MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. PETITOT

Théorie des catastrophes

Mathématiques et sciences humaines, tome 59 (1977), p. 3-81
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__59__3_0>

MATHEMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES
15e année, n°59 Automne 1977

Revue publiée avec le concours du
Centre National de la Recherche Scientifique

SOMMAIRE

Math. Sci. hum. (15^{e}année, n°59, *1977*, p.5-6)

AVERTISSEMENT

Ce numéro spécial de "Mathématiques et Sciences Humaines" est le premier consacré à la théorie des catastrophes (T.C.). Il sera suivi d'autres et se propose d'engager un débat.

Une telle présentation des idées de René Thom ne va pas de soi. La T.C. est en effet clivée par le conflit entre ses mathématiques sous-jacentes qui sont hautement non triviales et ses applications (en particulier aux sciences humaines) qui demeurent rares et généralement triviales. Ce conflit n'a pas pour autant contrarié la diffusion sauvage de la théorie. Au contraire. On pourrait presque dire qu'il l'a stimulée dans la mesure où, en favorisant une labilité (voire un laxisme) épistémologique, il en a permis diverses appropriations idéologiques.

C'est pourquoi il m'a semblé pertinent d'adopter une stratégie critique résolument non pragmatique, insistant plutôt sur les implications que sur les applications. Cette stratégie vise - en accord d'ailleurs avec la philosophie générale de la théorie qu'elle présente - plutôt à l'intelligibilité qu'à l'efficacité. Plutôt que de s'en tenir à une paisible vulgarisation, elle préfère - quitte à être taxée de désinvolture - indiquer et marquer des points d'articulation polémiques.

Un tel parti-pris implique évidemment une présentation morcelée abordant des lieux théoriques hétérogènes. La conséquence en est double :
a) Au niveau conceptuel, plutôt que de légiférer sur la T.C. à partir d'une épistémologie générale et surplombante à laquelle je ne crois guère, j'ai préféré accentuer les connivences éminentes qui la relient à l'hétérogénéité de ces discours.
b) Au niveau mathématique, j'ai dû opter pour un compromis. Une appréciation des affirmations tranchantes de R. Thom n'est possible que si l'on dispose d'une compréhension minimale des notions de géométrie et de topologie différentielles qu'elles mettent en jeu. Or ces notions sont l'objet dans les milieux de sciences humaines d'un black-out quasi total. Une pédagogie

semble donc indispensable. Mais on ne peut pas pour autant partir de zéro. Il faudrait plusieurs volumes. J'ai donc été conduit pour ce numéro à sacrifier la rigueur mathématique à l'intérêt conceptuel. En particulier les théorèmes seront en général énoncés sans démonstration et sans l'expression technique de leurs hypothèses. Le lecteur soucieux d'exactitude pourra se reporter aux ouvrages de la bibliographie ou au troisième numéro.

Le plan de ce numéro sera donc le suivant :

- Chapitre I. Cartographie du site, du style conceptuel et des implications de la T.C. La plupart des thèses que j'y avance seront, par la suite, reprises, étayées et développées (autant que faire se peut dans un cadre restreint).

- Chapitre II. Interview de René Thom.

- Chapitre III. Il s'agit à partir d'un exemple élémentaire dû à Zeeman et emprunté à la théorie de l'élasticité d'introduire les notions stratégiquement décisives et de les comparer à celles de la stratégie physique standard.

Dans les autres numéros on trouvera des éléments plus rigoureux de la théorie mathématique ainsi que des éléments de la modélisation catastrophique en physique, en biologie, en économie et en linguistique.

J. Petitot

Math. Sci. hum. (15^e année, n°59, *1977*, p.7-25)

I

CARTOGRAPHIE ELEMENTAIRE
(en guise d'introduction)

qualitativement les phénomènes *évolutifs présentent des périodes de changement régulier où une même "force" semble être à l'oeuvre, séparées par des bifurcations où le type du changement change et où un autre mode de transformation régulier apparaît*

16

***le mouvement d'une feuille morte dont la trajectoire présente des points de rebroussement, les phénomènes tourbillonnaires en thermodynamique où un tourbillon crée** partout de l'irrégularité (catastrophes généralisées), les changements de phase dans les corps purs sont des exemples de succession de chréodes où le développement est régulier, séparées par des "catastrophes".*

in J. Roubaud, *Trente et un au cube*, Gallimard, 1973.

1.1. La dissémination de la notion de catastrophe dans le contexte théorique contemporain pose (et posera sans doute aux épistémologues futurs) une question assez passionnante. Alors que des tournants scientifiques comme ceux de la relativité, de la mécanique quantique, du code génétique, doivent leur pertinence à l'élucidation de faits expérimentaux préalables, la T.C. doit son impact à une toute autre raison.
Certes, il s'agit d'un événement - plus, d'un *moment* - mais si événement il y a, il est d'un type bien singulier.

1.2. Pour le cerner, faisons d'emblée quelques citations.
1.2.1. H. Bremermann : "The publication of Thom's book is a major event. A new paradigm for the foundations of physics and biology has been proposed... This may sound like madness or a prescription for a publishing disaster. Yet the book will be impossible for mathematicians, theoretical biologists, and philosophers of science to ignore."
1.2.2. B.G. Goodwin : "What we are offered is a new mathematical metaphor, created by Thom in response to the challenge of rendering intelligible the world of structure and form."
1.2.3. R. Abraham : "In Thom's manuscript, which has been floating around publishing houses for five years but has yet to appear [(1)], mathematics and morphosophy are reunited for the first time since Pythagoras (sic). With the aid of mathematical metaphors, primarily from the qualitative theory of dynamical systems, Thom has raised phenomenology to unprecedented hights."
1.2.4. C.H. Waddington : "... the basic importance of this book, which is the introduction, in a massive and thorough way, of topological thinking as a framework for theoretical biology. As this branch of science gathers momentum, it will never in the future be able to neglect the topological approach, of which Thom has been the first significant advocate."

1.2.5. Ces citations convergentes pensent la rupture thomiste
i) comme la constitution d'une métaphore, d'un *paradigme*,
ii) comme la première approche *mathématique* de la question *phénoménologique* universelle de la structure et de la forme.
Un des traits caractéristiques de la T.C. serait donc *de métaphoriser géométriquement le réel supposé de la forme*. On voit qu'il s'agit d'une toute autre démarche que celle qui consiste à modéliser par une théorie *falsifiable* des résultats expérimentaux acquis mais auparavant ininterprétables. Plus. L'opération de Thom est d'autant plus nouvelle que la complicité phénoménologique radicale et originaire entre μορφη *et* λογος est justement *ce* que la science *doit* scotomiser pour se fonder objectivement c'est-à-dire *comme telle.*

(1) Ecrit en 1972 avant la parution de *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*.

1.3. Si événement il y a, donc, il n'est ni scientifique, ni philosophique.

1.3.1. Il n'est pas scientifique dans la mesure où il ne satisfait pas à la *légalité* scientifique : "ce que nous apportons ici, c'est non pas une théorie scientifique, mais bien une méthode ; décrire les modèles dynamiques compatibles avec une morphologie empiriquement donnée, tel est le premier pas dans la construction d'un modèle ; c'est aussi le premier pas dans la compréhension des phénomènes étudiés. De ce point de vue , nos méthodes, trop indéterminées en elles-mêmes, conduiront à un *art* des modèles et non à une technique standard explicitée une fois pour toutes." (1)

1.3.2. Il n'est pas philosophique dans la mesure où il ne s'agit pas d'un métadiscours sur la science, sa vérité, son idéologie, sa sociologie etc.

1.3.3. L'événement, c'est celui de la *rupture d'un paradigme de légitimité*, celui de la scientificité classique. En effet, la T.C. marque l'irruption - dans le champ d'une scientificité assujettie à l'impératif de mathématisation - d'une dimension proprement *structurale-sémiotique*.

Or nous vivons sur l'acquis d'une complicité d'essence entre sciences physiques et mathématiques. Nous mesurons donc très mal la portée de ceci *qu'un développement* généalogique *de la géométrie puisse conduire à cet antonyme de l'espace qu'est la structure, ou encore qu'il existe une métaphore axiomatique spatiale de la structure.*

2. Rappelons quelques traits saillants de la T.C.

2.1. Et d'abord ses thèses. On les trouvera résumées à la fin de *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*.

2.1.1."Tout objet, ou toute forme physique, peut être représenté par un *attracteur* C d'un système dynamique dans un espace M de *variables internes*.

2.1.2. Un tel objet ne présente de stabilité, et de ce fait ne peut être aperçu, que si l'attracteur correspondant est *structurellement stable*.

2.1.3. Toute création ou destruction de formes, toute morphogénèse, peut être décrite par la disparition des attracteurs représentant les formes initiales et leur remplacement par capture par les attracteurs représentant les formes finales. Ce processus, appelé *catastrophe*, peut être décrit sur un espace P de *variables externes*.

2.1.4. Tout processus morphologique structurellement stable est décrit par une (ou un système de) catastrophe(s) structurellement stable(s) sur P.

---

(1) Thom [1], p.324.

2.1.5. Tout processus naturel se décompose en îlots structurellement stables, les *chréodes*. L'ensemble des chréodes et la syntaxe multidimensionnelle qui régit leurs positions respectives constitue un *modèle sémantique*.

2.1.6. Si l'on considère une chréode C comme un mot de ce langage multidimensionnel, la signification de ce mot n'est autre que la topologie globale du (ou des) attracteur(s) associé(s) et celle des catastrophes qu'ils subissent. En particulier, pour un attracteur donné, la signification est définie par la géométrie de son domaine d'existence sur P et la topologie des catastrophes de régulation qui limitent ce domaine. (1)

2.2. De ces thèses, se dégagent une visée, un principe, une métaphore.

2.2.1. Une visée. La T.C. est au sens le plus strict (et le plus généalogique) une *phénoménologie*. Elle a donc trait à l'objet et au sens.

2.2.1.1. Quant à l'objet, elle le réduit - en tant que phénomène - à son pur apparaître, apparaître qu'elle réduit à son tour à sa morphologie visée ,"vue", comme système de discontinuités : "Qu'est-ce qu'un "phénomène" ? Etymologiquement, un phénomène est ce qui se voit, ce qui apparaît, et toute apparence se manifeste *sur un certain espace* ... L'espace sur lequel apparaissent les apparences d'une morphologie sera dit *l'espace substrat* de cette morphologie ... Toute morphologie se caractérise par certaines discontinuités qualitatives du substrat." (2) La question c'est que la morphologie ne fait pas objet.

2.2.1.2. Quant au sens elle le réduit - en tant que phénomène - à la morphologie: "Il est bon de postuler *a priori* qu'il n'y a rien de plus dans une chréode que ce qu'on peut y déceler phénoménologiquement, c'est-à-dire son ensemble de points catastrophiques et de procéder à l'analyse dynamique de la chréode qui soit la plus économique (*conservative*, comme on dit en anglais). Dans cette optique, la *signification* d'une chréode n'est autre que la structure topologique des catastrophes qu'elle contient et éventuellement l'analyse dynamique qu'on peut en faire, qui conduit à définir le centre organisateur de la chréode." (3) La question c'est que la morphologie ne fait pas sens.

2.2.1.3. Disons que la morphologie *c'est le reste de la chose* et qu'en *nommant* ce reste, cet a-logon autre que le sens, autre que l'objet, objet et sens qui ne sont pourtant rien d'autre, Thom a *fixé la trace* de leur synthèse disjonctive (pour reprendre le terme de Deleuze) et par là amorcé un effet de vérité.

---

(1) Thom [1], p.321.

(2) Thom [2] : Ouverture

(3) Thom [1] : p.125

2.2.2. Un principe. Celui de stabilité structurelle. Le génie de Thom est d'avoir compris que la stabilité structurelle est une contrainte telle qu'elle est en soi un principe de raison suffisante. La stabilité structurelle "cause" les morphologies dans la mesure où celles-ci ne sont que les "solutions" au problème qu'elle pose.

2.2.3. Une métaphore. La T.C. est structurée *comme* un langage (modèles sémantiques 2.1.5.).

2.3. Le propre de la T.C. en tant que matérialisme topologique est d'avoir autonomisé dans le réel physique et biologique un niveau proprement structural. Son idée essentielle est qu'une certaine compréhension des processus morphogénétiques "est possible *in abstracto*, de façon purement géométrique, *indépendamment du substrat des formes et de la nature des forces qui les créent.*"(1)

Cette indépendance par rapport à la physico-chimie ou à la biochimie du substrat n'est pas une disjonction. Il s'agit d'une mise entre parenthèses, d'un suspens, d'une εποχη.

2.3.1. *En dernière instance* "la stabilité de tout être vivant, comme en fait, de toute forme structurellement stable, repose ... sur une structure formelle, en fait, un être géométrique, dont la réalisation biochimique est l'être vivant." (2) ;

2.3.2. Cette structure formelle globale est certes matérialisée par les mécanismes sous-jacents qui la réalisent:"Elle peut en principe s'expliquer uniquement à l'aide de déterminismes locaux, théoriquement réductibles à des mécanismes de nature physico-chimique." (3)

2.3.3. *Mais cela n'implique pas qu'elle soit produite par eux* : il existe une raison géométrico-topologique *suffisante* de la stabilité structurelle. D'ailleurs *"qui nous assure que les structures formelles qui déterminent la vie comme processus stable d'autoreproduction sont nécessairement liées au contexte biochimique que nous connaissons ?"*(4)

2.3.4. C'est l'inscription mathématique de ce niveau structurel-symbolique *excrit* du réel des corps et noué au langage qui permet d'engager "an inspired though exceedingly sketchy conceptual framework for understanding how mind and symbol emerge from the biological substratum, the essential problem of structuralism."(5).

---

(1) Thom [1] : p.24 , [2] : p.253
(2) Thom [1] : p.159
(3) Thom [1] : p.167
(4) Thom [1] : p.325
(5) B.G. Goodwin

2.4. Ainsi cartographiée, la T.C. se révèle être naturellement et nécessairement une *théorie de l'analogie* visant à classifier les solutions possibles à la contrainte de stabilité structurelle. Or les morphologies qu'elle classifie sont en général déjà nommées, et en tous cas nommables ou descriptibles en langue naturelle. Première théorie réussie de l'analogie, la T.C. voit donc son intuition géométrique constituante se prolonger naturellement et nécessairement en l'assertion métaphysique d'une langue réussie, langue formelle multidimensionnelle d'une structure et d'une signifiance essentiellement autres que celles - logiques - des dits langages formels. Synthèse disjonctive de l'objet et du sens qu'elle réduit à leur être-trace elle est langue réussie (une caractéristique leibnizienne) dans la juste mesure où elle évide l'évidence fallacieuse du sens (1) c'est-à-dire dans le mesure où elle *géométrise le concept.*

"Toute ma métaphysique sous-jacente, c'est d'essayer de transformer le logique en dynamique et le conceptuel en géométrique."(2)
"CT is - quite likely - the first coherent attempt (since Aristotelian logic) to give a theory on *analogy*. When narrow-minded scientists object to CT that it gives no more than analogies, or metaphors, they do not realise that they are stating the proper aim of CT, which is to classify all possible types of analogous situations ... Now the positivist objection may be rephrased as follows : whereas quantitative modelling allows us to use computations, and therefore is more powerful than ordinary common sense intuition, how could qualitative modelling be stronger than usual, ordinary language deduction ? How can a qualitative model be something more than an idle, superfluous geometric picture of common sense intuition ? This objection, I believe, has some validity. But it will lose its strength, precisely in so far as a complete CT will be constructed, which will allow formal deduction, and combinatorial generation of new forms from a set of given forms. In as much as CT develops into a formal syntax of (pluri-dimensional) catastrophes, we will be able to go from a purely verbal description to an abstract, topological morphology which we will be able to handle with purely formal, algebraic tools. Hence we might put into connection apparently disjoint facts, predict unexpected situations, or, at least,

---

(1) Sur le sens comme présence, cf. les analyses derridiennes.

(2) Thom [3] : p.74.

reduce the arbitrariness of the description. As I said earlier, reducing the arbitrariness of the description really is the proper definition of scientific explanation. This definition is rejected by some scientists, because, as they say, it appeals to the subjective feeling of the observer : mystical or magical explanations do achieve this reduction of arbitrariness, and they are opposite to scientific method. For instance, you could explain all natural phenomena by saying that they appear as a result of God's will. Now it happens that all these magical explanations imply the use of non-formalisable concepts, like : God, entelechy, order, complexity, programme, force, message, information, meaning, spirit, randomness, life, etc. All these concepts have morphologically the common feature of being *transpatial* (non-local) : they prescribe long range order, long range constraints in the morphology to which they apply. (Think for instance of the concept of meaning for linguistic morphology.) Now scientific thinking is basically formal thinking : it is based on spatial local concatenation of forms, which excludes any long range manipulation of symbols (or basic forms, or morphogenetic fields in CT terminology). Quite frequently, in many sciences, people use freely these "magical" concepts, without being aware of their magical character. Molecular Biology, for instance, with its intemperate use of : "Message, Information, Code", clearly exhibits its fundamental impotence to deal with the spatio-temporal ordering of events in living matter. I am afraid the same is true in many social sciences, where one meets with such concepts as : information, authority, collectivity, sense of history, conflict, consciousness, etc. All these concepts have an illusory explanatory power. It is perhaps the major interest of CT to clear all sciences of these old, biologically deeply inrooted concepts, and to replace their fallacious explanatory power by the explicit geometric manipulation of morphogenetic fields. In all sciences, CT calls for the same cleaning of intuition, as Hilbert advocated in his "Grundlagen der Geometrie" for the foundations of Geometry : Eliminate the "obvious" meaning, and replace it by the purely abstract geometrical manipulation of forms. The only possible theorisation is mathematical." (1)

2.5.1. Philosophie naturelle de style "pré-socratique" (sic) (Héraclite, Anaximandre), sémiotique universelle, phénoménologie où l'être intelligible revient au sujet par géométrisation du sens, élucidation d'un être-spatial de la structure (1.3.3.), retour de ce qui a été refoulé voire forclos sans reste dans la science, cela la T.C. ne l'est (idéalement et déjà en partie concrètement) qu'à se fonder d'une intuition spatiale *hétérogène*.

---

(1) Thom [4] : p.388-389.

Au sens strict elle anticipe *une esthétique transcendantale de la structure.* Et cela ne peut pas ne pas être sans conséquences.
C'est à ce qu'elle *réactive* cette ombre ontologique que la T.C. doit son impact mais aussi son ambiguité, voire son opacité. Car cette réactivation exige qu'on la lise à au moins trois niveaux.
i) Comme légitimation mathématique d'un nouveau paradigme de scientificité si l'on vise sa production.
ii) Comme moment (hegelien) si l'on vise ses implications.
iii) Comme fantasme si l'on vise sa vérité.

2.5.2. Cela fait qu'il s'agit d'une théorie essentiellement non falsifiable, (je dirai même *incastrable*) puisque si trois instances - science/philosophie-épistémologie/écriture - peuvent en fait prétendre légiférer sur elle, elles ne le peuvent en droit qu'à s'y déconstruire, voire s'y abolir, rien ne pouvant prévaloir contre une raison spatiale - cohérente - *préalable au sens.*

3. Bref, si l'on voulait - pour en anticiper imaginairement le destin et en cerner les résonnances - trouver un précédent à la T.C., il faudrait sans doute remonter assez loin - en tous cas avant la rupture newtonienne - jusqu'en un point critique d'émergence où l'espace n'était pas encore conçu comme "l'être-hors-de-soi" de la Nature, mais *pratiqué* comme une schize.

4.1. Donnons maintenant quelques repères pour le problème du *style* et de la *transmission* de cette schize géométrique qu'est la T.C.
4.1.1. D'abord la T.C. est inséparable de *l'énonciation* propre à Thom. Il s'agit d'un exemple rare de conjonction *explicite* entre une production formelle consistante et la machine désirante, le sujet qui la produit. C'est d'ailleurs pourquoi on peut *aussi* lire la T.C. comme un fantasme.
L'objet cause du désir y est la morphologie comme reste de la chose, *rien symbolique forclos par l'espace abstrait* et auquel Thom fait faire retour par et dans le réel du corps. "L'acte de saisir c'est l'étincelle de conscience élémentaire. L'espace vu de cette manière ressemble à une couronne, et le corps à un trou, situé à l'intérieur de cette couronne. Le trou est constitué par les points que nous ne pouvons atteindre. Et il est bizarrement rempli par la douleur et le plaisir. C'est pour moi un miracle.

