaux en escaliers (R,O_1,O_2) du quasi-ordre R, est p^2, où p est le nombre d'ordres totaux inclus dans T_s. Parmi ceux-ci, p conduisent à une forme standard(R,O). En particulier si T_s est un ordre total, R admet un seul tableau en escalier qui est l'unique forme standard (R,T_s).

8. AUTRES AXIOMATIQUES ET PROPRIETES

Une propriété fondamentale des quasi-ordres et des relations d'intervalles concerne leurs possibilités de représentations linéaires, c'est-à-dire dans un ensemble totalement ordonné. Il est commode (mais non indispensable) de prendre comme ensemble de représentation, l'ensemble totalement ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels. On utilise la notation suivante : soient λ_1 et λ_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$; $\lambda_1 > \lambda_2$ signifie que pour tout $x \in \lambda_1$ et tout $y \in \lambda_2$, on a $x > y$. Les résultats suivants dus à Scott-Suppes [45], Roberts [41], Fishburn, donnant des caractérisations des ordres d'intervalles et des ordres quasi-forts par leurs propriétés de représentation numérique. On pourrait en déduire par dualité des résultats analogues pour les relations d'intervalle ou les quasi-ordres.

THEOREME 9

Si P est une relation antiréflexive sur un ensemble X fini, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) P est un ordre d'intervalle

(2) Il existe deux applications F et σ de X dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout x,y, x P y si et seulement si $F(x) > F(y) + \sigma(y)$ avec $\sigma(y) > 0$, pour tout y.

(3) Il existe une application λ de X dans des intervalles de $\mathbb{R}$, telle que pour tout x,y, x P y si et seulement si $\lambda(x) > \lambda(y)$.

THEOREME 10

Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une relation antiréflexive P définie sur un ensemble ordonné X fini.

(1) P est un ordre quasi-fort

(2) Il existe une application F de X dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout x,y, $x\ P\ y \Longleftrightarrow F(x) > F(y) + \sigma$, où σ est une constante positive (par exemple, $\sigma = 1$).

(3) Il existe une application F de X dans $\mathbb{R}$ et λ de X dans les intervalles de $\mathbb{R}$, avec $F(x) \in \lambda(x)$, telles que pour tout x,y $x\ I\ y \Longleftrightarrow F(x) \in \lambda(y)$ $(I = P^c \cap P^d)$, et $x\ P\ y \Longleftrightarrow F(x) > \lambda(y)$.

(4) Il existe une application λ de X dans des intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur constante, telle que pour tout x,y, $x\ P\ y \Longleftrightarrow \lambda(x) > \lambda(y)$

(5) Il existe une application λ de X dans des intervalles de $\mathbb{R}$, dont aucun n'est strictement inclus dans l'autre, telle que $x\ P\ y \Longleftrightarrow \lambda(x) > \lambda(y)$.

Il existe une démonstration constructive de (1) implique (2) dans le théorème 10 (Scott-Suppes [45]). Elle permet donc d'obtenir explicitement l'application F, le seuil étant par exemple choisi égal à un (voir aussi Roberts [41]). On peut toutefois noter que cette construction ne conduit pas aux valeurs entières les plus simples possibles pour F ; l'étude des représentations entières les plus "économiques" ne semble pas avoir été entreprise. Les théorèmes 9 et 10 se généralisant au cas où l'ensemble X est infini ; on se reportera à ce sujet à Fishburn [14], Roberts [42] et Mirkin [32].

Signalons enfin deux autres types de caractérisation des ordres d'intervalles et des ordres quasi-forts : à partir des relations d'intermédiaires (Fishburn, [15]) et à partir de fonctions de choix (Jamison-Lau, [26], [27] et Fishburn [16]).