La peau est une sorte d'onde de choc qui sépare deux types de conscience, la conscience motrice à l'extérieur, et la conscience essentiellement affective et cénesthésique à l'intérieur... L'homme, dans la construction mathématique, a réussi à annihiler le corps. La pensée géométrique a été capable de remplir le trou du corps par de l'espace abstrait, vide." (1)

4.1.2. Cette énonciation singulière ne va évidemment pas sans quelque désinvolture à l'égard des règles d'usage du discours scientifique. Thom se voit souvent reprocher cette désinvolture. Elle est pourtant bien compréhensible. Ainsi que le note ironiquement Zeeman : "in order to create profound new ideas, profound because they can be developed a long way with immense consequences, it is necessary to invent a personal shorthand for one's own thinking. The further the development, the more subtle must be the shorthand, until eventually the shorthand becomes part of the paradigm. But, until it does, the shorthand needs decoding. Meanwhile Thom has thought ahead for so many years that now, when he speaks to us, he often uses his shorthand and forgets to decode it". (2)

4.1.3. Ce criblage du paradigme par une énonciation et un désir singuliers démarque la T.C. du discours scientifique standard et en fait le premier exemple d'une théorie qui n'est pas sans sujet. Rien qu'à ce titre, elle est d'une modernité radicale. Mais pour autant qu'énonciation et désir, justement parce que singuliers, ne se partagent pas, il a eu la conséquence immédiate de placer Thom en position de *supposé savoir* (pour reprendre cette catégorie lacanienne). C'est à cette position de supposé savoir qu'il faut articuler les traits suivants qui ont déjà eu le temps de se manifester.
Unicité de la place énonciative : elle est celle d'un *style*.
Impossibilité structurelle d'une transmission intégrale.
Investissement des relations à ce savoir réel/supposé par des relations de transfert ou de dénégation.

4.2. On peut alors esquisser dans leurs grandes lignes les divers types de réaction à la T.C.

4.2.1. Du côté des mathématiques une audience exceptionnelle due d'une part à ce que les idées de Thom sont tellement "provocative" (comme on dit en anglais) qu'elles ont provoqué des recherches singulièrement fructueuses, et d'autre part à ce que la T.C. a ouvert la topologie différentielle et la dynamique qualitative (global analysis) à un nouveau champ d'expériences.

---

(1) Thom [3] : p.78

(2) Zeeman [1]

4.2.2. Du côté des sciences exactes une certaine reconnaissance dans les domaines où la T.C. se révèle d'une grande opérativité (théorie des transitions de phases, théorie des caustiques, graphes de Feynman etc.). Mais cette reconnaissance partielle se tempère d'une suspicion générale au niveau dit épistémologique mais qui n'est souvent qu'idéologique (positiviste).

4.2.3. Du côté des sciences descriptives-expérimentales et plus particulièrement de la biologie, l'incompréhension semble quasi-totale[1]. La conceptualité biologique est en effet massivement réductionniste. Quand elle ne l'est pas c'est qu'elle recourt à des modélisations-simulations informatiques et cybernétiques. Elle est donc particulièrement fermée à une intervention qui, scotomisant la biochimie des substrats, postule que la question de l'être-spatial est *préjudicielle* pour l'intelligibilité de *tout* niveau phénoménal.

4.2.4. Du côté des sciences humaines les réactions sont assez étranges. Ces sciences devraient en effet être spontanément complices d'une stratégie théorique qui offre le premier point de coïncidence entre leur réel et le formel. Or c'est chez elles que la dénégation est en général la plus vive. La cause de cette dénégation est sans doute double.

4.2.4.1. Ces sciences dont le statut demeure problématique dans la mesure où leur objet n'est pas constituable comme tel ne sont friandes d'un appoint mathématique qu'à condition que celui-ci leur demeure pragmatiquement asservi. Elles ne voient d'ailleurs pas comment une mathématique traditionnellement complice de la physique pourrait leur être utile. Atteintes "d'algébrose", elles restent dominées par des formalismes de type algébrico-combinatoire (maintenant catégoriques) ou statistiques.

4.2.4.2. Mais surtout ces sciences se sont constituées à partir d'un geste drastique de délimitation et de rejet dont leur objet n'est que le reflet. Leur légitimité est donc contradictoire puisque d'une part elles aspirent à réaliser un paradigme classique de scientificité mais que d'autre part elles scotomisent *a priori* leur réel pour déceler la structure. Cette contradiction induit des féodalités jalouses des codes parascientifiques garantissant leurs technologies de pouvoir. Elles ne sauraient donc accepter une visée qui - au nom du réel - vient réactiver le fond ontologique qu'elles ont dû trahir pour devenir opératoires.

4.2.5.1. Du côté de la philosophie et des pratiques signifiantes contemporaines (mathème lacanien, grammatologie derridienne, économie deleuzienne ...) les réactions ne peuvent être que paradoxales.

---

(1) Rappelons cependant que l'embryologiste C.H. Waddington a soutenu résolument et dès l'origine l'entreprise de Thom.

Dans son projet même de déconstruction géométrique du sens, la T.C. *réactive* en effet la plupart des noeuds critiques de l'ontologie. Si donc - en tant que déconstruction - elle est (et peut-être un peu malgré Thom) historiquement complice de ces pratiques signifiantes, en tant que réactivation, elle s'y heurte et se voit souvent taxée par elles d'idéalisme primaire et de méconnaissance. Il s'agit là d'un problème non trivial. L'articulation symbolique de la langue, la grammaire, étant la *garantie* du sens, elle ne saurait *dire telle quelle* sa propre négativité, sa propre mise en abîme qu'à abolir le discours (dans la vérité de la psychose). Une pratique de déconstruction qui s'exprime *en langue naturelle* passe donc nécessairement par un déplacement critique. Ce déplacement, pratiqué et théorisé, de ce que l'on entend habituellement par pratique théorique a pris, on le sait, le nom de *question de l'écriture*. Ecriture (trace matérielle, signature du sujet) dont l'expérience a engendré une vaste visée "grammatologique" articulant sa question à la métapsychologie (jouissance, pulsion, corps).
Quels que soient les clivages internes qui lui sont propres cette visée stratégique est devenue à même d'interroger le *sujet* de la science et est donc à même de *lire* le texte scientifique comme symptôme de sa forclusion.
4.2.5.2. On lira à ce propos par exemple l'article de D. Sibony : *Le Discours Scientifique et l'Inconscient*. Sibony y interroge le rapport entre écriture et différence sexuelle, la différence sexuelle étant ce trou du symbolique "défini" par l'impossibilité de son inscription (le réel au sens lacanien, impossible du rapport sexuel, ce qui ne cesse pas de ne pas s'écrire [(1)]). Cela le conduit naturellement à lire le texte mathématique - quant à la vérité de son sujet - comme "fixation partielle du corps morcelé", comme "tentative aussi inépuisable que désespérée d'inscrire le rapport sexuel" et à y interroger *"cette frontière indécidable entre savoir inconscient et savoir du réel"*. Réponse : "Le jeu mathématicien est accroché au réel, mais de ce réel le mathématicien ne jouit qu'à en être la dupe".

Lue de ce lieu, la T.C. apparaitrait comme une plus-value (dont l'on crédite ou non Thom en tant que supposé savoir) produite par son *effectuation réussie dans la méconnaissance* de l'inscription du rapport sexuel.
Bref, lu du côté de l'écriture, un matérialisme topologique qui remet en scène, répète et rejoue le dérapport primaire symbolique / spatialité

---

(1) Reprise de l'axiome freudien selon lequel il n'existe pas de représentant psychique de la différence sexuelle.

non plus comme événement originaire de séparation (fondant la réalité) mais comme fixation d'un indécidable, ne peut être pris - dans un premier temps - que pour ce qu'il n'est pas, pour un formalisme quand il s'agit d'une poétique, pour une poétique quand il s'agit d'un formalisme, pour un masque quand il s'agit d'un regard, pour une rationalité quand il s'agit d'un désir, pour un fantasme quand il s'agit d'une science.

4.2.5.3. Mais dans un deuxième temps il apparaît que de telles pratiques signifiantes ne peuvent rencontrer le texte scientifique qu'à rejoindre en vérité ce que avec Lacan, j'appellerai leur *mathème*. *Or la T.C.* - comme inscription du reste de la chose (2.2.1.3.) - *est justement un tel mathème*. La visée "grammatologique" et la T.C. seraient dès lors comme le recto et le verso d'un nouveau paradigme (a-scientifique mais absolument rationnel), leur *chiasme* possible (faisant de chacune le lecteur du semblant que l'autre prend pour sa vérité) manifestant qu'en ce lieu indécidable la vérité est *disjointe* de son inscription.

4.2.6. Enfin du côté des pratiques "non scientifiques" et en particulier des pratiques "artistiques" (musicales, picturales etc.) la T.C. éveille parfois un enthousiasme qui, bien que reposant en général sur un usage sauvage de métaphores, ne saurait être sous-estimé. Au contraire. Car il manifeste plus que tout autre combien le frayage de Thom est un *acte*.

5. Voici, esquissée à grands traits et avec certes trop de désinvolture, une cartographie élémentaire de la T.C. en tant qu'elle situe un nouveau noeud entre le formel, le sens et le réel. C'est de ce noeud que, dans ce qui suit, je vais tenter de tracer les contours.

6. *Appendice :* Remarques sur le texte de J.M. Lévy-Leblond.

Une des dernières "lectures" de la T.C. est celle de J.M. Lévy-Leblond dans son article *Catastrophes, paradoxes et métaphores*. J'en reprends ici quelques points.

6.1. En réponse à la thanatocratie scientifique Lévy-Leblond milite en faveur d'un "irrespect" :"C'est un véritable détournement des mathématiques qu'on préconiserait volontiers". "Après tout, c'est le sort obligé de toute langue imposée par une minorité dominante à la majorité, que de perdre sa belle pureté, et de se mêler aux idiomes barbares avant qu'émerge une langue nouvelle".

La mathématique est une langue, mais une langue qui peut à loisir être détournée pour ce qu'il en est du sens puisque justement son être s'identifie à sa syntaxe absolument parlant incastrable.
L'allégresse anarcho-désirante qui émiette le surmoi mathématique (en jouant politiquement de l'hétérogénéité syntaxe/sémantique) ne peut prendre la T.C. que pour un "fantasme de maîtrise", ne peut que critiquer en elle une prétention totalisante et se penser contre elle comme "poétique plutôt que métaphysique, esthétique plutôt qu'herméneutique, symbolique plutôt qu'analogique".
Cette opinion est parfaitement fondée. Mais il est certain que Thom ne la partage pas. Il n'a jamais caché une certaine aversion pour ce genre d'allégresse (ainsi que pour l'esthétique).
Par exemple: "Le sentiment esthétique est une sorte de ruse qu'emploie la vie pour éviter aux gens de réfléchir ... Avec l'esthétique on se contente de jouir. Moi,au contraire, je cherche à comprendre et à interpréter le dynamisme générateur des formes." (1) Il est certain que chez Thom la renonciation à la jouissance au profit de ce plus - de - jouir qu'est l'intelligibilité s'accompagne d'un souci d'universalisation. Mais tout frayage théorique est un travail du deuil. Et toute stratégie effectivement neuve doit dé-limiter son territoire.

6.2. La contradiction est que s'il est effectivement urgent d'émietter le code mathématique dans l'échange des signes, cela n'a pour autant d'impact *réel* que si émerge *par ailleurs* un geste théorique qui soit un *acte* (4.2.6.) et qui répète donc une fondation là où çà ne va plus de soi. Il n'y a pas de dérive sans point fixe. Bien qu'il y ait contradiction entre dérive et point fixe.

6.3. Reprenons alors les critiques principales de Lévy-Leblond.
6.3.1. Si Thom s'attaque à la "coupure" galiléenne (et par là-même à l'ensemble de la physique) qui a induit ce divorce radical entre le formalisme et la langue naturelle, c'est au nom d'une nostalgie aristotélicienne qui nie toute la dimension historique de la théorisation physique. Sa "profession de foi sensualiste" "renvoie à une épistémologie pré-comtienne difficilement acceptable." Elle repose sur "l'injustifié privilège accordé à la géométrie et à la mécanique classique, et le refus de reconnaître la dynamique historique des critères d'intelligibilité théoriques, aussi bien que de compréhension intuitive."
6.3.2. La T.C. n'a au fond que des applications scientifiques ponctuelles et son intérêt est donc avant tout herméneutique. Or, à ce niveau justement,

---
(1) Thom [3]

elle prétend fonder une nouvelle philosophie naturelle et unifier la scientificité en transcendant les sciences et leurs ontologies régionales sans pour autant assurer effectivement son statut épistémologique. En effet :

. elle ne propose que quelques analogies sommaires. "Le contraste est flagrant entre l'appareillage mathématique élaboré de la théorie et la simplicité des situations décrites en l'utilisant ... Il est difficile, à la réflexion, d'y voir autre chose qu'une *représentation*, sans pouvoir explicatif réel." ;

. elle s'autorise de ces analogies sommaires pour "prouver" qu'elle est une *théorie* de l'analogie ;

. elle utilise cette probation toujours différée comme d'un alibi pour disqualifier a priori toute critique.
"Autrement dit, la théorie des catastrophes envelopperait ses propres critères de pertinence et fonderait son propre statut épistémologique !"

6.3.3. La T.C. est politiquement régressive (petite - bourgeoise). Sa conception du savoir pourrait se paraphraser ainsi : jusqu'ici, les savants ont pu transformer le monde - il ne s'agit plus dorénavant que de l'interpréter."

6.4. Si ces critiques radiographient de façon assez exacte l'idéologie de la T.C. elles n'en cartographient pas le réel. A travers son "équation personnelle" et ses affirmations lapidaires, Thom vise tout autre chose qu' un dynamisme universel rémunérateur d'analogies. Je reviendrai souvent (et pour cause) sur cette question. Je me borne donc ici aux remarques suivantes :
6.4.1. On peut d'abord répondre à Lévy-Leblond ce que Thom répliquait à Zeeman : "I think that Christopher's criticisms arise basically from a fairly strict, dogmatic view of catastrophe theory (CT), which he identifies with "elementary catastrophe theory" (ECT), i.e. the theory of catastrophes induced by a field of gradient dynamics. I strongly believe that CT has to be considered as a theory of general morphology, hence it may be necessary for us to use all kinds of catastrophes (generalised catastrophes, composed maps catastrophes, G-invariant catastrophes and so on.). The aim of CT is to find the syntax describing the aggregation of such catastrophes. Now the elementary catastrophes of ECT, although undoubtedly fundamental, are nothing but the simplest constituents of such a syntax. To take the linguistic analogy, elementary catastrophes are the phonemes of the text composed by the morphogenetic fields ; ECT is to CT no more than phonology is to grammar."(1)

(1) Thom [4]

6.4.2. Si la T.C. est effectivement politiquement et épistémologiquement régressive (au sens péjoratif), c'est parce qu'elle est d'abord *ontologiquement* régressive. On peut certes affirmer que l'idéalisme trancendantal est mort en tant que *moment* du concept. Mais cela suffit-il à abolir son *lieu* ? Peut-on croire qu'une rhétorique suffira à elle seule à enrayer la thanatocratie techno-scientifique ? N'y a-t-il pas là un noeud historique irrémédiable qui ne peut être tranché que par un effet de vérité d'un tout autre tranchant qu'une dérive, aussi subversive soit-elle ?

6.4.3. Ce que Thom attaque dans la physique (quantique ou autre) c'est sa vérité "anti-écologique", sa complicité d'essence avec l'arraisonnement technologique. Ce n'est pas évidemment son formalisme.

D'ailleurs, comme les mythes de Lévi-Strauss, les formalismes "se parlent entre eux" et rien n'empêche (comme le fait par exemple Souriau) de "géométriser" (à partir du formalisme hamiltonien classique) la mécanique quantique.

6.4.4. Si les applications de la T.C. sont triviales c'est que nous disposons déjà, *de par la langue*, d'un moyen qui les fait apparaître telles. Or cela ne va quand même pas de soi qu'un formalisme issu de la dynamique puisse ainsi rencontrer le tout venant de la langue !

Si donc les applications sont en général élémentaires, il n'en va pas de même des *implications* (qui, comme je l'ai dit (1.3.3.) sont structurales-sémiotiques). (1)

Il y a à ce propos une certaine dénégation chez Lévy-Leblond. Il admet en effet qu'en physique "les mathématiques ne s'appliquent pas, elles s'impliquent. Elles n'interviennent pas comme outil de l'analyse théorique, mais comme sa substance même. Le rapport des mathématiques à la physique n'est pas instrumental, traduisant une intervention extérieure, aussi précise et adéquate soit-elle.

La théorie physique est produite par sa mathématisation même : il n'existe pas de concept physique qui ne soit mathématiquement formulé ... Les mathématiques entretiennent ainsi avec la physique un rapport, non de simple *application*, mais de *constitution*. - voire un véritable "rapport de production". Dans les autres sciences, par contre, les mathématiques n'interviennent pour l'essentiel que de l'extérieur..." Lévy-Leblond admet alors que cela "n'exclut pas que d'autres disciplines, sciences humaines en particulier, se (re)-fondent à leur tour sur une semblable constitutivité mathématique." Mais c'est pour ajouter aussitôt :

---

(1) J'ai abordé cette question dans mon séminaire 75-76 : *Implications sémiotiques de la T.C.*

"Il n'y a pourtant là nulle exigence épistémologique, nul destin historique". Il est évident qu'un "destin" ne relève pas de la nécessité, mais de *l'après-coup*. Or il y a d'ores et déjà un après-coup non négligeable de la T.C. Car enfin, que Thom s'est-il donc proposé d'autre que de *constituer* mathématiquement non pas l'être-physique, mais l'être-structure ? Certes la T.C. n'a réussi jusqu'ici à formaliser que des structures (narratives/ syntaxiques) élémentaires et semble donc rencontrer d'emblée sa limite. Mais après tout le fait que la mécanique newtonienne ait buté d'emblée sur le problème à trois corps n'a pas empêché sa prétention universalisante et sa constitution comme telle. Cela n'a pas non plus empêché que cette constitution devienne destin historique avec Kant.

6.4.5. La question est donc la suivante. La T.C. tente de constituer mathématiquement la structure (2.3.). Ainsi que je l'ai dit (2.5.1.), son horizon est celui d'une esthétique transcendantale de la structure. *Ce faisant elle implique la géométrie dans la langue.*
Qu'est-ce d'autre la géométrisation du concept (2.4.) ? Elle l'implique *dans la langue et non pas dans les sciences* (humaines ou autres) avec lesquelles elle ne peut entretenir qu'un rapport externe assez trivial d'application. *Et ce que l'on appelle le platonisme de Thom (son idéalisme et son réalisme) n'est que l'hypothèse que cette implication est un véritable rapport de production.*
Je prendrai donc *à la lettre* l'affirmation de Lévy-Leblond qu' " il est difficile d'y voir autre chose qu'une *représentation*", pour répondre *qu'on ne peut qu'y voir autre chose.*
En tant que phénoménologie (2.2.1.) la T.C. procède à une εποχη pour constituer un *regard. Si elle est auto-référentielle* (6.3.2.), *c'est que pour elle il n'y a pas de métalangage*. J'aimerais même soutenir la thèse que *sa métalangue s'identifie à sa monstration.* Ce qui n'est jamais qu'une autre façon de dire la *production* géométrique de la langue.
On pourrait dire aussi qu'en métaphorisant l'a-logon (métonymique) de la discontinuité la T.C. a introduit des modèles qui sont aux modèles que nous connaissons ce que sont les *performatifs* aux verbes d'assertion.

7. Dans sa réponse à Lévy-Leblond (1), Thom revient sur deux points essentiel:

7.1. Sur le rapport entre mathématiques et langage.
"Une mathématisation du langage naturel de nature qualitative n'aura évidemment d'intérêt que si par cette mathématisation on peut accéder à des assertions que la logique inhérente à l'emploi du langage ordinaire ne permet pas d'obtenir. Ceci suppose d'abord :
a) Qu'on puisse mathématiser toutes les démarches déductives (rigoureuses) du langage naturel (réaliser le rêve leibnizien de la Caractéristique Universelle);
b) Que cette mathématisation permette d'aller au-delà.
(...) Seule, je crois, une analyse approfondie (et comparée) des structures de la grammaire et de la biologie permettra d'imaginer cette extension dont pour le moment nous n'avons aucune idée".

7.2. Sur la notion *causale* de discontinuité.
"Dans les emplois considérés jusqu'ici, la discontinuité apparaît comme un accident local, une sorte d'épiphénomène plaqué sur un processus continu sous-jacent, et qui n'affecte pas son évolution (cas des caustiques) ou très peu (cas des ondes de choc). Aussi y-a-t-il peu d'intérêt à essayer de développer une théorie"autonome" des discontinuités, puisqu'elles sont de toute manière fournies par le modèle quantitatif du processus continu sous-jacent.
Il en va autrement lorsque les discontinuités ont elles-mêmes un caractère causal, un pouvoir effecteur non négligeable." (2)

7.3. C'est sur ces deux points que porte le fond du débat. La dite "crise" des sciences est due à la conjonction de leur pouvoir indéfini d'arraisonnement et de leur oubli systématique de leur sens (cet oubli n'étant pas une péripétie mais une donnée *constitutive* pour autant que l'objectivité elle-même n'en est qu'un effet (cf. 1.2.5.)). La question n'est donc pas tant celle de "la dynamique historique des critères d'intelligibilité théoriques, aussi bien que de compréhension intuitive", que celle de la connivence de ces critères avec le processus capitaliste généralisé de décodage (pour reprendre un terme de Deleuze) réduisant à une peau de chagrin les structures de l'échange symbolique (3). Or cette forclusion progressive du symbolique n'est pas un épiphénomène anthropologique, historique et sociologique. Elle est

(1) Thom [5]

(2) Je souligne.

(3) Cf. par exemple *L'échange symbolique et la mort* de Baudrillard.

l'effet du rabattement de la vérité en général sur le statut qu'elle a en science et à la manipulation de ce rabattement à des fins de contrôle et d'assujettissement. Or si l'on analyse la structure théorique de la physique fondamentale dans son statut privilégié de paradigme l'on constate que si les entités explicatives y sont constitutivement mathématiques c'est parce qu'elles sont toutes d'une manière ou d'une autre mathématiquement *dérivées* de la structure de l'espace-temps. C'est la dialectique entre cette constitution et l'expérimentation qui *produit* la physique comme procession de théories falsifiables. Or il est clair que les autres sciences (descriptives et expérimentales) sont globalement étrangères à cette dialectique. Elles ne peuvent donc se plier au paradigme physique qu'en prenant des effets pour des causes. Elles sont *disjointes* de leur vérité et ne font de la rigueur un dogme qu'à la mesure de l'asservissement pragmatique qu'elles projettent. C'est à partir de cette *disjonction* que le capitalisme développe son processus généralisé de décodage quitte à en réguler localement l'aspect thanatocratique.

7.4. En réponse à cette situation plusieurs attitudes sont possibles. On peut maîtriser la forclusion du symbolique d'une façon de plus en plus stricte, faire jouer d'une façon de plus en plus normative l'impératif d'un certain type de savoir opérationnel tout en en contestant les effets de domination et l'appropriation par divers groupes cratiques. On peut dénier à la science sa vérité, démasquer son semblant, forcer à l'hyperstase des pratiques signifiantes du sujet, ou réactiver divers suppléments d'âme.

Mais on peut aussi s'interroger sur les limites du paradigme et se demander si dans sa constitution rétroactive de la réalité, il n'a pas systématiquement (et nécessairement) scotomisé un pan de réel. Or un certain recul permet de constater que tel est bien le cas et que les sciences ont originairement scotomisé la métonymie du rapport primaire entre morphologies et langage. En annulant eidétiquement les morphologies (et donc la discontinuité *comme cause*), nous pouvons pratiquer les sciences exactes. En annulant leur complicité phénoménologique originaire au langage, nous pouvons penser le langage comme organe, le connecter à des langages et des organes artificiels et l'user comme vecteur normatif de communication.

Comme résultat de cette opération, le jeu μορφη / λογος se trouve réduit à un reste, reste incontrôlable et diffus, à une nébuleuse sémiotique partout présente mais partout déniée.

7.5. On peut alors se demander quel *effet de vérité* surgirait si cette nébuleuse sémiotique se trouvait soudain concentrée sur une problématique précise et fondée. On se trouverait en présence de l'émergence d'une posture théorique nouvelle qui ne pourrait que transformer radicalement le paysage conceptuel.

C'est une telle focalisation qu'a réussie la T.C.. En *réduisant* la métonymie éparse μορφη / λογος à la notion *primitive* de discontinuité (cf. 2.2.) dont *elle formalise le caractère causal et le pouvoir effecteur universel*, elle la transforme d'épiphénomène en principe constituant du réel.

L'enjeu est donc bien *stratégique*. Car à partir de cet acquis principal, on peut espérer déplacer de façon notable et sur un front original les contradictions du contexte théorique contemporain.

Math. Sci. hum. (15^{e}année, n°59, *1977*, p.27-38)

II

INTERVIEW DE RENE THOM

J.P. La nouvelle jonction entre mathématiques et réel que propose la théorie des catastrophes repose sur la notion centrale, à la fois sémantique et mathématique, de discontinuité. Pourquoi la discontinuité est-elle si structurante ? Quelle obstruction y a-t-il eu à la penser ? A propos du principe de raison leibnizien, Heidegger parle de "temps d'incubation". A quoi attribuez-vous le temps d'incubation de la prise en charge théorique du discontinu ?

R.T. Je pense que la notion de discontinuité a toujours existé même dans les théories les plus continuistes.

J.P. Oui, mais pas comme principe structurant.

R.T. Si, également comme principe structurant. Considérez la mécanique classique. Sa notion fondamentale est celle de point matériel. Or il est difficile de nier qu'un point matériel dans l'espace vide ne soit quelque chose comme une discontinuité. Non, je pense que la différence essentielle entre la théorie des catastrophes et les théories mécaniques et physiques classiques vient du fait que celles-ci sont parties de discontinuités qu'elles ont hypostasiées en des entités permanentes, admises une fois pour toutes. Autrement dit, elles ont oublié la discontinuité originaire pour disserter dessus.

J.P. Pensez-vous que la théorie des catastrophes soit la première conception unifiée des deux types fondamentaux mais hétérogènes de mouvement que sont d'une part les processus morphogénétiques - la naissance et la corruption chez Aristote - et d'autre part les mouvements de déplacement ?

R.T. Ce qui étonne dans les théories classiques, c'est qu'on y a tout réduit au mouvement. Or le mouvement présente cette particularité qu'il laisse intactes les formes. La flèche de Zénon d'Elée est toujours la même flèche. Ce mouvement répond à une exigence de réversibilité. On veut créer un univers sémantique valable pour tous les observateurs, en particulier pour le propre passé d'un même observateur. Un observateur doit pouvoir dialoguer avec son passé, avec sa mémoire. Ceci suppose une communauté de langage.

J.P. Bref, pour vous, ce qui semble être l'objectivité même, l'espace-temps, est aussi une production historique et sociale ?

R.T. Oh ! Je n'irai pas jusque là. Certes dans une large mesure cet espace-temps fixiste répond à une nécessité sociologique, mais c'est une nécessité universelle et dans ce sens elle échappe au relativisme culturel. Les propositions scientifiques doivent s'inscrire dans un langage commun, valable, si j'ose dire, pour toute l'éternité. Ceci exige une référence à l'espace-temps.

J.P. Mais il ne va pas de soi que cet espace-temps, cadre universel de la communication des observateurs, soit aussi une structure mathématique.

R.T. Non, ça ne va pas de soi. Et le miracle de la physique est justement dû au fait qu'on ait mis en évidence sur cet espace-temps ces moyens de comparaison entre observateurs que sont le groupe galiléen ou le groupe lorentzien ...

J.P. Je reviens à la réversibilité. En physique, où les processus élémentaires sont réversibles, l'irréversibilité se pense au niveau thermodynamique. Or vos modèles ne se situent pas à ce niveau. On peut les faire régresser jusqu'à un niveau strictement élémentaire et pourtant ils dépendent constitutivement d'une irréversibilité que vous introduisez au départ. Cela revient-il à repenser la thermodynamique ?

R.T. En un certain sens oui. Le but idéal de la théorie des catastrophes, c'est de remplacer la thermodynamique par la géométrie.

J.P. Quels sont la nécessité et le statut de cette substitution ?

R.T. Le deuxième principe ne nous dit quelque chose que sur les systèmes clos, ce qui laisse de côté pratiquement tous les cas intéressants. Et même pour les systèmes clos, il ne précise pas la manière dont les choses se passent localement.

J.P. Il y a quand même des gens comme Prigogine qui étudient les systèmes ouverts.

R.T. Oui, mais ce que dit Prigogine revient tout simplement à ceci. Si je considère un système clos en équilibre thermodynamique son entropie a une valeur maximum. Si j'ouvre un peu le système, ce maximum va subsister du fait de sa stabilité structurelle. L'ensemble des positions que le système peut atteindre de cette manière, c'est ce que Prigogine appelle la branche thermodynamique. Or dès que l'on sort par bifurcation de cette branche thermodynamique , on entre dans un domaine hors de portée des considérations thermodynamiques standard ...

J.P. Une autre question. Dans les modèles catastrophiques, les dynamiques internes sont surdéterminées par rapport aux morphologies locales qu'elles engendrent dans les espaces externes. Plusieurs modèles seront donc en général compatibles avec une morphologie observée. Quels sont dès lors les critères de choix ?

R.T. Il y a là un problème très réel. On peut utiliser un critère d'économie conceptuelle. On peut au contraire utiliser des critères qui rattachent la configuration étudiée aux configurations qui lui sont voisines dans le champ expérimental que l'on considère. Personnellement je préfère la seconde approche à la première car je crois que le grand intérêt de la théorie des catastrophes est précisément de fournir un algorithme qui permet dans certains cas d'expliciter des concepts que d'un point de vue réductionniste on considérerait comme purement verbaux. C'est de permettre d'établir des correspondances entre morphologies et d'expliquer les ordres à longue portée.

J.P. Pouvez-vous préciser cette notion d'ordre à longue portée ?

R.T. Comme je le disais tout à l'heure, le fondement ultime de l'objectivité scientifique est la référence spatio-temporelle. Une fois qu'elle s'est donné une morphologie spatio-temporelle la science cherche à en donner une théorie. Or qu'est-ce qu'une théorie ? J'aime à dire que c'est une réduction de l'arbitraire de la description. On me répond que cette définition n'est pas scientifique puisque les explications magiques ou mystiques réduisent aussi l'arbitraire de la description. Mais cette objection vaut en fait pour toute explication fondée sur des concepts car le concept est trans-spatial. Autrement dit, dès que l'on fait usage d'une explication conceptuelle, on ne sait pas si cette explication est scientifique ou idéologique. Le seul moyen d'échapper à cette difficulté est le formalisme justement parce que le formalisme utilise des méthodes d'engendrement de formes qui sont purement spatiales. La seule manière d'éliminer les concepts, c'est de les spatialiser, c'est-à-dire de les plonger comme formes géométriques dans un espace sémantique approprié.

J.P. Mais comment pouvez-vous spatialiser les concepts puisqu'il n'existe aucune probation possible de leur spatialité ? Il me semble que dans votre démarche le sens est maintenu, que c'est par le biais d'un sens que vous projetez sur les modèles géométriques que vous faites de ces modèles des modèles de concepts.

R.T. Prenons un exemple si vous le voulez bien. Considérez la phrase "Le rouge est une couleur". Pouvez-vous considérer cette phrase comme scientifique ? Probablement pas parce que nous ne sommes pas certains qu'il existe dans toutes les langues du monde un équivalent de l'adjectif français "rouge".

J.P. Kant vous dirait qu'il s'agit d'un jugement analytique et par là-même universel.

R.T. Oui, mais il n'empêche qu'une proposition scientifique doit pouvoir être traduite dans toutes les langues du monde. Si vous acceptez la thèse de Whorf selon laquelle votre vision du monde est déterminée par des invariants structurels de la langue dans laquelle elle s'exprime, aucune science n'est possible...
Revenons aux impressions de couleur . Leur champ est découpé selon les langues en un certain nombre de domaines. Ces domaines ne sont pas invariants par traduction d'une langue dans une autre. Mais l'espace tridimensionnel des impressions de couleur, lui, est un invariant physiologique de notre structure. Vous voyez sur cet exemple que les espaces sémantiques ont des chances d'être plus profondément invariants que les concepts eux-mêmes. Et je serais tenté de dire que de ce point de vue, le sens n'est pas un donné. Il est évidemment donné heuristiquement, mais il apparaît comme lié à la position géométrique des concepts dans les espaces sémantiques.

J.P. Il y a quelque chose qui me choque un peu. En identifiant le sens d'un concept au système de catastrophes qui régulent son domaine, vous géométrisez l'acquis initial du structuralisme ni plus, ni moins. Mais en même temps en remplaçant ce qui, dans une langue, décrit les impressions de couleur, un spectre discret qui n'est en rien transculturel, par un espace sémantique tridimensionnel vous faites de la psychologie, de la psychologie au sens le plus positiviste du terme. Or la théorie des catastrophes ne se propose quand même pas de réduire le concept et le sens à des invariants externes !

R.T. Bien sûr que non. Le postulat sous-jacent à la théorie des catastrophes, du moins à ses emplois sémantiques, est que les concepts s'organisent en champs sémantiques et que ces champs proviennent de l'espace de base, de l'espace représentatif comme disent les psychologues, par un processus d'exfoliations successives. Ces exfoliations engendrant les espaces sémantiques sont, je pense, des invariants de notre nature.

J.P. Mais ces espaces sont-ils des espaces au sens standard ?

R.T. Oui. Ce sont des espaces banaux. Et alors ! Le grand problème est celui des structures mathématiques qu'ils peuvent porter. L'espace-temps de la physique a la propriété mirobolante qu'il existe un groupe de Lie qui opère dessus. Les espaces sémantiques ont vraisemblablement une structure infiniment plus pauvre. Peut-être un point marqué, des dilatations, peut-être une structure topologique invariante. Topologique ou même différentiable. Evidemment je serais incapable de justifier ce postulat. C'est un préjugé de spécialiste ...

J.P. Je reviens au structuralisme. La théorie des catastrophes est la première à répondre à la question de base "Qu'est-ce qu'une taxinomie ?". Elle y répond en géométrisant la notion d'écart différentiel. Quel rapport faites-vous entre cette topologisation de la différence et ce que vous venez de dire sur les espaces sémantiques ?

R.T. Eh bien l'exemple du champ des impressions de couleur montre clairement qu'on ne peut pas se contenter d'interpoler entre les écarts différentiels. Vous ne reconstituerez pas l'espace tridimensionnel des impressions de couleur à partir de l'arc-en-ciel. Autrement dit si vous appliquiez au spectre discret des couleurs la construction standard de la sémiotique vous devriez aboutir à un espace de dimension cinq ou six qui serait redondant.

J.P. Quel rapport faites-vous entre l'espace physique et sa sémantisation naturelle par des écarts du type devant/derrière, haut/bas, droite/gauche.

R.T. Entre l'espace physique et l'espace représentatif de la psychologie, il y a une différence fondamentale. Dans l'espace représentatif il existe un domaine inaccessible qui est celui du corps, cette singularité essentielle qui le structure et qui se trouve effacée dans l'espace physique.

J.P. C'est peut-être pour cela que cet espace est celui de la communication absolue.

R.T. D'ailleurs si l'on accepte mes idées sur la prédation on verra que ce n'est pas un hasard si une des notions fondamentales de la géométrie est celle de vecteur. Il n'y a aucun doute que l'origine d'un vecteur symbolise la position du corps et l'extrémité celle de l'autre réalisation du sujet qu'est la proie. Au fond l'espace géométrique c'est l'espace de toutes les positions possibles de la proie. Et ce qui caractérise le corps c'est précisément qu'on n'y accède pas. Il y a cette cloison, cette onde de choc épouvantable qu'est la peau. C'est là le domaine tabou. Toutes les interactions qui se heurtent à la peau changent automatiquement de caractère : de géométriques elles deviennent affectives. Le grand mérite, peut-être aussi le grand tort, des mathématiques c'est d'avoir comblé le trou du corps par de l'espace vide ...

J.P. Corps qui fait retour dans la théorie des catastrophes ?

R.T. Une de mes idées favorites est qu'en passant de la géométrie euclidienne à la géométrie cartésienne on retourne à l'anthropomorphisme. Dans la géométrie cartésienne l'origine c'est la stylisation du corps et les axes sont comme de grandes machoires qui servent à appréhender tous les points.

J.P. C'est un repère ...

R.T. Oui. Or la géométrie est sans repères. Elle abolit le corps...

J.P. La théorie des catastrophes est au sens strict une phénoménologie. Elle contemple l'apparaître et le définit comme système de discontinuités. Mais la notion d'apparaître n'est pas une notion objective. Quelle position de sujet se trouve donc impliquée dans votre réduction du phénomène à sa morphologie ?

R.T. Il s'agit d'une question difficile, la question ontologique ...

J.P. Oui, et je vous la pose en rapport avec cette critique que l'on vous fait souvent d'idéalisme, critique que vous prenez à votre compte en disant : "oui, je suis platonicien". Je sais qu'être platonicien, c'est être réaliste, mais j'aimerais que vous précisiez votre position. Pour vous les morphologies observables reproduisent des morphologies idéelles...

R.T. Idéelles, oui ...

J.P. Et par là-même réelles.

R.T. Exactement.

J.P. En quoi ce réalisme diffère-t-il de l'idéalisme scientifique qui transfère la réalité des phénomènes sur leur expression mathématique ?

R.T. Je ne crois pas que dans la démarche classique l'on considère que l'expression mathématique soit fondamentalement plus réelle que les principes. La question c'est que le maximum de réalité y est déjà atteint au départ, dans les principes. Quant à l'ontologie, je pense qu'il est illusoire de vouloir lui tourner le dos. Il y a une motivation ultime de la science, c'est la recherche de la vérité, de quelque manière qu'on le pose. Un conventionnalisme à la Poincaré se justifiait à une époque où l'on pensait que la science était essentiellement quantitative. On pouvait alors se borner à dire "il n'y a de scientifique que les recettes qui marchent"...

J.P. A propos de principes, quelle est la fonction de ceux de votre théorie ?

R.T. Un mécanicien anglais disait que la théorie des catastrophes est "a body of ideas", un corps d'idées.J'irai même plus loin et je dirai un état d'esprit. La théorie des catastrophes est un état d'esprit, une manière de voir les choses qui repose sur des principes. Mais sa méthodologie reste quand même assez classique. Perrin disait, je crois, "Le but de la physique est de remplacer du visible compliqué par de l'invisible simple". La théorie des catastrophes fait la même chose. Elle se donne au départ une morphologie empirique et elle essaie en introduisant des coordonnées supplémentaires, des paramètres cachés, de construire dans un espace produit du visible par l'invisible des entités simples qui par projection réalisent cette morphologie. La méthode n'est réellement nouvelle que parce que les sciences de la nature sont hypnotisées par le réductionnisme. On veut tout le temps reconstruire les structures complexes par agrégation d'éléments. Or la théorie des catastrophes montre que cette procédure est illusoire dans l'immense majorité des cas.

J.P. La limite du réductionnisme est son incapacité à donner un statut réel à la notion de niveau ?

R.T. Oui. Et je crois justement que ce sont les algorithmes de la théorie des catastrophes qui pourront justifier cette notion.

J.P. Quel rapport faites-vous entre l'opposition élément/agrégat et l'opposition local/global ? En quoi la notion de singularité y est-elle cruciale ?

R.T. Il y a une raison très simple qui justifie l'importance de la notion de singularité. C'est l'un des deux outils dont dispose le mathématicien pour passer du local au global. Or toute déduction exige un passage du local au global. Ces deux outils vont d'ailleurs en sens inverse. Le premier,qui va du local au global, est celui du prolongement analytique. Et il ne faut pas se dissimuler que toutes les méthodes existantes de prédiction quantitative reposent en dernière analyse sur lui. Le second outil, qui va du global au local est précisément celui des singularités. Dans une singularité on concentre en un point un être global que l'on peut reconstituer par déploiement ou désingularisation.

J.P. Il y a là un renversement de connotations sémantiques. La singularité devient le bon objet après avoir été traditionnellement (sauf chez Leibniz) le mauvais objet. Pour vous ce sont les singularités qui structurent les phénomènes.

R.T. Oui. Les singularités sont pour moi le squelette du phénomène. Quand un processus n'est pas chaotique, il présente en général des singularités observables c'est-à-dire devient catastrophique le long d'un lieu singulier. Les singularités sont le support rêvé de toute catastrophe.

J.P. Pourquoi privilégiez-vous les singularités d'applications différentiables plutôt que celles analytiques ou algébriques ? Est-ce pour vous libérer de la contrainte déterministe du prolongement analytique ?

R.T. Exactement. Je me refuse à croire que l'univers soit a priori déterminé.

J.P. L'analyse des singularités vous a permis de définir des modèles morphologiques locaux indépendants dans une certaine mesure de la biochimie des substrats. A quelle stratégie correspond pour vous cette indépendance ?

R.T. Prenons l'exemple de l'embryologie. Vous savez que les embryons des vertébrés ont une structure à trois feuillets ectoderme, mésoderme, endoderme et que j'ai proposé d'identifier cette structure à trois feuillets à la structure ternaire de la phrase transitive sujet - verbe - objet Cette idée a été considérée par les biologistes comme du romantisme délirant. Eh bien ! une telle identification a néanmoins pas mal d'avantages. D'abord elle fournit un cadre conceptuel unifiant un très grand nombre de phénomènes de l'embryogénèse. Ensuite, quand on la pousse un peu plus loin et qu'on définit des interactions fines entre éléments, elle permet d'interpréter les paramètres qui interviennent dans l'organogénèse. La neurulation, par exemple, c'est déjà en quelque sorte l'extraction à partir du monde extérieur d'une entité qui va réaliser d'une part le Moi et d'autre part la proie c'est-à-dire l'objet extérieur. Dans la distinction entre l'épiderme et le système nerveux, il y a déjà une sous-ramification entre l'objet extérieur physique et l'objet extérieur consubstantiel au sujet.