La dimension d'un ordre est le nombre minimum d'ordres totaux dont il est intersection (Dushnik-Miller, cf. Ore [34]). C'est aussi d'après un résultat de Bouchet ([6], cf. aussi Cogis [11]) le nombre minimum de relations d'intervalles(Ferrers réflexives) dont il est l'intersection. Rabinovitch [36] a montré que la dimension des ordres quasi-forts était au plus trois et caractérisé ceux de dimension 3. Par contre il existe un ordre d'intervalle de dimension k pour tout entier positif [5]; une borne supérieure sur la dimension d'un ordre d'intervalle, fonction de sa hauteur, a été donnée par Rabinovitch [37]. D'autres résultats sur les ordres d'intervalles et leur dimension sont contenus dans [54]. La dimension des S-ordres ne semble pas avoir été étudiée.

Le nombre de types de quasi-ordres (ou d'ordres quasi-forts, ou de graphes d'indifférence) sur un ensemble à n éléments est le nombre de Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Ce résultat a été obtenu indépendamment et sous des terminologies variées, par Wine et Freund [52], Dean et Keller [13], Sharp [47], Avery [2] et Rogers [43]. Ces auteurs donnent aussi divers autres résultats intéressants, par exemple l'énumération de certaines relations de Ferrers transitives [47], ou le nombre de graphes d'indifférence connexes ou vérifiant des conditions sur les degrés [43]. Le nombre de tous les quasi-ordres sur un ensemble fini est déterminé par Chandon, Lemaire et Pouget [18]. Les problèmes d'énumération analogues ne semblent pas avoir été étudiés pour les ordres d'intervalles ou les S-ordres.

Signalons pour terminer qu'il pourrait être intéressant d'étudier différents affaiblissements des relations d'intervalles (par exemple les Ferrers non réflexives et non antiréflexives) ou différents renforcements des quasi-ordres.

9. NOTES

(1) Le terme quasi-ordre a été choisi par plusieurs auteurs français pour traduire le terme anglais "semiorder" (le terme semiordre ayant déjà été utilisé dans un autre sens dans Berge [3a]).Il faut noter que le terme anglais est quelque peu ambigu. Il a été utilisé d'abord par Luce [30] pour désigner un couple de relations (P,I) vérifiant certaines propriétés ; il est alors naturel d'appeler "semiorder" la relation totale P + I associée. D'autres auteurs (Scott-Suppes [45], Fishburn, Roberts, etc.) ont préféré appeler "semiorder", la partie asymétrique de cette relation totale, c'est-à-dire la relation P. Cette partie asymétrique est un ordre, en général partiel, mais qui peut être prolongée canoniquement en un "ordre fort" (cf. 3.2. et note 12). Pour cette raison, nous appelons dans ce texte "ordre quasi-fort" un tel ordre tandis que le terme quasi-ordre est réservé à la relation totale associée. Noter que dans [23], Guilbaud appelle relation sesqui-transitive la partie symétrique d'un quasi-ordre.

(2) Aux différents contextes, présentés dans [33], où sont apparues des notions équivalentes à celles de quasi-ordres, on peut ajouter les suivants . La comparaison de plusieurs moyennes, pour tester les différences significatives, a conduit Wine et Freund [52] à une notion de "decision pattern", qui explicitée par Sharp [47], se révèle identique à celle de quasi-ordre. La théorie de l'extrapolation développée par Fine [53] utilise une notion de relation de similarité sur un ensemble totalement ordonné, développée par Rogers [43] et analogue à celle de partie symétrique d'un quasi-ordre. Enfin l'étude des "ordres normaux naturels" par Dean et Keller [13] les conduisent à la même notion que celle des ordres quasi-forts.

(3) Dans ce texte, dont l'un des buts est de présenter les axiomatiques existantes, nous avons choisi de mettre en lumière la dualité, plutôt que de l'exploiter. On pourrait en effet ne présenter systématiquement que l'une des notions ou résultats en dualité, et par exemple, ne considérer que des relations asymétriques ou d'ordres. D'autre part on pourrait utiliser systématiquement la dualité entre les axiomes.

(4) La relation $\subseteq$ entre relations sera appelée relation d'inclusion. On trouve comme synonymes dans la littérature les termes de compatibilité (ici utilisé dans un sens restreint au paragraphe 7.3.) ou de finesse. D'autre part, et contrairement aux conventions bourbakistes, $\subseteq$ dénote l'inclusion large et $\subset$ l'inclusion stricte (égalité exclue).