J.P. Une telle hypothèse n'est pas falsifiable. Il faut donc, pour être admise, qu'elle devienne évidente.

R.T. Oui. Il faut qu'elle devienne évidente.

J.P. Quels pourraient être les critères d'une telle évidence pour autant qu'elle ne se réduit pas à une simple croyance ?

R.T. Entre le prédateur et la proie, il y a l'espace, il y a des organes qui spatialisent l'organisme. C'est là qu'intervient précisément le mésoderme, comme un moyen de spatialiser l'organisme. D'abord avec les os, ensuite avec les muscles. Ce qui est curieux c'est que ces organes ont au départ une localisation axiale dans l'embryogénèse des vertébrés. Le mésoderme latéral a une signification plus organique. Il réalise le transfert à l'organisme de l'énergie intérieure.

J.P. Vous introduisez donc l'idée finaliste que le déplacement spatial s'involue en quelque sorte dans le métabolisme cellulaire.

R.T. Oui. Si je n'avais crainte d'employer un terme un peu vague, je dirais volontiers que le développement de l'embryon est une dialectique.
Au départ il y a une unité, celle de l'oeuf. Cette unité se scinde en deux sous-unités correspondant au couple proie/prédateur et dont la synthèse exige un troisième terme qui sera le mésoderme. Ensuite cette dialectique se subdivise et se ramifie.

J.P. Je reviens à la phrase transitive. Un des apports les plus spectaculaires de la théorie des catastrophes est de fournir des universaux syntaxiques. Vous pensez que ceux-ci simulent les conflits de domaines actantiels réalisables dans l'espace-temps. Comment expliquez-vous qu'au cours de la phylogénèse le champ perceptif visuel se soit exfolié de façon à transcrire en structures syntaxiques ces conflits de régime.

R.T. Cela n'est pas si mystérieux. Il me semble clair que l'espace représentatif doit, au moins au voisinage de l'organisme, être une copie extrêmement fidèle de l'espace externe. Tout animal doit nécessairement résoudre à chaque instant des problèmes de mécanique et il les résoud avec une rapidité et une précision que beaucoup d'ordinateurs pourraient lui envier. Très certainement l'animal dispose dans le voisinage de son organisme d'une carte locale qu'il peut détacher et projeter sur ce pseudo-organisme qu'est la proie. Mais si on accepte alors cette idée qu'il y a dans le psychisme un système simulateur de l'espace ambiant, il n'y a pas tellement de problème à justifier théoriquement le fait que les catastrophes élémentaires qui sont les situations de conflit spatio-temporel les plus typiques puissent se réaliser isomorphiquement, en tant que configurations qualitatives, sur l'espace des qualités psychiques. Cà vous paraît mystérieux ?

J.P. Oui. Cela n'explique en rien l'émergence de la syntaxe en tant que système symbolique.

R.T. Là se pose effectivement un problème assez aigu. Il est clair que les structures syntaxiques sont maintenant automatisées. Elles ne font plus appel à une vision sous-jacente. Cette vision sous-jacente a, je pense, existé, puis elle s'est ritualisée, automatisée ...

J.P. Votre hypothèse est donc que les actions archétypales comme capturer, prendre, couper, lier etc. sont devenues par ritualisation les matrices de toutes les structures syntaxiques.

R.T. Oui. Elles ont capturé les structures plus complexes. La meilleure preuve c'est qu'il n'existe pas de verbes de valence supérieure à quatre. C'est la règle des phases de Gibbs.

J.P. C'est donc par ce concept de simulation par la syntaxe des interactions actantielles élémentaires stables que vous justifieriez le fait qu'un verbe de valence supérieure à quatre soit absolument irreprésentable. Mais si vous mettez en structure profonde des stemmas à la Tesnière, comment rendez-vous compte du niveau où le générativisme et le transformationnisme chomskiens sont opératoires ? Il me semble que le formalisme catastrophique n'est plus du tout adapté.

R.T. Bien sûr. Il s'agit du problème des automatismes du langage dont je parlais tout à l'heure. Le sens y intervient au sens strict d'une morphologie à longue portée. J'ai développé à ce propos une idée que l'on peut présenter intuitivement de la façon suivante. Le verbe réaliserait une interaction entre actants fictifs. Tout verbe traîne avec lui des actants fictifs, les places syntaxiques, qui ont une existence effective en tant que quantum d'énergie neurophysiologique, d'un soliton se propageant dans les neurones.

J.P. D'un ?

R.T. D'un soliton. Vous ne savez pas ce que c'est qu'un soliton ? Une onde solitaire. Quand on veut émettre une phrase simple comme "Le chat mange la souris", on commence, à mon avis, par émettre le verbe qui est l'élément syntactiquement le plus léger. On bloque le mécanisme qui le stabilisait et qui en faisait une sorte de gyroscope, une sorte de toupie dont la révolution décrivait à chaque période le processus de capture entre actants fictifs. Quand on bloque l'énergie de cet oscillateur, on détruit l'interaction et on libère les actants fictifs qui sont attirés, par la continuité du lien qui unit la figure du verbe à celle des actants, vers l'image mentale des actants considérés. Chemin faisant les actants subissent une dissociation de type déictique et émettent des articles, des démonstratifs etc.

J.P. Les actants fictifs sont indiscernables ?

R.T. Ils sont indiscernables et même permutables.

J.P. Pensez-vous qu'entre l'identité des représentations qui vont occuper ces places syntaxiques et la façon dont celles-ci sont organisées par le verbe, il puisse y avoir conflit ?

R.T. Il y a certainement conflit. Mais il ne faut pas croire que l'actant fictif va acquérir une représentation. Il faut plutôt voir la chose sur le mode d'une reproduction sexuelle. L'actant fictif est un quantum d'excitation attiré par un concept qu'il excite, qu'il féconde si vous voulez. Le concept émet alors un gamète qui est le mot, le mot comme champ moteur. Autrement dit il est nécessaire de passer par la mort du verbe pour énoncer le substantif. Quand on annihile l'énergie de cet oscillateur un cycle évanouissant est capturé par un bassin d'attraction et cette capture, c'est l'émission du verbe en tant que mot.

J.P. Le verbe en tant qu'oscillateur correspondrait-il à l'infinitif ?

R.T. C'est çà. Le verbe en tant que marque pure c'est l'infinitif .

J.P. Mais votre description n'explique pas le rapport qu'il y a entre modélisation dynamique et générativisme.

R.T. Le problème est celui de l'itération. Il est visiblement fondamental pour beaucoup de morphologies, même naturelles. Or une théorie de l'itération sort nécessairement du cadre de la théorie des catastrophes élémentaires. Mais si l'on considère des catastrophes généralisées l'itération s'en va à l'infini, ce qui est beaucoup trop fort pour les besoins de la pratique. Une bonne théorie des structures linguistiques obligera à considérer des processus itératifs de portée réduite. Le grand problème c'est qu'il faut réaliser une confusion des variables internes et des variables externes de façon à ce qu'à la fin du processus apparaisse sur l'espace externe la même dynamique que celle qu'il y avait au départ sur l'espace pertinent des variables internes.

J.P. Que pensez-vous de l'itération arithmétique ?

R.T. Je serais assez tenté de penser qu'à priori l'infini dénombrable est un concept illégitime.

J.P. Mais non l'infini continu.

R.T. Mais non l'infini continu. On peut précisément légitimer l'infini dénombrable dans la mesure où on peut le plonger naturellement dans l'infini continu. C'est d'ailleurs à mon avis cela l'interprétation vraiment philosophique du paradoxe de Zénon d'Elée. Achille finit par rattraper la tortue. Nous pouvons donc subsumer dans un laps de temps fini et, si j'ose dire, dans une vision globale synthétique une infinité dénombrable d'opérations.

J.P. Vous parlez souvent du primat ontologique du continu par rapport au discret ...

R.T. Les gens qui disent que le discret est plus important que le continu, oublient toujours que les entités discrètes sont découpées dans un milieu continu. C'est dans ce sens qu'il y a un primat ontologique du continu. Mais on peut voir les choses autrement.
Nous pouvons imaginer une conscience vide, une conscience réduite à une pure représentation de l'espace vide. Il existe des expériences de ce genre. Lors d'états dépressifs, on vide l'univers de tout son contenu pour ne plus conserver qu'un cadre morne et non structuré.

J.P. C'est ce que disait Hölderlin ...

R.T. De ce point de vue cet espace vide, non structuré, perd jusqu'à la structure d'espace métrique. C'est la référence à cet état qui me fait croire au primat du continu sur le discret. Les gens qui croient au discret pur sont obnubilés par l'écriture, par l'événement discret symbolisé par une lettre ...

J.P. J'aimerais justement vous poser une question à propos de la lettre. La condition de possibilité de la logique, c'est au fond la machine à écrire. Le principe d'identité a-t-il pour vous un sens autrement que pour cette identité à soi de la lettre que l'on peut itérer sans conséquences ? Pensez-vous que le principe d'identité soit conceptuellement légitime ?

R.T. Le problème ne s'est pas encore posé dans le cadre de la théorie des catastrophes car il n'y a pas de procédure canonique pour représenter les concepts. La procédure à laquelle je pense consiste à représenter un être par un puits de potentiel quadratique. Mais comme tous les puits de potentiel se valent, il n'y a plus qu'un seul être. Ce serait un peu rudimentaire comme principe d'identité. De toute façon, les schémas syntaxiques de la théorie des catastrophes jettent une grande suspicion sur la valeur du principe d'identité en tant que moyen d'organiser le réel. On a cru faire un grand progrès avec Boole. Et effectivement on a fait un progrès quant à la rigueur de la déduction puisque celle-ci devient une combinatoire. Mais d'un autre côté on a perdu ce qui faisait, si j'ose dire, la force interne du concept.

Math. Sci. hum. (15^{e}année, n°59, *1977*, p.39-79)

III

FILAGE D'UN EXEMPLE

1.1. Quelle situation générale nomme-t-on depuis Thom du nom de catastrophe ? Il y a catastrophe si la situation préalable suivante est réalisable.

i) On se donne un "système" S (ou un processus).

ii) On se donne un "contrôle" c'est-à-dire un espace Ω de paramètres de contrôle.

S_ω représente le système S pour la valeur donnée ω du contrôle.

iii) On suppose que S_ω est susceptible d'un certain nombre d'états et qu'il existe une instance d'optimisation sélectionnant un état actuel X_ω (les autres états possibles Y_ω, Z_ω etc. demeurant virtuels).

iv) On suppose que les états varient "continûment" (1) avec ω.

1.2. Si nous cheminons dans l'espace de contrôle Ω à partir d'une valeur initiale ω_o pour laquelle l'état actuel est X_{ω_o}, il peut se produire le phénomène suivant: ω variant de façon "continue" il peut arriver que pour une valeur "critique" ω_c du contrôle, l'état X_{ω_c} ne soit plus l'état sélectionné par l'instance d'optimisation associée au système. A la traversée de ω_c , S va donc passer avec solution de continuité de l'état actuel X_ω à un autre état actuel Y_ω. C'est ce changement brusque dans l'état du système que l'on appelle une *catastrophe*. On dit que le système subit une catastrophe pour la valeur ω_c, ou encore que ω_c est une valeur catastrophique du contrôle.

L'on voit que cette situation est très générale et qu'elle ne manifeste qu'une dialectique somme toute évidente entre continuité (du contrôle) et discontinuité (des états).

1.3.1. Mais cette évidence même occulte le problème réel. Car quelle est la *cause* d'une catastrophe ? Sa cause, *c'est la compétition entre les états*. C'est parce que l'état actuel est en compétition avec d'autres états

(1) Continûment est pris ici dans un sens intuitif. Il s'agit en général d'une variation différentiable.

(virtuels)qu'il peut y avoir catastrophe.
Considérons le sous-ensemble $K \subset \Omega$ des valeurs catastrophiques ω_c du contrôle. Nous appellerons K *l'ensemble catastrophique* du système (ou du processus). Supposons que K ait une forme aisément représentable (disons qu'on puisse le dessiner). On pourrait penser a priori que K va séparer Ω en domaines Ω_X, Ω_Y, Ω_Z ... correspondant aux domaines de prévalence des états possibles X,Y,Z ... du système. (Ω_X, Ω_Y, Ω_Z ... seraient les composantes connexes de Ω - K).
S'il était possible de représenter chaque état par un point dans un certain espace de description, le système serait représentable de façon très simple.

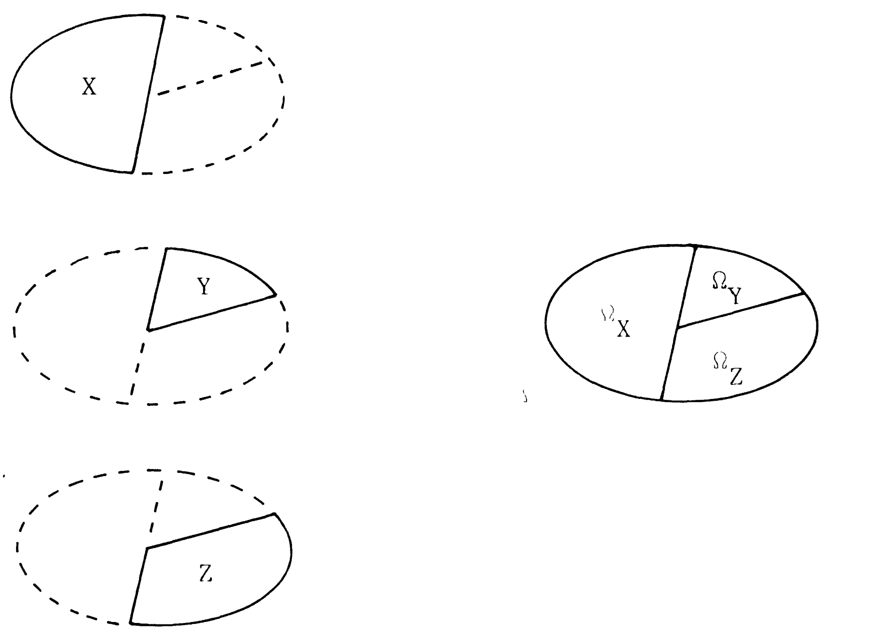


fig.1

En *discrétisant* cette représentation, on pourrait alors dire que, tel un automate fini, le système est susceptible d'un nombre fini d'états *ayant une identité propre* et qu'il répond à un contrôle discret (input) suivant une loi de transition (exprimant l'effet de l'instance d'optimisation).
1.3.2. Mais il se trouve que pour beaucoup de systèmes la situation *n'est pas discrétisable* .
Considérons par exemple les états thermodynamiques que sont les phases d'un corps pur [1]. On sait que dans l'espace de contrôle des variables intensives T et P (température et pression) la courbe K de coexistence liquide / gaz *se termine au point critique* et qu'il est possible en contournant ce point critique de passer "continûment" (sans transition de phase) d'une phase à une autre. Si l'on représente une phase par un point de coordonnées V,T,P, la surface Σ des états aura la forme suivante :

---

(1) Je traiterai cette question dans un prochain numéro.

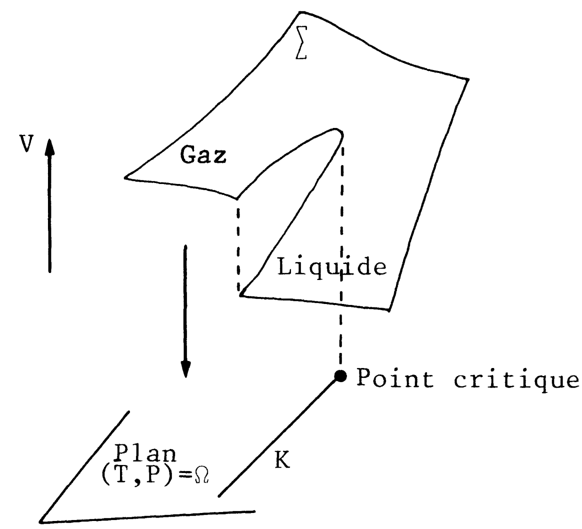


fig. 2

Ω - K n'ayant qu'une seule composante connexe, la situation n'est pas discrétisable ce qui signifie *que les états liquide/gaz n'ont pas d'identité propre et qu'ils se déterminent réciproquement par un effet de seuil.* (1) Dans une situation de cet ordre, deux stratégies sont possibles. D'une part la stratégie réductionniste, ici celle de la thermodynamique statistique. D'autre part la stratégie structurale (catastrophique) qui se propose de rendre raison de la morphologie observée à partir de principes généraux transcendant l'être-physique (microscopique) du substrat, comme, par exemple, le principe de compétition des états. Il est clair que cette seconde stratégie ne va en aucun cas de soi et qu'elle ne peut devenir plausible qu'à travers une élaboration théorique.
Pour approcher cet ombilicage de l'observable à une raison géométrique, nous allons développer un exemple élémentaire dû à Zeeman. (2)

* *

2.1. Il s'agit d'un exemple tiré de la théorie de l'élasticité, celui du flambage d'une lame métallique. (3)
Chacun sait que si l'on maintient une lame métallique (ou une carte à jouer) entre le pouce et l'index en exerçant une pression latérale assez forte pour qu'elle soit par exemple dans un état convexe, une pression verticale croissante exercée sur elle la fait à un certain moment passer catastrophiquement à un état concave.

---

(1) On reconnaitra ici le principe de la différence structurale.

(2) Zeeman [2].

(3) Les exemples de flambage sont intéressants car ce sont les exemples les plus intuitifs de catastrophes au sens rigoureux du terme. Dans son remarquable ouvrage sur l'élasticité, le mécanicien anglais Thompson a d'ailleurs anticipé les catastrophes élémentaires.

Le système considéré est donc le suivant [1] :

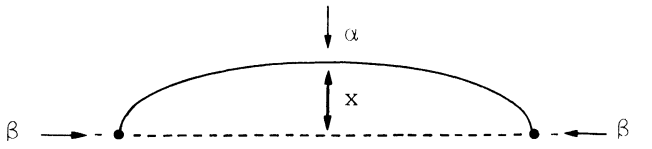


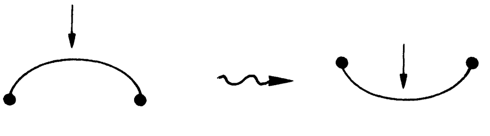
fig. 3

Le contrôle est constitué par les deux forces α et β (contrôle de dimension 2); l'état est caractérisé par la valeur algébrique de x comptée à partir de l'état horizontal (non courbé) de la lame ; l'instance d'optimisation est le principe de minimisation de l'énergie interne c'est-à-dire élastique (on néglige l'action de la pesanteur).

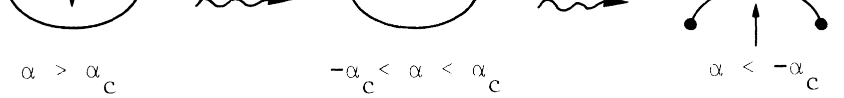
Il est alors facile de vérifier que la *phénoménologie* du processus est essentiellement décrite par les propriétés suivantes.

2.1.1. Pour une faible valeur de β, une variation continue de α transforme l'état de façon continue (chemin 1 de la figure 4).

2.1.2. Pour une valeur de β supérieure à une valeur critique β_o , si l'on part d'un état convexe, pour une valeur de α inférieure à une valeur critique α_c l'état varie continûment, mais il subit un saut catastrophique convexe –> concave à la traversée de α_c (chemin 2).



2.1.3. Si l'on repart de cet état concave en faisant décroître α, il ne se passe rien à la traversée de α_c. Ce n'est que pour la valeur $-\alpha_c$ (force appliquée en sens inverse) que l'état bifurque (chemin 3).

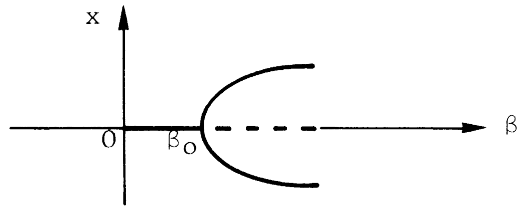


Ce phénomène est dit d'*hystérésis*.

---

(1) En fait pour que ce qui suit soit rigoureux, il faudrait que l'état de la lame (sa forme) soit bien décrit par la variable x. Cela sera le cas si on remplace la lame par deux tiges rigides articulées et reliées par un ressort. (3.7.)

2.1.4. Si, la force α étant nulle, on fait croître β, à la traversée de la valeur critique β_o, l'état horizontal ($x = o$) devient *instable* et la lame bifurque vers un état convexe ou concave de façon imprévisible (chemins 4 et 5). Ce phénomène est dit de *divergence*.



Le lecteur se convaincra facilement que la phénoménologie du processus (son être qualitatif) est entièrement subsumée par la morphologie de la surface Σ des états, surface qu'il connaît sans doute puisqu'elle a pris valeur d'emblème, et qu'on appelle la surface *fronce*.

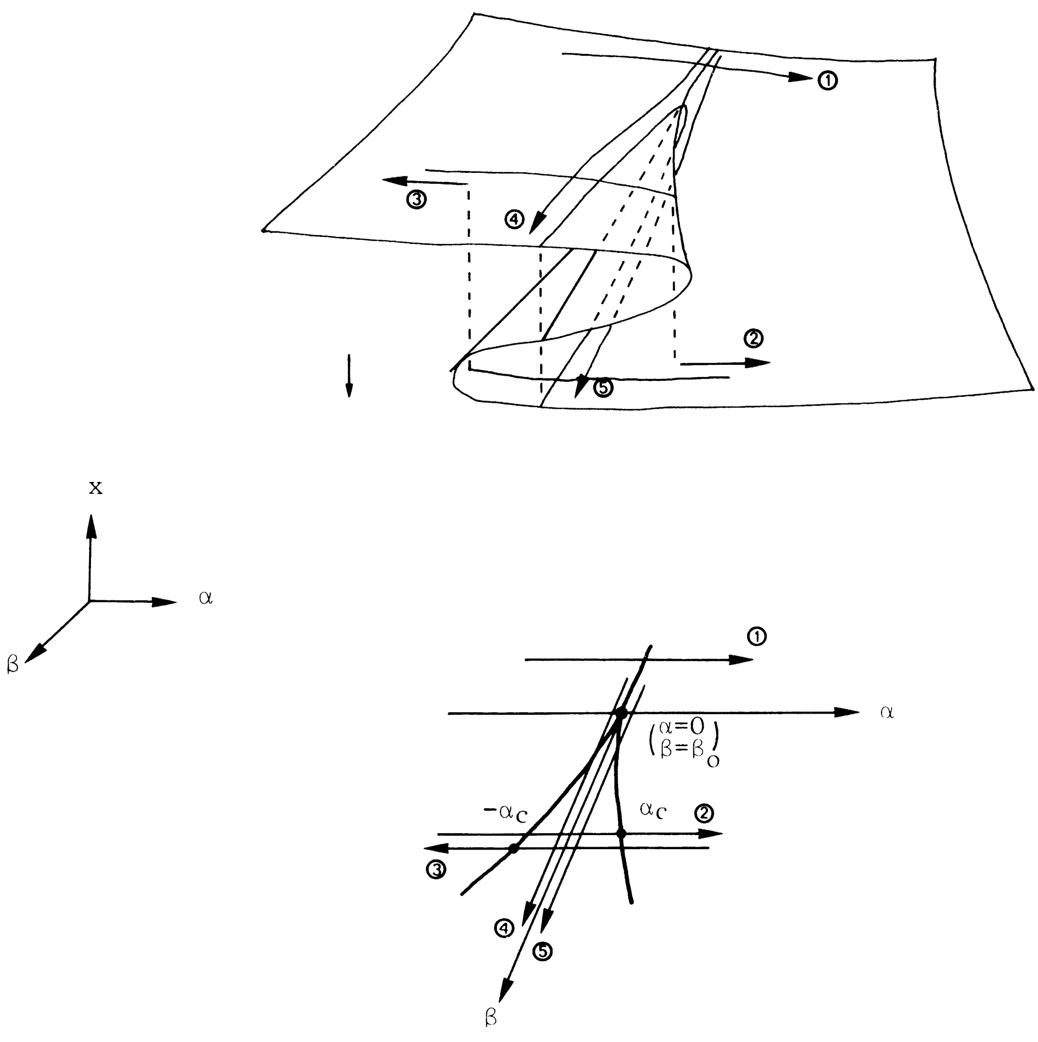


fig. 4

Mais il ne s'agit encore que d'une simple représentation. D'où la question suivante. Comment cette phénoménologie peut-elle être *déduite* de principes généraux ? Comment peut-elle être formalisée *en tant que telle* (et non pas simplement comme "effet de surface" réductible à des processus plus "profonds" supposés plus réels) ? Comment restituer au réel l'apparaître ? Une réponse positive viendrait évidemment subvertir l'opposition apparaître superficiel/ être profond qui domine encore notre imaginaire scientifique. Or une réponse positive existe. C'est justement la T.C.

2.2. Soit $E(x,\alpha,\beta)$ la fonction énergie du système (de la lame) pour l'état x et la valeur (α,β) du contrôle. On la notera aussi $E_{\alpha,\beta}(x)$ (ou $E_{\omega}(x)$) pour distinguer le contrôle (espace externe) de la variable d'état (espace interne). D'après le principe de minimisation de l'énergie, un état n'est rien d'autre qu'un *minimum* de $E_{\alpha\beta}$.
La raison de la *bimodalisation* caractéristique de la fronce est alors la suivante.
2.2.1. Pour β assez faible ($\beta < \beta_o$), $E_{\alpha\beta}(x)$ est du type :

type I

fonction à un seul minimum. Il n'existe donc qu'un seul état possible (qu'une variation continue de α transforme de façon continue (2.1.1.).).
2.2.2. Si, à $\alpha = 0$, on augmente β, à la traversée de β_o, le minimum devient un maximum, *un seuil*, séparant deux nouveaux minima. Ces minima sont de *même* niveau et entrent donc en compétition. C'est le seuil qui est la raison de la bimodalisation (2.1.4.).

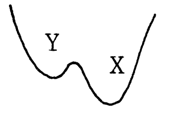
$\beta < \beta_o$ $\qquad\qquad$ $\beta > \beta_o$

Suivant la terminologie de Zeeman, on dira que β est le *facteur de splittage* (splitting factor) du phénomène.
2.2.3. Quant au paramètre α dit *facteur normal*, il a pour effet (lorsque $\beta > \beta_o$) de rendre inégaux les niveaux d'énergie des deux états en compétition.

$\alpha < 0$ $\qquad\qquad$ $\alpha > 0$

type II_a $\qquad\qquad$ type II_b

2.2.4. Supposons que nous partions d'une valeur (α,β) $(\alpha<0,\ \beta>\beta_o)$ du contrôle, l'état actuel X du système étant le minimum absolu de $E_{\alpha\beta}(x)$. L'autre minimum Y correspond donc à un état virtuel.



Faisons croître α à β constant. Pour $\alpha = 0$, le minimum Y est au même niveau que le minimum X et devient dominant pour $\alpha > 0$. Si l'on suppose que c'est toujours le minimum absolu de la fonction énergie qui correspond à l'état actuel, on dit que le système satisfait à la *convention de Maxwell*. Dans ce cas il n'y a pas d'hystérésis et l'ensemble catastrophique K_c du processus est composé d'une "strate" (le demi-axe des $\beta > \beta_o$) de points catastrophiques dits de conflit (égalité des niveaux des deux minima) (1.3.2.).

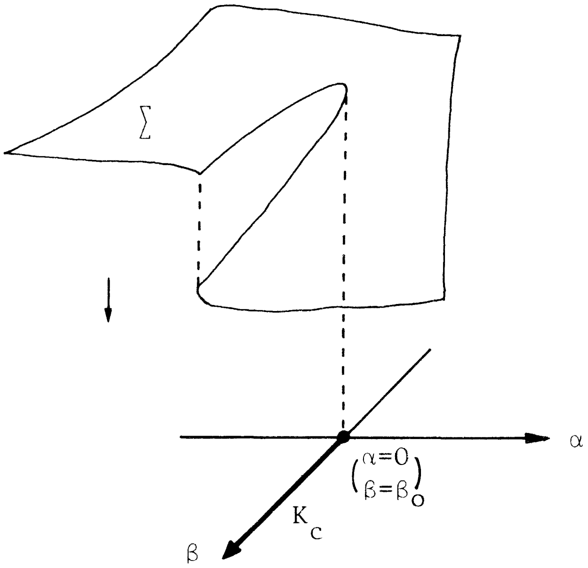


fig.5

Or l'expérience montre que ce n'est pas pour $\alpha = 0$ que le système subit une catastrophe (2.1.2.) et qu'il y a de l'hystérésis (2.1.3.). Cela signifie qu'il existe un certain *retard* (delay) et que ce n'est pas toujours le minimum absolu de l'énergie qui correspond à l'état actuel.
Ce retard fait que pour $\alpha > 0$ le système emmagasine de l'énergie élastique au fur et à mesure que X se rapproche du seuil. Lorsque l'écart au seuil devient inférieur à une valeur critique caractéristique, cette énergie se relaxe et le système subit un saut catastrophique.

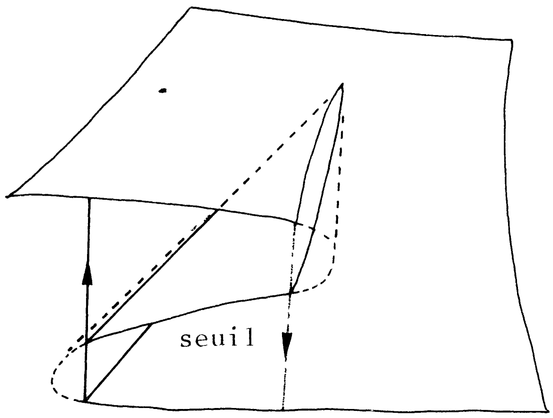
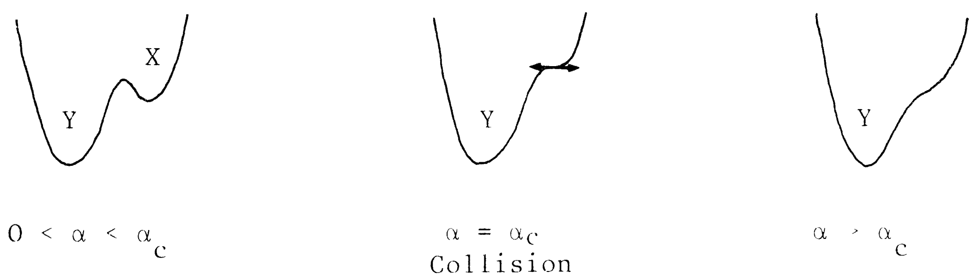


fig.6

La fronce correspond à l'hypothèse d'un *retard parfait* (perfect delay) : le minimum X représente l'état actuel *jusqu'à ce qu'il soit détruit par collision avec le maximum*. C'est alors *nécessairement* Y qui devient l'état actuel puisqu'il est le seul qui subsiste.



L'ensemble catastrophique K_b du processus est donc composé (outre du point $\alpha = 0$, $\beta = \beta_o$) de deux "strates" de points catastrophiques dits *de bifurcation* (collision du maximum avec un des minima). Cet ensemble K_b est une courbe du plan (α,β) admettant une singularité *cusp* (rebroussement de première espèce) au point $\alpha = 0$, $\beta = \beta_o$. C'est le *contour apparent*, pour la projection sur l'espace de contrôle Ω , de la surface Σ des états (2.4.2.).
L'ensemble catastrophique total $K = K_c \cup K_b$ *discrimine* donc les zones de l'espace de contrôle associées aux formes possibles de la fonction énergie $E_{\alpha\beta}$.

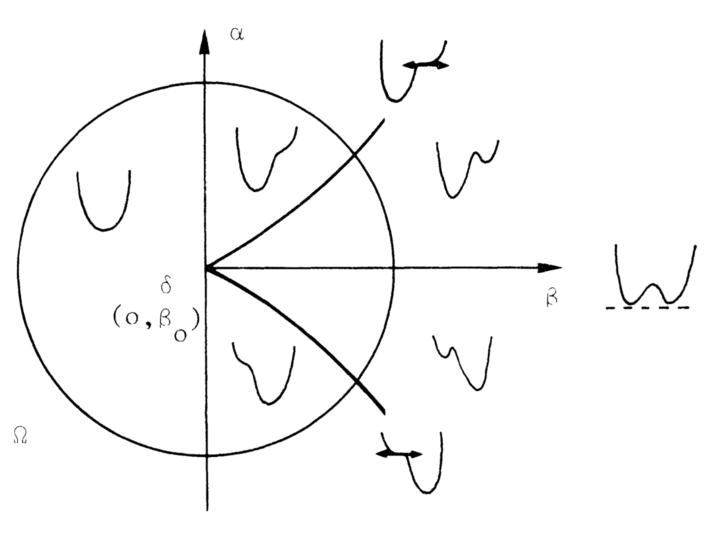


fig.7

2.3. *Géométrisation*

2.3.1. Nous avons supposé que α et β étaient assez faibles pour que nous restions dans le domaine d'élasticité de la lame. Cela signifie que nous avons travaillé *localement*, et dans un double sens.

2.3.1.1. Nous avons travaillé localement dans l'espace externe c'est-à-dire que nous n'avons considéré que des valeurs de α et de $\tilde{\beta} = \beta - \beta_o$ voisines de zéro. Nous avons restreint l'espace de contrôle Ω à un voisinage du point *le plus catastrophique* δ ($\alpha = 0$, $\tilde{\beta} = 0$). Il n'est pas besoin de définir rigoureusement ce voisinage puisque - comme le montre un simple coup d'oeil jeté à la figure 7 - l'ensemble catastrophique est *invariant* par changement de voisinage (il a *topologiquement* une structure conique invariante par homothétie).

2.3.1.2. Nous avons travaillé localement dans l'espace interne. L'énergie E_δ possède en zéro un minimum "aplati" (dégénéré (2.3.2.)). Nous n'avons considéré que l'évolution de ce minimum lorsque α et β varient dans un voisinage de δ.

2.3.2. Les points catastrophiques peuvent s'interpréter géométriquement si l'on suppose que la fonction énergie $E(x,\alpha,\beta)$ est *différentiable* (1) dans un voisinage du point $(0,0,\beta_o)$.

Les extrema d'une fonction $f(x)$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ droite réelle) sont en effet les points "à tangente horizontale" c'est-à-dire ceux pour lesquels la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ par rapport à x s'annule (2). Un tel point est dit *point critique* de la fonction. C'est soit un maximum, soit un minimum, soit une inflexion. Si x est un point critique de f, $f(x)$ s'appelle alors *valeur critique* de f.

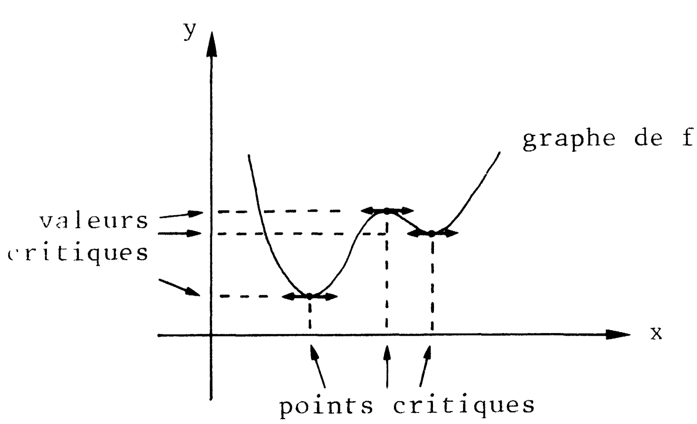


fig. 8

(1) On dit qu'une fonction réelle d'une (ou de plusieurs) variables réelles est différentiable, si elle admet des dérivées (partielles) de tous les ordres.

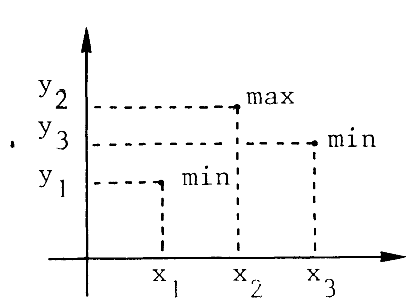
(2) Rappelons que $f'(x)$ s'interprète comme la pente de la tangente en $(x,f(x))$ au graphe de f.

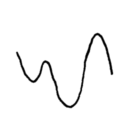
Les points critiques que nous avons recontrés avaient la propriété que la courbure de la courbe $E_{\alpha\beta}(x)$ (courbure décrite par la dérivée seconde $E''_{\alpha\beta}(x)$) ne changeait pas de signe lorsqu'on les traversait. D'une façon générale on dit qu'un point critique x de f est *non dégénéré* si $f''(x) \neq 0$. Nous avons vu en revanche que les points catastrophiques de bifurcation étaient ceux pour lesquels $E_{\alpha\beta}(x)$ possédait, outre un minimum non dégénéré, un point d'inflexion à tangente horizontale c'est-à-dire un point critique où la courbure change de signe et où donc la dérivée seconde s'annule. D'une façon générale on dit qu'un point critique x de f est *dégénéré* si $f''(x) = 0$. Cela signifie que la tangente horizontale en $(x, f(x))$ au graphe de f le coupe en plus de deux points confondus (en trois pour les points d'inflexion simple). Quant au point $x = 0$ de la fonction énergie E_δ c'est un point critique encore plus dégénéré qu'un point d'inflexion puisque non seulement $E''_\delta(0) = 0$, mais aussi $E'''_\delta(0) = 0$ (la tangente coupe le graphe de E_δ en quatre points confondus). Les points catastrophiques de bifurcation sont donc simplement ceux pour lesquels la fonction énergie possède un point critique dégénéré. Il n'en va pas de même des points catastrophiques de conflit qui ont une source radicalement différente à savoir l'égalité de certaines *valeurs* critiques.

2.3.3. L'on voit donc très bien comment l'on peut "géométriser" notre phénomène de flambage. Ce phénomène est décrit par une famille E_ω de fonctions (énergie) paramétrées par l'espace de contrôle Ω. *Supposons-les différentiables*. Définissons le *type qualitatif* d'une fonction différentiable f(x) par sa configuration critique (type minimum ou maximum des points critiques non dégénérés, degré de dégénérescence des points critiques dégénérés, égalités des valeurs critiques, ordre des points critiques, ordre des valeurs critiques). Par exemple les graphes

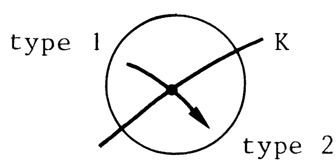
 et  ont même type

qualitatif associé à la configuration critique.

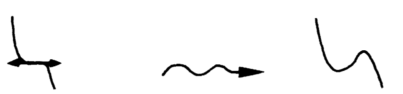


alors que les graphes  et 

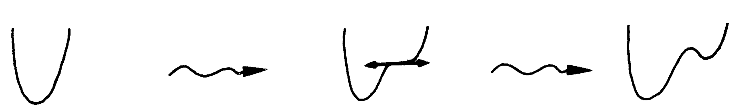
n'ont pas même type qualitatif. Cette notion de type qualitatif est ici *intuitive*. On peut la formaliser (3. et 4.2.).
Considérons alors une valeur *régulière* ω (non catastrophique) du contrôle. Dans un voisinage de ω, E_ω garde un type qualitatif *constant*. Les points catastrophiques ne sont donc rien d'autre que les valeurs du contrôle pour lesquelles E_ω *change* de type qualitatif. Cela signifie que dans *tout* voisinage d'un point catastrophique il existe des types qualitatifs différents. Comme dit Thom " il se passe quelque chose ". D'après le principe de continuité, pour passer d'un type qualitatif à un autre, il faut franchir un point catastrophique c'est-à-dire *traverser* K.



L'ensemble catastrophique K sépare donc dans Ω des zones associées aux types qualitatifs "réguliers" dont tous les points critiques sont non dégénérés et toutes les valeurs critiques distinctes.
Mais il y a plus. De même qu'un point d'inflexion peut engendrer par petite déformation un maximum et un minimum (non dégénérés)



, de même un minimum "aplati" comme celui de notre exemple (E_δ) peut engendrer par petite déformation un minimum non dégénéré et un point d'inflexion. Ce type "moins" dégénéré pourra à son tour engendrer un type "régulier":



Il existe donc entre les types qualitatifs une *hiérarchie*, une relation de préordre partiel, une relation d'incidence. On dira qu'un type T_1 est *incident* à un type T_2 ($T_1 > T_2$) si T_1 peut engendrer T_2 par petite déformation. Cette relation d'incidence se manifeste *géométriquement* de la façon suivante .
L'espace de contrôle Ω est *stratifié* c'est-à-dire qu'il est décomposé en strates associées aux types qualitatifs, une strate étant incidente à une autre si elle est de dimension inférieure et contenue dans sa fermeture topologique. (4.3.4.)

Dans notre exemple la stratification de Ω se compose :

. du point cusp δ : point critique dégénéré où $E''_\delta = E'''_\delta = 0$;

. des deux branches du cusp (strates de bifurcation) : un minimum non dégénéré et un point d'inflexion ;

. du demi-axe $\beta > \beta_o$ (strate de conflit) : un maximum, deux minima d'égale valeur ;

. des trois composantes connexes de Ω - K (strates régulières) : un maximum et deux minima d'inégales valeurs ou un seul minimum.