(5) Une application involutive ou involution est une application F dont l'application composée $F^2 = F \circ F$ est l'identité. Pour la notion d'antiisomorphisme, voir [3].

(6) Comme synonymes de section finissante (commençante) on trouve, entre autres, section, coupe, coupure ou image à droite (à gauche), idéal (filtre), intervalle fermé illimité à droite (à gauche).

(7) On a parfois besoin d'une définition de la totalité n'impliquant pas la réflexivité : Q est dite strictement totale si $x \neq y$ et $x\ Q^c\ y$ implique $y\ Q\ x$. On trouve comme synonymes de ces termes, complet et connexe.

(8) On dit que Q est antisymétrique, si $x \neq y$ et $x\ Q\ y$ implique $x\ Q^c\ y$. Cette propriété n'implique pas l'antiréflexivité de Q.

(9) Le terme match a été proposé par Ribeil [38]. A noter que le terme tournoi désigne classiquement les relations totales et antisymétriques.

(10) Le terme de relation quasi-transitive est dû à Sen [46]. Il a été fréquemment repris dans la théorie du choix social.

(11) La terminologie des relations d'ordres est assez floue pour des raisons expliquées ci-dessous. Les caractéristiques fondamentales exigées d'une telle relation sont la transitivité et l'antisymétrie. On a ensuite deux options : un ordre peut être réflexif ou antiréflexif, total ou non. On obtient donc quatre possibilités que nous dénommerons respectivement dans ce texte, "ordre" (transitif, antisymétrique, réflexif), "ordre strict" (transitif, antisymétrique, antiréflexif), "ordre total", et "ordre strict total" (transitif, asymétrique, strictement total). Cette terminologie conforme à Bourbaki [7], est la plus usuelle actuellement en français. Mais il faut remarquer que suivant les contextes l'une des quatre notions d'ordre précédentes peut être plus intéressante que les autres. Historiquement, il semble que les notions d'ordre total ou d'ordre strict total se soient dégagées les premières (Peirce, 1881 ; Gutberlet, 1886 ; Cantor, 1895.). Ainsi pour Sierpinski ou Denjoy un ordre est toujours total. De même, les termes anglais "order" ou "ordering" désignent généralement un ordre total, strict (Tarski) ou non (Ore), et ceci bien que d'autres mots soient aussi utilisés. Pour l'ordre total : simple order (Birkhoff), complete order (Debreu), strong ordering (Arrow), chain (Sen), linear order, total order, ... ; pour l'ordre strict total : series (Whitehead, Russel), simple order (Church), strong ordering (Sen), strict order, strict complete order, ...

Quant à la notion générale d'ordre (non nécessairement total), elle semble remonter à Hausdorff (1914) qui utilise l'expression "teilweise geordnete Menge". Le terme français correspondant d' "ordre partiel" est parfois utilisé pour désigner un ordre non total. L'anglais utilise abondamment les termes de "partial order" (Church, Birkhoff, Ore) ou de "strict partial order" (Ore, Sen). En résumé, dans les terminologies les plus courantes actuellement, le terme français d'ordre suppose la réflexivité mais non la totalité, tandis que les termes anglais "order" ou "ordering" supposent la totalité (mais non nécessairement la réflexivité).
Signalons pour finir que les préordres de Bourbaki (transitivité et réflexivité) ont pour équivalent anglais quasi-ordering (Birkhoff) ou pre-ordering.

(12) Le terme d' "ordre fort" est nouveau. Le concept d'ordre partie asymétrique d'un préordre total n'a pas reçu de dénomination française, à notre connaissance. Tout au plus trouve-t-on parfois le terme "ordre faible" qui traduit le mot anglais correspondant "weak order". Mais cette traduction est inadéquate. Il résulte de la note précédente (11), que l'expression weak order signifie en français "ordre total faible". En effet ces ordres sont très "proches" des ordres totaux. Compte tenu du sens français du mot ordre, ce sont des ordres vérifiant des propriétés supplémentaires, les rendant "presque" totaux. D'où l'expression retenue d' "ordre fort". (On pourrait dire aussi, ordre quasi-total ou ordre total affaibli).