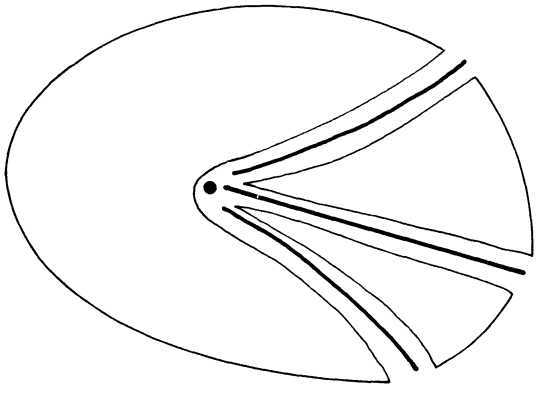


fig.9

2.3.4. Ce qui précède "montre" que les types E_ω associés aux valeurs catastrophiques du contrôle ne résistent pas aux petites déformations. On dit qu'ils sont *structurellement instables*. En revanche les types "réguliers" E_ω associés aux valeurs régulières du contrôle résistent aux petites déformations de ce contrôle. En fait on peut montrer qu'ils résistent à *toute* déformation assez petite. On dit qu'ils sont *structurellement stables*. L'ensemble catastrophique K peut donc d'interpréter comme une morphologie *qui classifie les types qualitatifs structurellement stables que l'on peut obtenir en déformant le type structurellement instable* E_δ.

2.3.5. L'intelligibilité phénoménologique que propose Thom pourrait dès lors se résumer ainsi.

2.3.5.1. La *raison structurante* du phénomène est le type structurellement instable E_δ qu'on appellera son centre organisateur.

2.3.5.2. L'espace de contrôle Ω est une base de déformation pour ce type instable.

2.3.5.3. Cette déformation agit sur le mode d'un *déploiement*.

2.3.5.4. Ce déploiement *exprime* une tendance - un Drang, pour reprendre un terme leibnizien - à la stabilisation.

2.3.5.5. C'est cette *expression* que *manifeste* le phénomène. Elle est dérivable de son être physique *mais ne s'y réduit pas*.

2.4. Nous pouvons maintenant esquisser la façon dont la T.C. *explique* notre phénomène.

La *donnée initiale* est le *champ* E_ω des fonctions énergie, définies dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine dans l'espace interne et un voisinage W de δ dans l'espace externe (2.3.1.). Ce champ qui "est" une application "différentiable" de W dans l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des fonctions différentiables $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ constitue ce que Thom appelle *un modèle statique*. On peut lui associer ce que l'on appelle un déploiement $\tilde{E}$ de la fibre singulière (ou spéciale) E_δ, déploiement défini par le diagramme *commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times W \arrow[rr, "\tilde{E}"] \arrow[dr, "\Pi=\Pi'\circ\tilde{E}"'] & & \mathbb{R} \times W \arrow[dl, "\Pi'"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (x,\omega) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (E_\omega(x),\omega) \arrow[dl] \\ & \omega & \end{tikzcd}$$

Même si nous ne connaissons pas la physique du phénomène, nous pouvons supposer a priori qu'elle conduit à la donnée d'un tel champ.

Nous introduisons alors un *principe, le principe de stabilité structurelle :* quelque chose ne peut exister que s'il est structurellement stable c'est-à-dire s'il résiste aux perturbations "infinitésimales" dues à son environnement. Ce principe est *physiquement évident*. Or nous allons voir qu'il *suffit* à dériver de la seule donnée initiale E_ω (inconnue) le comportement qualitatif que nous avons observé et décrit [(1)].

2.4.1. Traduisons d'abord le principe de stabilité structurelle par la propriété de stabilité structurelle du déploiement $\tilde{E}$ (cela suppose évidemment que l'on ait défini mathématiquement cette notion). Considérons le *lieu critique* $\Sigma \subset \mathcal{U} \times W$ de $\tilde{E}$, lieu des points (x,ω) tels que x soit point critique de E_ω. *Si $\tilde{E}$ est structurellement stable,* on peut montrer que Σ est une surface *régulière*. Cette surface d'équation $E'_\omega(x) = 0$ est la surface des états (surface fronce de notre exemple).

2.4.2. Considérons alors la restriction Π_Σ à Σ de la projection canonique

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{U} \times W &\to W \\ (x,\omega) &\mapsto \omega \end{aligned}$$

$\Pi_\Sigma : \Sigma \to W$ est une application différentiable *entre surfaces*. Comment décrire son type qualitatif ?

---

(1) Cf. un prochain numéro pour une explicitation des théorèmes utilisés.

Π_Σ étant différentiable possède une application linéaire tangente. En chaque point $\sigma = (x,\omega)$ de Σ il existe une application *linéaire* $T_\sigma\ \Pi_\Sigma$ du plan tangent $T_\sigma\ \Sigma$ à Σ en σ dans le plan tangent $T_\omega\ W$ à W en $\omega = \Pi(\sigma)$

$$T_\sigma\ \Pi_\Sigma : T_\sigma\ \Sigma \longrightarrow T_{\Pi(\sigma)}W$$

définie de la façon suivante : soit Θ un vecteur tangent à Σ en σ et Γ une courbe de Σ tangente en σ à Θ. $T_\sigma\ \Pi_\Sigma(\Theta)$ est le vecteur tangent en $\Pi(\sigma)$ à la courbe image $\Pi(\Gamma)$.

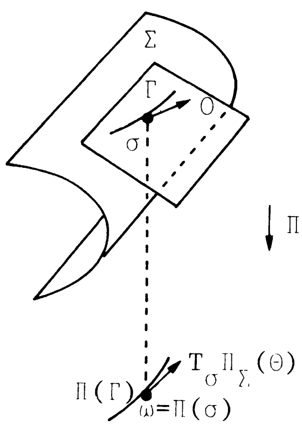


fig. 10

En termes de coordonnées $(x,\omega) = (x,\alpha,\beta)$, soit $\sigma = (x,\alpha,\beta)$. $\sigma \in \Sigma$ d'équation $E'_\omega(x) = 0$, ou $\frac{\partial E}{\partial x}(\sigma) = 0$.

Soit $\Theta = (u, \xi, \zeta)$. Θ satisfait à l'équation du plan tangent $T_\sigma\ \Sigma$:

$$(1) \qquad u\,\frac{\partial E'}{\partial x}(\sigma) + \xi\,\frac{\partial E'}{\partial \alpha}(\sigma) + \zeta\,\frac{\partial E'}{\partial \beta}(\sigma) = 0$$

et $\quad T_\sigma\ \Pi_\Sigma(\Theta) = (\xi, \zeta)$.

En général l'image de $T_\sigma\ \Sigma$ par $T_\sigma\ \Pi_\Sigma$ est $T_{\Pi(\sigma)}W$ tout entier ($T_\sigma\ \Pi_\Sigma$ est de rang 2 donc un isomorphisme linéaire et Π_Σ est un "isomorphisme" local entre (Σ,σ) et $(W,\Pi(\sigma))$). Il y a exception si $T_\sigma\ \Pi_\Sigma$ est de rang < 2 c'est-à-dire aux points σ où l'application linéaire tangente admet un *noyau*. Ces points sont les points critiques de l'application Π_Σ. Soit donc $C \subset \Sigma$ le lieu critique de Π_Σ et $\Pi(C)$ son image dans W.

Pour que $\sigma \in C$ (Ker $T_\sigma\ \Pi_\Sigma \neq 0$), il faut et il suffit qu'il existe un vecteur tangent Θ à Σ en σ qui soit *non nul* et qui se projette sur le vecteur nul c'est-à-dire qui soit "vertical".

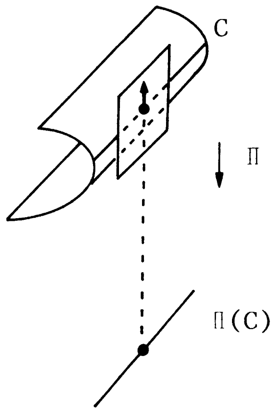


fig.11

Soit $\Theta = (u,\xi,\zeta) \in \mathrm{Ker}\, T_\sigma \Pi_\Sigma$, $\Theta \neq 0$. On a $u \neq 0$ et $\xi = \zeta = 0$. Et donc d'après (1)

$$u \frac{\partial E'}{\partial x}(\sigma) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial E'}{\partial x}(\sigma) = 0$$

Mais $\frac{\partial E'}{\partial x}(\sigma)$ est une autre notation pour $E''_\omega(x)$.

L'on voit donc que le lieu critique C de l'application Π_Σ est tout simplement le lieu des points (x,ω) tels que x soit point critique *dégénéré* de E_ω. L'ensemble catastrophique K_b n'est donc rien d'autre que $\Pi(C)$: K_b est le *contour apparent*, suivant la projection Π, de la surface des états Σ (2.2.4.).

2.4.3. Si maintenant $\tilde{E}$ est structurellement stable, on peut montrer que Π_Σ est une application *structurellement stable* entre surfaces et appliquer le *théorème fondamental* qui est dû à Whitney et qui est le cas le plus simple (et le précurseur) du *théorème de Thom sur la classification des catastrophes élémentaires :*

<u>*Théorème de Whitney*</u>. Soit $\Pi_\Sigma : \Sigma \longrightarrow W$ une application différentiable structurellement stable *entre surfaces*, alors :

i) le lieu critique C de Π_Σ est une courbe régulière de Σ ;

ii) son image $\Pi_\Sigma(C)$ est une courbe n'admettant comme seules singularités que des self-intersections et des cusps ;

iii) en un point critique $\sigma \in C$, Π_Σ est une catastrophe élémentaire soit de type pli, soit de type cusp.

(<u>Remarque</u> . En un point pli Π_Σ est localement du type décrit dans la figure 11. En un point cusp Π_Σ est localement de type fronce.)

Ce théorème est évidemment capital. Il montre que *sous l'hypothèse de stabilité structurelle, la dimension de l'espace de contrôle impose une limite si draconienne à la complexité morphologique locale qu'elle suffit à en classer les différents types.*

2.4.4. Nous pouvons donc maintenant fournir de notre phénomène de flambage une explication *autre* que l'explication mécaniste classique.

2.4.4.1. Le phénomène dépend *naturellement* de *deux* contrôles.

2.4.4.2. Il est *a priori* structurellement stable puisque réalisable.

2.4.4.3. Il est local.

2.4.4.4. Il est d'une complexité supérieure à celle de la catastrophe pli (il y a par exemple de l'hystérésis).

2.4.4.5. *Donc il est nécessairement de type cusp.*

On voit le déplacement radical de stratégie. Ce n'est pas analogiquement que le phénomène est de type cusp. *C'est parce que son être-physique ne peut que réaliser une solution physique aux contraintes générales de la stabilité structurelle.* Ces contraintes sont telles qu'une observation même grossière peut suffire à déduire la catastrophe, l'archétype, qui le structure et l'organise. Nous sommes ici en présence d'une stratégie qui met en jeu une *causalité structurale* (et non matérielle), qui restitue au réel l'apparaître que la physique disqualifie, qui donne un statut rigoureux à ce que Husserl appelait l'*anexact*, bref d'une stratégie qui a force d'explication en tant qu'*interprétation*. Elle n'est possible qu'à partir du *théorème* qui montre que la stabilité structurelle est, disons, un principe *morphogène*.

2.5. *Raison et réactivation*

Le principe de stabilité structurelle, est au sens strict, un *principe de raison*. De même que le principe leibnizien on peut le lire suivant une *double accentuation* (1).

La première accentuation a trait au développement et à la légitimation mathématique de la stratégie que je viens d'esquisser.

Mais la seconde (ontologique) a trait au rapport du logos à l'être. Comme le dit Thom : "Observons seulement que les formes subjectivement identifiables, les formes pourvues d'une dénomination, représentées dans le langage par un substantif, *sont nécessairement structurellement stables*." (2) En se situant ainsi au lieu d'une spécularité rationnelle entre l'existence et la nomination, la T.C. réactive (de façon apparemment sauvage) la plupart des noeuds critiques de l'ontologie (I. 4.2.5.1.). Reprenons en quelques-uns.

2.5.1. Restitution au réel de l'apparaître (position phénoménologique mais sans sujet transcendantal).

2.5.2. Redoublement par la langue de l'interprétation géométrique (adéquation langage-réalité mais sans sujet de la représentation).

2.5.3. Principe d'expression : les phénomènes manifestent des accidents archétypes qui sont les contours apparents de la dynamique interne qui "relève" leur opacité (position platonicienne).

---

(1) cf. M. Heidegger : Le principe de raison

(2) Thom [1] , p.31

2.5.4. Principe de l'engendrement et du maintien de la structure par le conflit (position héraclitéenne).
2.5.5. Principe du déploiement, Drang d'une complexité sans extension (position leibnizienne).
On voit donc se dessiner une posture ontologique qui - issue d'un nouvel imaginaire spatial - autorise de nouveaux parcours dans ce site du logocentrisme pensé et exhaussé jusqu'à l'exténuation de Platon à Husserl mais disqualifié par l'historicité critique de la philosophie elle-même. La question est alors de savoir si cette disqualification permet d'affirmer que la soi-disante ontologie de la T.C. n'est jamais qu'une idéologie camouflée.
Je ne le pense pas. Ainsi que je l'ai avancé (I. 4.2.5.3.) il me semble que doit s'instaurer entre les ontologies et la T.C. *un chiasme de légitimité*.(1)
Au moment où la philosophie, en se pensant elle-même non plus comme système mais comme pratique signifiante se disjoint de sa vérité pour écrire son excès, son désir et son manque, l'enfance de sa vérité lui revient de façon latérale par la géométrie qui a chu d'elle comme science.

* *

3.1. Il s'agit maintenant d'élucider la notion nodale de type qualitatif qui sert de point d'articulation entre l'interprétation phénoménologique et la description exacte.
Nous sommes partis d'une famille E_ω et nous avons introduit l'hypothèse de différentiabilité qui correspond à ce que l'on pourrait appeler une *hypothèse de consistance*. Cette hypothèse - qui revient à choisir *a priori* l'espace fonctionnel auquel appartiennent les fonctions énergie - ne va pas de soi.
Nous allons la problématiser à partir de l'opposition, souvent méconnue mais fondamentale, qui existe entre être-spatial et être-scriptural.
Considérons donc les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Du côté de l'être-scriptural nous trouvons les *polynômes* c'est-à-dire les fonctions f explicitement calculables à partir des opérations de l'algèbre (addition et multiplication).
L'algorithme qu'est un polynôme "épuise" l'être-spatial de sa courbe représentative. Soit $\mathbb{R}[x]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à une variable réelle.
A l'autre extrême, du côté de l'être-spatial, nous trouvons les fonctions f douées d'une certaine cohésion, d'une consistance minimale. Ce sont les fonctions continues. On sait qu'elles peuvent être assez curieuses et que la continuité n'est pas une notion intuitive. Soit $\mathcal{F}^\circ$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues. On a évidemment $\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathcal{F}^\circ$. Mais quel est le rapport exact

(1) C'est en ce sens que la T.C. est un *moment*.

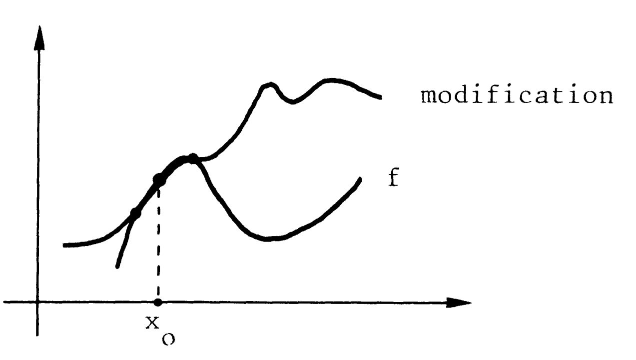
entre ces deux extrêmes ? Quelle progression y-a-t-il d'une consistance minimale à l'expression écrite, de ce qui se visualise à ce qui se calcule ? Cela ne va pas de soi.

3.2. Du côté de l'être-scriptural, ce qui généralise les polynômes sont d'abord les fonctions dites *entières* qui sont sommes de séries convergentes de rayon de convergence infini
(par exemple $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$). Soit $\mathcal{E}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions entières.
Du côté de l'être-spatial, ce qui spécialise les fonctions continues sont les fonctions différentiables. Soit $\mathcal{F}^r$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions r fois différentiables et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\infty$ celle des fonctions indéfiniment différentiables.
Nous obtenons ainsi une chaîne (infinie) d'extensions de $\mathbb{R}$-algèbres

$$\mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{F}^1 \hookrightarrow \mathcal{F}^\circ$$

dont le chaînon crucial est celui $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$.

3.3. En effet entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ il se produit une *rupture* fondamentale. Considérons un polynôme $f(x) = a_o + a_1 x + \dots + a_n x^n$.
On sait que l'on a $a_o = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, ..., $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Cela signifie que la connaissance de f et de ses dérivées en 0 c'est-à-dire la connaissance *locale* de f en 0, détermine ses coefficients et détermine donc f *globalement*. Il en va de même pour une fonction entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On montre en effet que pour tout n, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Une propriété adhérente à l'être-scriptural est que la connaissance locale de la fonction en un seul point suffit à la déterminer globalement.
Il est clair qu'il n'existe rien de tel pour les fonctions différentiables.
Si nous considérons une fonction $f \in \mathcal{F}$ et une valeur x_o, il est intuitivement évident que l'on peut la modifier en dehors d'un voisinage de x_o tout en maintenant la propriété de consistance qu'est la différentiabilité.



Pour une fonction différentiable, la détermination locale n'implique en rien la détermination globale.

Comment analyser dès lors cette scission entre local et global qui creuse l'écart entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$? Le concept clef est celui de *série de Taylor*.

3.4. Etant donnée $f \in \mathcal{F}$ on lui associe, pour chaque valeur x sa série de Taylor $T_{f(x)}$ définie par

$$T_{f(x)}(h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + h^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \ldots \quad \text{(série en h)}$$

Cette série n'a aucune raison d'être convergente.

C'est ce qu'on appelle une *série formelle,* c'est-à-dire la donnée d'une suite infinie $a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ de coefficients (pour $T_{f(x)}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$). On note $\mathbb{R}[[h]]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des séries formelles en la variable h.

3.4.1. Si l'on se fixe $f \in \mathcal{F}$ on peut donc lui associer, lorsque x varie, ce que l'on appelle son *champ taylorien :*

$$\begin{array}{rcl} T_f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}[[h]] \\ x & \longmapsto & T_{f(x)} \end{array}$$

$\mathbb{R}[[h]]$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension infinie et de base les monômes $1, h, \ldots, h^n, \ldots$ Les composantes de T_f suivant cette base sont (au facteur n! près) tout simplement les fonctions dérivées $f^{(n)}(x)$.

Dire que f est entière signifie que T_f est déterminé par sa valeur *en un point.*

3.4.2. Dualement, si on se fixe x, on obtient une application

$$\begin{array}{rcl} T_x : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}[[h]] \\ f & \longmapsto & T_{f(x)} \end{array}$$

Or on a à ce propos le théorème suivant.

Théorème de Borel. L'application $T_x : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}[[h]]$ est surjective.

Ce théorème ruine tout espoir d'une progression simple de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ et manifeste la rupture irrémédiable qui existe entre l'intuition géométrique d'une consistance et les ressources de l'écriture. En effet la série de Taylor $T_{f(x)}$ de f en x est la *meilleure* approximation de f localement en x par une série et donc par une écriture réglée. Si cette série est *non convergente* (ce qui est possible d'après le théorème de Borel) il y a *disjonction* entre écriture et représentabilité spatiale puisque qu'une série formelle non convergente est irreprésentable.

3.4.3. Outre donc la disjonction local/global qui sépare les fonctions différentiables des fonctions entières, il existe deux obstructions à la possibilité de représenter ne serait-ce que *localement* une fonction différentiable par sa série de Taylor.

i) Soit la série $T_{f(x)}$ est divergente.

ii) Soit elle est convergente mais représente une fonction différentiable g *différente* de f. Cela signifie que la fonction $f - g$ appartient au *noyau* de l'application $T_x : F \longrightarrow \mathbb{R}[[h]]$.

Une telle fonction est dite *plate* en x. L'exemple standard est celui de la fonction $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$ qui est plate à l'origine.

En effet l'exponentielle e^x tendant vers l'infini (lorsque x tend vers l'infini) plus vite que *toute* puissance de x, il est facile de vérifier que tous les coefficients $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ de la série de Taylor $T_{\varphi(0)}$ sont nuls et donc que cette série est identiquement nulle alors que φ n'est pas identiquement nulle dans un voisinage de l'origine. Bref, même si $T_{f(x)}$ est convergente elle ne représente localement f en x qu'à une fonction plate près.