(13) Noter que dans cette application de dualité l'ensemble des ordres totaux correspond à l'ensemble des ordres stricts totaux.

(14) Le terme nouveau de relation d'intervalle désigne la relation duale d'un ordre d'intervalle. Ce dernier terme dû à Fishburn évoque les propriétés de représentation par intervalle de ces ordres (cf. théorème 9, paragraphe 9). Signalons qu'on appelle classiquement graphe d'intervalle, un graphe représentatif d'une famille d'intervalles : deux éléments sont adjacents dans le graphe si et seulement si les intervalles qu'ils représentent ont une intersection non vide. Il résulte du théorème de représentation cité ci-dessus qu'un graphe d'intervalle correspond au graphe d'incomparabilité d'un ordre d'intervalle ou à la partie symétrique d'une relation d'intervalle (cf. note suivante).

(15) On déduit immédiatement de cette condition (3) la caractérisation des graphes d'intervalles de Gilmore et Hoffman [21]: G est un graphe d'intervalle si et seulement si il vérifie les deux conditions : 1°) son complémentaire est un graphe de comparabilité, 2°) tout cycle de longueur 4 de G admet une corde.

On en déduit facilement en utilisant les caractérisations des graphes de comparabilité données par Gallai [19], la caractérisation des graphes d'intervalle par sous-graphes exclus de Lekkerkeker et Boland [29].

(16) Les termes S-relations, S-matchs ou S-ordres sont nouveaux. Chipman [10] appelle relation "semi-transitive" une relation vérifiant les conditions du théorème 3. Plus tard Fishburn appelle "semi-transitive order", une relation semi-transitive antiréflexive c'est-à-dire un S-ordre [16]. Cette terminologie est peu appropriée puisque un S-ordre est transitif. Nous avons choisi d'utiliser les termes précédents, à défaut d'en trouver de mieux adaptés aux propriétés de ces relations.

(17) En théorie des graphes, on dit que le graphe (X,Q) est sans étoile, (N. Sbihi, *Etude des stables dans les graphes sans étoile*, thèse de 3ème cycle, Université Scientifique de Grenoble, 1978.), ou "a $K_{1,3}$-free graph" (K.R. Parthasarathy et G. Ravindra, "The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$-free graphs", *J. Comb. Th.* (B), 21, 1976, 212-223.)

(18) On déduit aisément de cette condition (2), des caractérisations des "S-graphes", c'est-à-dire des graphes d'incomparabilité des S-ordres.

(19) Halphen [24] supposait en plus que P_R était une relation transitive, ce qui est une conséquence de ces trois axiomes. On peut aussi noter que contrairement à ce qu'affirme Luce dans une note de [30], c'est l'axiome H3 (H4) d'Halphen qui correspond à l'axiome L3 (L4) de Luce.

(20) Sharp introduit cette axiomatique dans [47] pour préciser la notion de "decision pattern" de Wine et Freund [52].

(21) On déduit immédiatement de cette condition (7) une caractérisation des graphes d'incomparabilité d'un ordre quasi-fort, c'est-à-dire des graphes d' "indifférence" de Roberts [41]. Un graphe G est d'indifférence si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes : 1°) son complémentaire est un graphe de comparabilité 2°) G est sans cycle d'ordre 4 et sans étoile. On en déduit aisément d'autres caractérisations données par Roberts dans [41].

(22) On trouve des références historiques sur l'algèbre des relations dans Chipman [10]. Pour utiliser pleinement les propriétés de cette algèbre, il est intéressant d'introduire la "somme relative" $\dot{+}$ de deux relations R et S,

définie par $(x,y) \in R \dot{+} S$, si et seulement si pour tout z, on a $x R z$ ou $z S y$, et de noter l'identité $(RS)^d = S^d \dot{+} R^d$.

(23) Pour ces termes, on trouve aussi au lieu de réciproque : inverse, converse, dual (particulièrement pour les ensembles ordonnés), au lieu de dual : converse. Pour les notations on trouve $\overline{Q}$ au lieu de Q^c et Q^{-1}, Q^r, Q^* au lieu de Q^-.

10. BIBLIOGRAPHIE

[1] AIGNER M., "Graphs and binary relations", in *The many facets of graph theory*, New York, Springer Verlag, 1969.

[2] AVERY P., "Semiorders and representable graphs", in *Proceedings of Fifth British Combinatorial Conference*, 5-9, Winnipeg, Utilitas Mathematica, 1976.

[3] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire*, Paris, Hachette, 1970.

[3a] BERGE C., *Graphes et Hypergraphes*, Paris, Dunod, 1970.

[4] BIRKHOFF G., *Lattice Theory*, New York, American Mathematical Society, 1940 (third edition, 1967).

[5] BOGART K.P., RABINOVITVH I., TROTTER,Jr,W.T., "A bound on the dimension of interval orders, *J. Comb. Th.*, (A), 21 (1976), 319-328.

[6] BOUCHET A., *Etude combinatoire des ordonnés finis*, thèse d'état, Université Scientifique et médicale de Grenoble, 1971.

[7] BOURBAKI N., *Eléments de Mathématiques*, livre I, chapitre 3, Paris, Hermann, 1956.

[8] CHANDON J.L., LEMAIRE J., POUGET J., "Dénombrement des quasi-ordres sur un ensemble fini", *Math. Sci. Hum.*, 62,(1978), 61-80.

[9] CHIPMAN J.S., "The foundations of utility", *Econometrica*, 28 (1960), 193-224.

[10] CHIPMAN J.S., "Consumption theory without transitive indifference", in *Preferences, Utility and Demand*, New York, Harcourt Brace, 1971.

[11] COGIS O., "Détermination d'un préordre total contenant un préordre et contenu dans une relation de Ferrers, lorsque leur domaine commun est fini", in *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, Paris, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, 1978.

[12] COGIS O., "Graphes de Ferrers et graphes à seuil", in *Actes du Colloque, Algèbre Appliquée et Combinatoire*, Grenoble, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1979.

[13] DEAN R.A., KELLER G., "Natural partial orders", *Canad. J. Math.*, 20 (1968), 535-554.

[14] FISHBURN P.C., "Intransitive indifference with unequal indifference intervals ", *J. Math. Psychol.,* 7 (1970), 144-149.

[15] FISHBURN P.C., "Betweenness, orders and interval graphs", *J. pure appl. algebra,* 1,2 (1971), 159-178.

[16] FISHBURN P.C., "Semiorders and choice functions", *Econometrica,* 43, 5-6 (1975), 975-977.

[17] FULKERSON D.R., GROSS O.A.,"Incidence matrices and interval graphs", *Pacif. J. Math.,* 15 (1965), 835-855.

[18] GALANTER E.H., "An axiomatic and experimental study of sensory order and measure", *Psychol. Rev.,* 63 (1956), 16-28.

[19] GALLAI T., "Transitiv orientierbare graphen", *Acta math. Acad. Sci. hung.,* 18 (1967), 25-66.

[20] GHOUILA-HOURI A. "Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre", *C.R. Acad. Sci. Fr.,* 254 (1962), 370.

[21] GILMORE P.C., HOFFMAN A.J., "A characterization of comparability graphs and of interval graphs", *Canad. J. Math.,* 16 (1964), 539-548.

[22] GOODMAN N., *Structure of appearance,* Cambridge, Harvard University Press, 1951.

[23] GUILBAUD G.Th., "Continu expérimental et continu mathématique", *Math. Sci. hum.,* 62 (1978), 11-33.

[24] HALPHEN E., "La notion de vraisemblance", *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris,* 4,1 (1955), 41-92.

[25] JACQUET-LAGREZE E.,"Représentation de quasi-ordres et de relations probabilistes transitives sous forme standard et méthodes d'approximation", *Math. Sci. hum.,* 63 (1978), 5-24.