3.4.4. Remarque 1. On voit donc qu'entre les fonctions entières et les fonctions différentiables il existe un intermédiaire naturel dialectisant en quelque sorte leur conflit. Ce sont les fonctions qui sont localement représentées en tout point par leur série de Taylor. On appelle ces fonctions *$\mathbb{R}$-analytiques*. Leur champ taylorien T_f peut *se factoriser* à travers la $\mathbb{R}$-algèbre (notée $\mathbb{R}\{h\}$) des séries convergentes :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "T_f"] \arrow[dr] & & \mathbb{R}[[h]] \\ & \mathbb{R}\{h\} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Remarque 2. Si au lieu de considérer des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on considère des fonctions *complexes* d'une variable complexe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ce qui précède perd toute valeur. On sait en effet (théorèmes de Cauchy-Riemann) que si une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fois *$\mathbb{C}$-dérivable* (et pas seulement $\mathbb{R}$-dérivable), elle est nécessairement indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, plus, représentée en tout point par sa série de Taylor ($\mathbb{C}$-analytique), plus, déterminée globalement par sa série de Taylor en un seul point ($\mathbb{C}$-entière). Une telle fonction est dite *holomorphe*. C'est l'analyse "géométrique" des fonctions holomorphes qui est à la base de la révolution conceptuelle accomplie par Riemann.

3.4.5. Nous allons voir que la notion de type qualitatif est la notion *naturelle* qui élucide et explicite le rapport entre une fonction différentiable et son champ taylorien (lorsque ce rapport n'est pas un simple rapport d'expression). Cette notion est donc tout autre chose que la formalisation d'une vague intuition. Elle participe éminemment à l'histoire du conflit géométrie/écriture. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que - naturelle, généalogique et opératoire - elle soutienne une nouvelle stratégie modélisatrice.

3.5.1. Nous avons dit (2.3.3.) que deux fonctions différentiables avaient même type qualitatif si elles avaient même "configuration critique". Comment préciser cette notion ? L'idée fondamentale est de *définir* la relation d'équivalence $f \sim g$, "f et g ont le même type qualitatif" à partir de la donnée *d'un groupe G de transformations de* $\mathbb{R}$.

Définition. Soit G un groupe de transformations de $\mathbb{R}$.
On dit que deux fonctions f et g sont G-équivalentes, ($f \underset{G}{\sim} g$ ou $f \sim g$ si la référence à G est évidente) si il existe des éléments φ et Ψ de G rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Psi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} g = \Psi \circ f \circ \varphi^{-1} \quad \text{ou} \\ g \circ \varphi = \Psi \circ f \end{array}$$

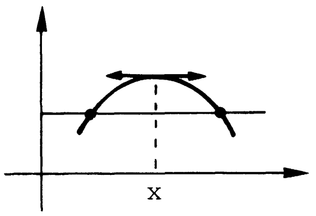
f et g sont donc G-équivalentes si il existe des transformations (changements de coordonnées) de la source et du but qui permettent de "résorber" leur différence.

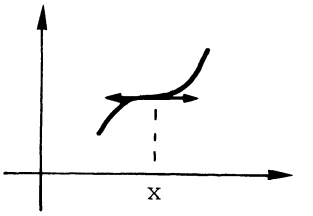
<u>Remarque</u>. Il est trivial de vérifier que G étant un *groupe*, $f \underset{G}{\sim} g$ est bien une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

. réflexivité : $Id_{\mathbb{R}} \in G$
. symétrie : si $\varphi \in G$ alors $\varphi^{-1} \in G$
. transitivité : si $\varphi, \varphi' \in G$ alors $\varphi \circ \varphi' \in G$.

3.5.2. Caractérisons le groupe G.
Prenons $\Psi = Id_{\mathbb{R}}$. Nous voulons que pour tout élément φ de G et toute fonction $f \in \mathcal{F}$, $f(x)$ et $g(x) = f(\varphi^{-1}(x))$ aient même configuration critique. Cela implique que φ^{-1} soit indéfiniment différentiable. Comme cela doit être valable pour tout $\varphi \in G$, cela l'est aussi pour φ^{-1} et donc $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$ doit être une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (une permutation de $\mathbb{R}$) différentiable ainsi que son inverse. On appelle *difféomorphismes* de $\mathbb{R}$ de telles bijections. Ce sont les automorphismes de sa structure différentiable. *Le groupe G sera donc le groupe des difféomorphismes de* $\mathbb{R}$. En effet.

3.5.2.1. Soit x un point critique de f, $f'(x) = 0$ (2.3.2.). $\varphi(x)$ est-il point critique de g ? Comme on a $g'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f'(x)$ on voit que la condition pour que x soit point critique de f si et seulement si $\varphi(x)$ est point critique de g est que $\varphi'(x) \neq 0$. Mais cette condition est toujours vérifiée pour un difféomorphisme. Considérons en effet un point x tel que $\varphi'(x) = 0$. En $(x,\varphi(x))$ soit le graphe de φ ne traverse pas sa tangente horizontale, soit il la traverse. Dans le premier cas il y aurait défaut de bijectivité dans le deuxième cas un défaut de différentiabilité pour l'inverse φ^{-1}.





3.5.2.2. x et $\varphi(x)$ sont-ils des points critiques de même type ? On a

$$f''(x) = g''(\varphi(x))\ (\varphi'(x))^2 + g'(\varphi(x))\ \varphi''(x)$$

et donc puisque $\varphi(x)$ est critique pour g $(g'(\varphi(x)) = 0)$

$$f''(x) = g''(\varphi(x))\ (\varphi'(x))^2.$$

On voit que x et $\varphi(x)$ sont de même type (minimum ou maximum) et que l'un n'est dégénéré que si l'autre l'est.

3.5.2.3. Supposons x dégénéré (et donc $\varphi(x)$).

On a $\quad f'''(x) = g'''(\varphi(x))(\varphi'(x))^3 + 3\ g''(\varphi(x))\ \varphi'(x)\ \varphi''(x) + g'(\varphi(x))\varphi'''(x)$

soit $\quad f'''(x) = g'''(\varphi(x))(\varphi'(x))^3$. etc.

Un difféomorphisme préserve le type et le degré de dégénérescence des points critiques. Il est clair d'autre part qu'il préserve la multiplicité des valeurs critiques. Si par exemple x_1 et x_2 ont même valeur, $f(x_1) = f(x_2)$, $g(\varphi(x_1)) = f(x_1) = f(x_2) = g(\varphi(x_2))$. Si $\varphi'>0$ *l'ordre* des points critiques est conservé. Si $\varphi'<0$, il est inversé. Un difféomorphisme peut inverser l'ordre des points critiques mais ne peut pas *croiser* deux points critiques et faire passer par exemple d'un ordre $x_1 < x_2 < x_3$ à un ordre $\varphi(x_2)<\varphi(x_1)<\varphi(x_3)$.

3.5.2.4. On se convaincra de même que la configuration critique de f est conservée si on la transforme suivant l'équivalence $g(x) = \Psi(f(x))$ où Ψ est un difféomorphisme. Ψ peut inverser l'ordre des valeurs critiques, mais il ne peut les croiser.

3.5.3. Nous pouvons donc présenter ainsi la notion de type qualitatif. Nous considérons des fonctions différentiables $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ c'est-à-dire des *transformations* (morphismes) de la structure différentiable de $\mathbb{R}$. Or dès que l'on envisage une structure il faut envisager son groupe d'automorphismes , groupe qui mesure en quelque sorte "l'indistinguabilité" de ses éléments. "L'homogénéité" phénoménologique de $\mathbb{R}$ est décrite par le groupe G de ses difféomorphismes. Il est donc naturel de dire que deux transformations sont indistinguables si leur différence peut être résorbée par l'action de G. Le type qualitatif, que nous pouvons maintenant appeler *le type différentiable*, définit *l'identité phénoménale* des fonctions. Cette identité est au fond *la seule réelle* puisque l'identité au sens strict exigerait une expression explicite des fonctions, ce qui, nous l'avons vu (3.4.), est en général *impossible*.

3.6.1. De la notion de type qualitatif, nous pouvons alors dériver la notion cruciale articulant consistance et écriture c'est-à-dire la structure locale d'une fonction différentiable à sa série de Taylor.

Localisons d'abord la procédure. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathbb{R}$. La structure locale de f en x est décrite par ce que l'on appelle le *germe* de f en x :

Définition. On appelle germe de f en x la classe d'équivalence de f pour la relation d'équivalence "f et g sont équivalentes si elles coïncident sur un voisinage de x".

Notons G la $\mathbb{R}$-algèbre des germes à l'origine (en $0 \in \mathbb{R}$) de fonctions différentiables. Nous dirons que deux germes γ et δ tels que $\gamma(0) = \delta(0)$ sont *équivalents* (qu'ils ont le même type différentiable) si il existe un germe en 0, μ, de difféomorphisme de $\mathbb{R}$ (μ est le germe en 0 d'un difféomorphisme φ tel que $\varphi(0) = 0$) et un germe en $\gamma(0) = \delta(0)$, ν, de difféomorphisme de $\mathbb{R}$ (ν est le germe en $\gamma(0) = \delta(0)$ d'un difféomorphisme Ψ tel que $\nu(\gamma(0)) = \gamma(0)$) tels que $\delta = \nu \circ \gamma \circ \mu^{-1}$.

La question est donc de comprendre le rapport entre un germe $\eta \in G$ et sa série de Taylor T_η définie par

$$T_\eta = f(0) + h\, f'(0) + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

où f est un représentant de η (cette définition de T_η ne dépend pas du représentant f choisi).

3.6.2. *Tronquons* cette série à l'ordre k :

$$j^k\eta = f(0) + h\, f'(0) + \dots + h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

s'appelle le *jet d'ordre k* de η. La suite $j^k\eta$ est la meilleure approximation possible de η par une suite de polynômes de degré croissant. Nous avons vu que cette suite ne "converge" pas en général vers η.

Mais rien n'interdit, même dans le cas de divergence, que η soit équivalent à l'un de ses jets.

Définition. On dit que η est *déterminé à l'ordre k* s'il est équivalent à son jet d'ordre k sans être équivalent à ses jets d'ordre inférieur.
Tous ses jets d'ordre supérieur à k lui sont alors équivalents et donc équivalents entre eux.
L'exemple le plus simple de détermination finie est fourni par le théorème disant qu'un point critique non dégénéré est soit un minimum, soit un maximum et qu'il existe un changement différentiable de coordonnées permettant de le mettre sous la forme h^2 (minimum) ou $-h^2$ (maximum). Ce theorème exprime que *h^2 est déterminé à l'ordre 2.*
Car soit x un point critique non dégénéré de f.
On a $\quad T_{f(x)} = f(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2} + \dots$

et donc, localement en x, f est équivalente à h^2 au signe de f"(x) près.
3.6.3. La notion de germe déterminé à un ordre fini est absolument décisive puisque c'est elle qui suture cette déhiscence de l'écriture que nous avons indiquée. Elle montre que cette déhiscence provient de ce qu'on avait reconduit de façon non critique à des objets n'ayant pas d'identité scripturale exacte mais seulement une identité phénoménale, le principe d'identité scripturale.
3.7.1. Revenons alors à l'exemple qui nous sert de fil directeur.
Remplaçons la lame par le dispositif suivant pour lequel la description qualitative que nous avons donnée devient rigoureuse (2.1. note (1)).

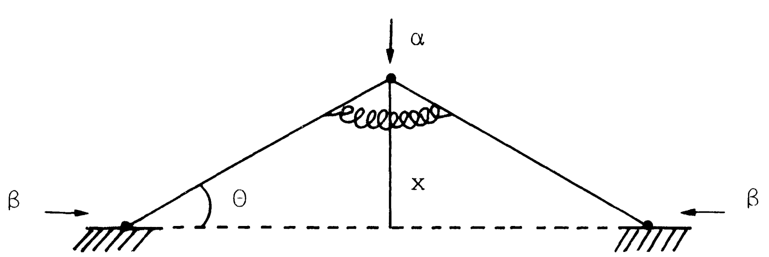


fig. 13

Il s'agit de deux tiges rigides (de longueur unité) articulées, maintenues dans l'état horizontal de référence par un ressort de module d'élasticité μ et dont les extrémités peuvent librement glisser sur un support.
Calculons l'énergie du système.
. D'abord l'énergie élastique E_1. Les lois de l'élasticité donnent $\frac{1}{2}\mu\ell^2$ où ℓ est la variation de la longueur du ressort par rapport à l'état de référence. Ici $\ell = 2\Theta$ et donc $\quad E_1 = \frac{1}{2}\mu(2\Theta)^2 = 2\mu\Theta^2$.

. Ensuite l'énergie potentielle E_2 due à la force α . $E_2 = \alpha \sin \Theta$.

. Enfin les forces latérales β fournissent un travail $E_3 \doteq 2\beta(1-\cos\Theta)$.
On a donc $E = 2\mu\Theta^2 + \alpha \sin\Theta - 2\beta(1-\cos\Theta)$, ou, en termes de la variable x,
$E = 2\mu(\text{Arc} \sin x)^2 + \alpha x - 2\beta(1-\sqrt{1-x^2})$.

Pour simplifier les calculs nous prendrons Θ comme variable d'état et utiliserons donc la première expression.

3.7.2. Nous disposons ainsi d'une expression *exacte* de l'énergie E fournie par la physique.

Considérons ses propriétés critiques au voisinage du point cusp

$x = 0,\ \alpha = 0,\ \tilde{\beta} = \beta - \beta_o = 0$

$E' = 4\ \mu\ \Theta + \alpha \cos \Theta - 2\ \beta \sin \Theta$

$E'=0$ est l'équation exacte de la surface fronce Σ des états.

Les points plis sont donnés par $E' = 0$ et

$E'' = 4\ \mu - \alpha \sin \Theta - 2\ \beta \cos \Theta = 0$

et le point cusp par $E' = E'' = 0$ et

$E''' = -\ \alpha \cos \Theta + 2\ \beta \sin \Theta = 0.$

De $E' = E''' = 0$ on tire $\Theta = 0$ et de $E'' = 0$, $\beta_0 = 2\ \mu$.

Considérons la série de Taylor de E à l'origine en fonction de α et $\tilde{\beta}$.

D'après les développements

$$\cos \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{\Theta^{2n}}{2n!} + \ldots$$

$$\sin \Theta = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{\Theta^{2n+1}}{\overline{2n+1}!} + \ldots$$

on trouve

$$E = \alpha\ \Theta - \tilde{\beta}\ \Theta^2 - \frac{\alpha}{6}\ \Theta^3 + \frac{2\mu+\tilde{\beta}}{12}\ \Theta^4 + g_5$$

où g_5 est une série commençant au degré 5.

On trouve donc pour l'expression de l'énergie singulière E_δ ($\alpha=0$, $\tilde{\beta}=0$), $E_\delta(\Theta) = \frac{\mu}{6}\ \Theta^4 + g_5$. On trouverait de même $E_\delta(x) = \frac{\mu}{6}\ x^4 + g_5$.

La singularité x^4 (ou $x^4/_4$) est le modèle canonique du cusp.

Son déploiement universel standard (de dimension deux) est donné par $f_{u,v}(x) = x^4/_4 + ux^2/_2 + vx$. Si on lui applique la stratégie esquissée en 2.4. on trouve comme surface des états la surface fronce d'équation $x^3 + ux + v = 0$ et pour ensemble catastrophique K_b la parabole semi-cubique d'équation $4\ u^3 + 27\ v^2 = 0$ (discriminant de l'équation du troisième degré). Ce modèle est un *modèle algébrique* de notre processus. On a en effet le théorème.

Théorème. Le germe x^4 est déterminé à l'ordre 4.

E_δ est donc de même type différentiable que x^4. Si nous pouvons alors montrer - ainsi que nous allons l'esquisser dans la section suivante - que tout déploiement structurellement stable de dimension deux d'une singularité équivalente à x^4 est *équivalent* au déploiement universel du cusp, nous aurons *expliqué structuralement* la phénoménologie observée: le processus déploie - nécessairement de façon structurellement stable -

la singularité E_δ sur un contrôle naturellement bidimensionnel. E_δ étant de type x^4, ce déploiement est nécessairement de type cusp.

3.7.3. L'on vérifie ainsi *la cohérence* de la stratégie. Partis de la phénoménologie nous avions appliqué le théorème de classification (2.4.3.) pour en déduire que le phénomène de flambage était régi par l'archétype cusp. Partant maintenant de l'expression *exacte* de l'énergie *et donc de la physique* nous retrouvons ce même résultat.

Avec la T.C., la notion de réalité devient bimodale.

On peut dire bien sûr que le phénomène est régi par des lois explicites "épuisant" sa réalité (3.7.1.), que l'élasticité est sa cause matérielle et que ce n'est qu'a posteriori qu'on montre qu'il est qualitativement de type cusp. Mais on peut tout aussi bien dire qu'il doit sa réalité à ce que son être-physique ne peut que réaliser une solution physique aux contraintes générales de la stabilité structurelle (2.4.4.), que le cusp est sa cause structurale ou formelle, bref que la physique fournit une écriture, mais que cette écriture n'est pas une cause. Avec la T.C. émerge une veine théorique (aristotélicienne ?) rendant indécidable (et donc caduc) le conflit structural/réductionniste (et idéaliste/matérialiste) qui a hanté la science. C'est pourquoi les querelles d'intention qu'on lui adresse sont en général idéologiques et non pertinentes. Nous vivons sur l'idée naïve que, pour être expliqué scientifiquement, un phénomène doit être formulé par des expressions scripturales explicites. Cela est souvent possible en physique parce que les équations différentielles imposent des contraintes d'analyticité (complexe) ou d'harmonicité (réelle). Comme le dit Thom ici même (II), "il ne faut pas se dissimuler que toutes les méthodes de prédiction quantitative reposent en dernière analyse sur le prolongement analytique". Or la plupart des phénomènes naturels ne sont certainement pas formalisables de cette manière.

Il est donc nécessaire de se déprendre de l'emprise imaginaire d'un certain type d'écriture.

Pour cela, la stratégie - naturelle, généalogique, opératoire - est celle de la T.C. qui déconstruit le rapport originaire de la physique à l'écriture. C'est pourquoi l'on ne saurait se satisfaire d'une disqualification de la T.C. qui s'autorise de l'apodicticité physique puisque cette apodicticité même repose en dernière instance sur la sédimentation en elle de ce rapport originaire.

*　　*

4. Nous allons dans cette section introduire la notion de *déploiement universel*. Cela nous conduira à approfondir l'imaginaire spatial de la T.C.

4.1.1. Et tout d'abord une généralisation. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des fonctions différentiables f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Or en général l'espace interne d'un système est multidimensionnel.

Nous supposerons que c'est une *variété différentiable* (1) M de dimension n. Les fonctions énergies E_ω seront des applications différentiables de M dans $\mathbb{R}$.

Nous considérons donc comme objet de base l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des applications différentiables f : M $\longrightarrow \mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-vectoriel de dimension infinie et il existe en général plusieurs topologies en faisant un espace vectoriel topologique : la topologie de la convergence simple, celle de la convergence uniforme, celle de la convergence en moyenne quadratique si M supporte une mesure etc. Je renvoie à n'importe quel cours d'analyse. La topologie privilégiée pour ce qui nous intéresse ici est la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de toutes leurs dérivées.

4.1.2. Une question préjudicielle se pose alors aussitôt. A partir de quel imaginaire spatial, de quel paradigme géométrique a-t-on *visé* ces espaces fonctionnels ? Eh bien on peut dire (de façon très grossière et donc très insuffisante) qu'on les a essentiellement pensés comme des généralisations des espaces classiques de dimension finie. On y a généralisé des notions aussi fondamentales que celle de structure euclidienne (espaces de Hilbert), d'opérateur linéaire (opérateurs intégraux et différentiels), de décomposition spectrale etc. Il serait absurde de sous-estimer cet acquis immense. Mais l'on peut quand même avancer qu'en demeurant assujettie à l'emprise d'un imaginaire spatial classique, l'analyse fonctionnelle a méconnu un *autre* imaginaire spatial pourtant inhérent au concept même d'espace fonctionnel.

4.1.3. Considérons en effet l'espace $\mathcal{F}$ et soit $\mathcal{T}$ sa topologie. La question est de savoir quel est son type naturel d'homogénéité ou encore quelle est la notion naturelle d'identité et de distinguabilité qui lui est inhérente (3.5.3.). Cette question n'est en rien triviale.

---

(1) Il serait trop long d'introduire ici la notion technique de variété différentiable. Disons qu'une variété différentiable de dimension n s'obtient par recollement différentiable d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ que l'on appelle des cartes locales. Localement une variété est donc difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, mais elle ne l'est pas globalement.
La sphère, le tore, sont par exemple des variétés (compactes) de dimension 2.