[26] JAMISON D.T., LAU L.J., "Semiorders and the theory of choice", *Econometrica,* 41, 5 (1973), 901-912.

[27] JAMISON D.T., LAU L.J., "Semiorders and the theory of choice : a correction", *Econometrica,* 43, 5-6 (1975), 975-977.

[28] KRANTZ D.H., "Extensive measurement in semiorders", *Philosophy of Science,* 34 (1967), 348-362.

[29] LEKKERKERKER G.G., BOLAND J.C., "Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line", *Fund. Math.,* 51 (1962), 45-64.

[30] LUCE R.D., Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica,* 24 (1956), 178-191.

[31] MENUET J., "Quasi-ordres et modélisation des préférences", Note SEMA n°197, (1974), 1-77.

[32] MIRKIN B.G., "Description of some relations on the set of real-line intervals, *J. Math. Psychol.*, 9 (1972), 243-252.

[33] MONJARDET B., JACQUET-LAGREZE E., "Modélisation des préférences et quasi-ordres", *Math. Sci. hum.*, 62 (1978), 5-10.

[34] ORE O., *Theory of graphs*, Providence, American Mathematical Society, 1962.

[35] RABINOVITCH I., "The Scott-Suppes theorem on semiorders", *J. Math. Psychol.*, 15, 2 (1977), 209-212.

[36] RABINOVITCH I., "The dimension of semiorders", *J. Comb. Th.*, (A), 25 (1978), 50-61.

[37] RABINOVITCH I., "An upper bound on the dimension of interval orders", *J. Comb. Th.*, (A), 25 (1978), 68-71.

[38] RIBEILL G., "Equilibre, équivalence, ordre et préordre à distance minimum d'un graphe complet", *Math. Sci. hum.*, 43 (1973), 71-106.

[39] RIGUET J., "Les relations de Ferrers", *C.R. Acad. Sci. Fr.*, 231 (1950), 936-937.

[40] ROBERTS F.S., "Indifference graphs", in *Proof techniques in graph theory*, New York, Academic Press, 1969.

[41] ROBERTS F.S., "On non transitive indifference", *J. Math. Psychol.*, 7 (1970), 243-258.

[42] ROBERTS F.S., "On the compatibility between a graph and a simple order", *J. Comb. Th.*, 11 (1971), 28-38.

[43] ROGERS D.G., "Similarity relations on finite ordered sets", *J. Comb. Th.* (A), 23 (1977), 88-99.

[44] SCOTT D., "Measurement structures and linear inequalities", *J. Math. Psychol.*, 1 (1964), 233-247.

[45] SCOTT D., SUPPES P., "Foundational aspects of theories of measurement", *J. Symbol. Logic*, 23 (1958), 113-128.

[46] SEN A.K., "Quasi-transitivity, rational choice and collective decision", *Rev. Econ. Stud.*, 36, 3 (1969), 381-393.

[47] SHARP Jr. H., "Enumeration of transitive, step-type relations", *Acta math. Acad. Sci. Hung.*, 22 (1971/72), 365-371.

[48] TROTTER Jr. W.T., MOORE Jr. J.I., "Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices and families of sets", *Disc. Math.*, 16 (1976), 361-381.

[49] WIENER N., "Contribution to the theory of relative position", *Proc. Cambridge philos. Soc.*, 17 (1912-14), 441-449.

[50] WIENER N., "Studies in synthetic logic", *Proc. Cambridge philos. Soc.* 18 (1914-1916), 14-28.

[51] WIENER N., "A new theory of measurement : a study in the logic of mathematics", *Proc. London math. Soc.*, 19 (1919-1920), 181-205.

[52] WINE R.L., FREUND J.E., "On the enumeration of decisions patterns involving n means", *Ann. math. Statist.*, 28, 1 (1957), 256-259.

[53] FINE, "Extrapolation when very little is known", *Information and Control*, 16 (1970), 331-360.

[54] BAKER K.A., FISHBURN P.C., ROBERTS F.S., "Partial orders of dimension 2, interval orders and interval graphs", *Networks* 2 (1972), 11-28.