Pour un espace homogène et isotrope comme notre espace euclidien tridimensionnel tous les points sont équivalents et indiscernables. Ils ne sont distinguables qu'au moyen d'un repère. Mais il n'existe pas de repère absolu, ce qui est la source même du principe de relativité imposant aux équations décrivant les phénomènes physiques d'être covariantes par changement de repère. En revanche dans un espace fonctionnel tous les éléments semblent posséder une identité propre. *C'est la conception de cette identité qui est le paradoxe de l'analyse fonctionnelle classique*. En effet d'une part elle admet une identité propre qui n'est jamais, comme nous l'avons vu (3.6.3.), qu'un leurre littéral. Mais dans le même temps elle la dissout dans les structures : en structurant *algébriquement* les espaces fonctionnels elle les rend, comme dit Thom, "*amnésiques*"(1). *Bref en distinguant une fonction par une identité littérale qu'elle abolit aussitôt en la visant comme point indiscernable, l'analyse classique méconnaît la problématique universelle de l'identité qu'a dégagée le structuralisme, à savoir que dans un système structural les éléments n'ont ni désignation extrinsèque, ni signification intrinsèque et n'ont d'identité que de position.*

La T.C. reconduit au réel le moment théorique où tout espace fonctionnel se trouve être pensé comme système structural d'écarts différentiels. Ce n'est que dans la mesure où elle se fonde *sur l'implication de l'identité structurale dans l'intuition spatiale* qu'elle peut prétendre proposer une apodicticité *autre* (I. 1.3.3.).

4.2. Revenons pour expliciter ce point à notre espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des fonctions différentiables $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. M et $\mathbb{R}$ sont des variétés dont tous les points sont phénoménologiquement indistinguables et dont l'homogénéité est "mesurée" par leurs groupes respectifs G_M et $G_{\mathbb{R}}$ de difféomorphismes. Nous faisons alors le postulat suivant.

Postulat. L'identité phénoménale des éléments de $\mathcal{F}$ (conçue comme conflit entre discernabilité et indiscernabilité) doit se déduire de l'action sur $\mathcal{F}$ des groupes G_M et $G_{\mathbb{R}}$.

Cela revient à dire que l'identité phénoménale n'est rien d'autre que l'équivalence définie par le type différentiable .(3.5.3.)

(1) On sait, par exemple, que la théorie des espaces de Hilbert est $\mathcal{H}$-catégorique c'est-à-dire que pour un cardinal donné il n'existe, à isomorphisme près, qu'*une* structure d'espace de Hilbert. Deux espaces de Hilbert de même cardinal sont donc indistinguables quelle que soit leur origine.

Définition. (cf. 3.5.1.) f et g $\in \mathcal{F}$ sont équivalentes (de même type différentiable) si il existe des difféomorphismes $\varphi \in G_M$ et $\Psi \in G_{\mathbb{R}}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Psi"] \\ M \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} g = \Psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ g \circ \varphi = \Psi \circ f \end{array}$$

Nous nous trouvons donc en présence d'un espace $\mathcal{F}$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$ et d'une relation d'équivalence.
Cela suffit à définir canoniquement sur $\mathcal{F}$ une notion de stabilité structurelle.

Définition. f $\in \mathcal{F}$ est structurellement stable si il existe un voisinage de f pour la topologie $\mathcal{T}$ dont tous les éléments lui sont équivalents. Autrement dit f est structurellement stable si son type différentiable résiste aux petites déformations.
Par définition, l'ensemble des applications structurellement stables est un *ouvert* de $\mathcal{F}$. Soit K le fermé complémentaire. K s'appelle *l'ensemble catastrophique* (ou de bifurcation) de $\mathcal{F}$. Il est évidemment *globalement invariant* par l'action de $G = G_M \times G_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{F}$ qui définit le type différentiable.
Cet ensemble catastrophique global K inhérent à $\mathcal{F}$ "résoud" le paradoxe de l'identité. Pour changer de type différentiable, il faut, d'après le principe de continuité, traverser K (2.3.3.). K *différencie* donc $\mathcal{F}$ et y définit une *identité structurale* (qui peut être *strictement* plus faible que celle définie par le type différentiable, (cf. 4.6.4.)) qui est une identité *de position.*
Par εποχη *de l'identité littérale c'est dès lors à la seule géométrie de K que se réduit cette identité structurale.* Voilà le déplacement crucial (comparez à Kant !). De requisit intuitif la stabilité structurelle est devenue principe morphogène.
Tout espace fonctionnel est naturellement muni d'un ensemble catastrophique global qui n'a aucun rapport immédiat avec sa structure algébrique, qui, comme dit Thom, constitue pour lui une sorte de mémoire, qui manifeste une hétérogénéité différenciante et dont la géométrie réalise une taxinomie.
Le programme mathématique de la T.C. s'identifie dans une certaine mesure à l'analyse géométrique de ces ensembles catastrophiques.

4.3.1. Pour progresser dans l'analyse de K il faut résoudre deux questions. D'abord caractériser *géométriquement* la stabilité structurelle. Ensuite élucider les raisons de l'instabilité. Pour cela il faut disposer d'une généralisation de la notion de point critique pour une fonction $f \in F$. Soient donc $f \in F$ et $x \in M$. Choisissons un système $(x_1,\dots,x_n)$ de coordonnées locales en x. Localement en x, f s'identifie donc à une fonction réelle $f(x_1,\dots,x_n)$ de n variables réelles. La "dérivée" de f en x est alors le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$.

Définition. x est dit point critique de f si les n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ s'annulent en x.

Cette propriété est intrinsèque c'est-à-dire indépendante du système de coordonnées choisi. Soit en effet $(y_1,\dots,y_n)$ un autre système et J le jacobien du changement de coordonnées.

J est la matrice $n \times n$ $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. C'est une matrice *inversible* puisque la transformation $x \rightsquigarrow y$ est un difféomorphisme local. Or on a $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) J$. J étant inversible, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0$ si et seulement si $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$.

Quant à la "dérivée seconde" de f en x, elle s'exprime par ce que l'on appelle le *hessien* de f en x c'est-à-dire par la matrice symétrique $n \times n$ des dérivées secondes $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$.

Si x est critique, on peut définir H intrinsèquement.

Définition. Le point critique x de f est dit *non dégénéré,* si le hessien de f en x est de rang maximal n.

4.3.2. Soit x un point critique non dégénéré de f. La série de Taylor de f en x s'écrit $T_{f(x)}(h) = f(x) + G(h) + g_3(h)$ où $h = (h_1,\dots,h_n)$ est un accroissement de x, où $G(h)$ est la *forme quadratique*

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

(ou encore $G(h) = h^t H h$) et où $g_3(h)$ est une série commençant au degré 3. Or il existe un théorème fondamental, le *théorème de Morse,* disant que *si H est de rang n,* $G(h)$ est déterminée à l'ordre 2. (cf. 3.6.2.).

On peut donc supposer que les coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ ont été choisies de façon à ce que $f(x+h) = f(x) + G(h)$. Par un changement linéaire de coordonnées (choix d'axes principaux pour la forme quadratique $G(h)$) on peut alors diagonaliser la matrice symétrique H et ramener $G(h)$ à sa forme réduite $G(h) = -h_1^2 \dots - h_i^2 + h_{i+1}^2 + \dots + h_n^2$.

Le nombre i de carrés affectés du signe moins a une définition intrinsèque

et s'appelle l'*indice* i(x) du point critique non dégénéré.
On voit donc qu'il existe des *modèles standard* des points critiques non dégénérés. Ce sont soit des sommets (i(x) = n), soit des bassins (i(x) = 0), soit des cols généralisés. Ce sont nécessairement des points *isolés*.
4.3.3. Quant aux points critiques dégénérés ce sont ceux pour lesquels le rang du hessien H n'est pas maximal. On peut montrer à leur propos un théorème de *séparation des variables :*
Théorème des singularités résiduelles(1)
Soit x un point critique dégénéré de f et k < n le rang du hessien de f en x. Il existe un système de coordonnées locales $(z_1,\ldots,z_k, y_1,\ldots,y_{n-k})$ tel que, localement en x, f(x) soit équivalente à une somme
$G(z) + g(y)$ où $G(z)$ est une forme quadratique et g(y) une fonction dont le hessien est nul (point critique totalement dégénéré). Ce théorème montre que pour analyser la structure de f au voisinage d'un point critique dégénéré on peut se restreindre à un point critique totalement dégénéré.
Le nombre n - k de variables dont dépend la singularité résiduelle s'appelle le *corang* du point critique.
4.3.4. Revenons à la *caractérisation géométrique* des applications structurellement stables. En accord avec ce que nous avions entrevu en 2.3. à propos des fonctions à une variable, on a le
Théorème de Morse. Soit M une variété *compacte*. f ∈ F est structurellement stable si et seulement si tous ses points critiques sont non dégénérés et toutes ses valeurs critiques distinctes.

Remarque. Si M est compacte, les points critiques non dégénérés étant isolés ils sont en nombre fini. L'hypothèse de compacité a pour fonction d'éliminer la possibilité d'accumulation de points critiques. Car dans ce cas il existerait dans tout voisinage de f des applications non équivalentes à f. *Nous supposerons donc pour la suite que M est compacte.*
D'après le théorème de Morse, la source de l'instabilité est donc double, d'une part la dégénérescence des points critiques, d'autre part l'égalité des valeurs critiques.
L'on imagine donc facilement qu'en définissant un degré de dégénérescence pour les points critiques ainsi qu'une multiplicité des valeurs critiques on puisse par sommation définir un nombre c(f) "mesurant" l'instabilité d'une application f ∈ K structurellement instable et par là-même définir un ordre partiel sur K. (cf.2.3.3.).
L'idéal serait alors de pouvoir traduire *géométriquement* cet ordre partiel par une *stratification* de K et donc de F (cf. 2.3.3.) c'est-à-dire par une décomposition de K en strates K_i partiellement ordonnées par leur

(1) Cf. par exemple Thom [2], p.53.

codimension [1] croissante et telle que :

i) chaque strate appartienne à la fermeture d'une strate de codimension inférieure,

ii) les strates se recollent avec de "bonnes" propriétés d'incidence,

iii) chaque strate K_i de codimension i soit composée d'applications f équivalentes et de degré d'instabilité $c(f) = i$.

Une telle stratification réaliserait l'analyse *structurale* de F, puisque d'une part les éléments structurellement stables seraient positionnés les uns par rapport aux autres (taxinomie) et que d'autre part l'instabilité d'un élément f de K serait "codée", exprimée par la structure locale en f de la stratification.

4.3.5. Essayons d'exprimer *géométriquement* la cause de l'instabilité. Considérons pour cela l'exemple le plus élémentaire possible, celui du point critique totalement dégénéré de x^3 à l'origine (point d'inflexion). Le germe η de x^3 en 0 est structurellement instable. Soient f la fonction x^3 restreinte à un voisinage U de 0. On a $f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.

On définit donc une application $\tilde{f} : U \longrightarrow P_3$ où P_3 est le $\mathbb{R}$-vectoriel des polynômes $ah + bh^2 + ch^3$ de degré 3 et s'annulant à l'origine :

$\tilde{f}(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. $\tilde{f}(0) = h^3 = f$. P_3 est de dimension 3, de base h, h^2 et h^3 et l'image $\tilde{f}(U)$ y est une parabole "horizontale" tangente au point (0,0,1) (i.e. h^3) au plan (b,c).

La donnée de η implique celle de $\tilde{\eta}$ germe de $\tilde{f}$ à l'origine. $\tilde{\eta}$ s'appelle la *prolongation* de η et en "exprime" géométriquement la structure.

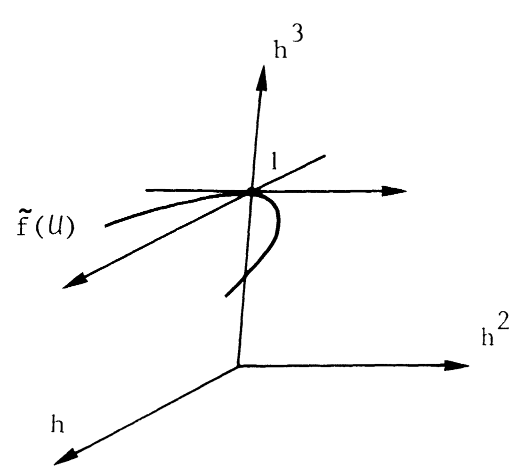


fig. 14

(1) Si $V \hookrightarrow N$ est une sous-variété de dimension p d'une variété N de dimension n, on dit que sa *codimension* est n-p. Cette notion doit remplacer celle de dimension lorsque (comme ici pour $K_i \hookrightarrow F$) V et N sont de dimension *infinie*. Cela exige évidemment des définitions plus sophistiquées de la notion de variété et pose des problèmes non triviaux.

Or quant aux propriétés critiques de ses éléments à l'origine, P_3 est naturellement stratifié.

. La strate la plus singulière est l'origine : polynôme identiquement nul.

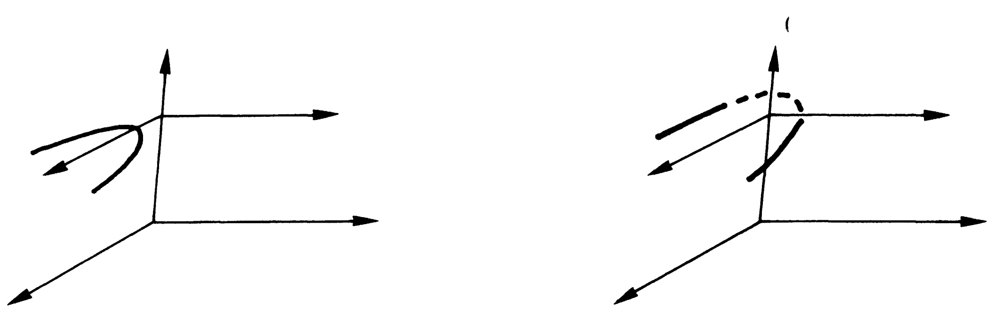
. Ensuite vient la strate formée de l'axe h^3 moins l'origine : polynômes ch^3 ($c \neq 0$) admettant une racine triple à l'origine.

. Ensuite la strate formée du plan (b,c) moins l'axe h^3 : polynômes bh^2+ch^3 ($b \neq 0$) admettant une racine double à l'origine.

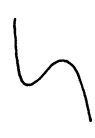
. Enfin la strate formée de P_3 moins le plan (b,c) : polynômes $ah + bh^2 + ch^3$ ($a \neq 0$) admettant une racine simple à l'origine.

$\tilde{f}(\mathcal{U})$ étant tangente au plan (b,c) *n'est pas transverse à cette stratification. C'est ce défaut de transversalité qui est la raison profonde de l'instabilité structurelle.*

Si l'on déplace un peu la parabole, on obtient les deux situations transversales:



correspondant aux types *structurellement stables.*

 *I* et  *II*

Cet exemple élémentaire est un cas particulier de théorèmes généraux montrant que la "bonne" stratégie est en général de tenter de caractériser la stabilité structurelle d'une forme par des propriétés de transversalité d'applications "exprimant" la forme avec des stratifications qui leur sont naturellement associées.

4.3.6. Nous venons d'introduire intuitivement la notion cruciale de transversalité. Elle se définit de la façon suivante.

4.3.6.1. Soient N une variété et N_1 et N_2 deux sous-variétés. On dit que N_1 et N_2 sont transverses (notation $N_1 \pitchfork N_2$) si en tout point x de leur intersection l'espace tangent en x à N est la somme des espaces tangents en x à N_1 et N_2 :

$$N_1 \pitchfork N_2 \iff \forall x \in N_1 \cap N_2,\ T_x N = T_x N_1 + T_x N_2.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ deux courbes sont transverses si elles ne sont tangentes en aucun point.

Dans $\mathbb{R}^3$ deux courbes sont transverses si elles ne s'intersectent pas, car si elles s'intersectaient en x, $T_xN_1 + T_xN_2$ serait au maximum de dimension 2 < 3. D'une façon générale si dim N_1 + dim N_2 < dim N la condition de transversalité se réduit à $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Toujours dans $\mathbb{R}^3$ une courbe et une surface sont transverses si elles ne sont tangentes en aucun point etc.

4.3.6.2. Soit maintenant $j : M \longrightarrow N$ une application différentiable et N_1 une sous-variété de N. On dit que j et N_1 sont transverses ($j \pitchfork N_1$) si pour tout $x = j(y)$ de l'intersection $j(M) \cap N_1$ on a $T_xN = T_j(T_yM) + T_xN_1$ où T_j est l'application linéaire tangente à j. Si M est une sous-variété N_2 de N et j l'inclusion canonique, on retrouve la définition précédente.

4.3.6.3. Si maintenant N est stratifié par des strates N_i sous-variétés de dimensions décroissantes, on dit que $j : M \longrightarrow N$ est transverse à cette stratification, si elle est transverse à toutes les strates. Cela implique que l'image j(M) "évite" les strates de codimension supérieure à la dimension de M.

4.3.6.4. L'exemple de la prolongation $\tilde{\eta}$ du germe η, ainsi que l'intuition immédiate par exemple du cas des courbes dans $\mathbb{R}^3$, laissent supposer que la non-transversalité est une propriété *instable*. Il s'agit bien d'une propriété générale ainsi que le montre un des outils techniques les plus puissants introduits par Thom.

Théorème de transversalité.

Soit N une variété stratifiée et H l'espace topologique (pour une topologie naturelle) des applications différentiables $j : M \longrightarrow N$. Les élements de H transverses à la stratification de N forment un *ouvert dense*.

Donnons une conséquence de ce théorème. Nous avons défini de deux façons la cause de l'instabilité d'un élément $f \in F$. D'une part par le théorème de Morse et d'autre part par un défaut de transversalité. Ces définitions sont en fait équivalentes.

Soit $f \in F$ et considérons localement en $x \in M$ ce que l'on appelle le prolongement du 1-jet de f à savoir l'application $\tilde{f}$ définie en termes de coordonnées locales par

$(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto (x_1,\ldots,x_n,f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$ ou plus brièvement $(x) \longrightarrow (x,f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x))$.

On peut globaliser $\tilde{f}$ en introduisant ce que l'on appelle l'espace $J^1=J^1(M,\mathbb{R})$ des 1-jets. J^1 est un fibré vectoriel de base $M \times \mathbb{R}$ et de fibre en x le $\mathbb{R}$-vectoriel (de dimension n) des 1-jets des élements de F (1).

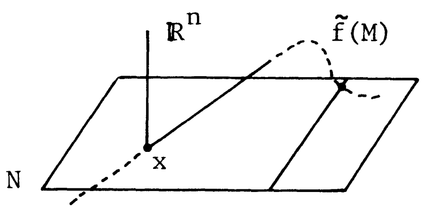
(1) Cf. un prochain numéro pour plus de précisions.

Ce n'est pas en général un fibré trivial (i.e. un produit $M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). Il ne l'est que localement. On peut alors exprimer les propriétés critiques de f à partir de l'application (différentiable) $\tilde{f} : M \longrightarrow J^1$.

. Dire que x est un point critique de f signifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$. *Les points critiques ne sont donc rien d'autre que les intersections de $\tilde{f}(M)$ avec la section nulle N du fibré vectoriel J^1.*

. Soit alors x un tel point critique. A quelle condition $\tilde{f}$ est-elle transversale en x à N ?

Comme N est de codimension n et que M est de dimension n, il faut d'une part que $\tilde{f}(M)$ soit de dimension n et que d'autre part elle ait localement en x une intersection avec N réduite à x.



Or la matrice de l'application tangente $T_x\tilde{f}$ à $\tilde{f}$ en x étant donnée par :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \overbrace{x_1 \quad \cdots\cdots \quad x_n} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{array} &
\left(\begin{array}{ccc}
1 & & 0 \\
 & \ddots & \\
0 & & 1 \\
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = H &
\end{array}\right)
\end{array}
$$

(où y est la coordonnée de $\mathbb{R}$, $z_1 \dots z_n$ celles de la fibre de J^1, et H le hessien de f en x),

$T_x\tilde{f}$ associe au vecteur tangent $u = (u_1, \dots, u_n)$ à M en x le vecteur tangent à J^1 en $(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0)$ de coordonnées

$(u, \Sigma\, u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), H\, u) = (u, 0, H\, u)$ (1).

On voit donc que pour qu'il y ait transversalité il faut et il suffit que lorsque u varie les vecteurs H u engendrent toute la fibre c'est-à-dire que H soit de rang maximal n. Autrement dit, *$\tilde{f}$ intersecte transversalement en f(x) la section nulle N du fibré vectoriel J^1 si et seulement si x est un point critique non dégénéré de f.*

---

(1) Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$.

L'on peut de même traduire par une propriété de transversalité la seconde condition du théorème de Morse sur la distinction des valeurs critiques.
Or une fois que l'on a traduit la stabilité structurelle par des propriétés de transversalité, on peut appliquer le théorème de transversalité et en déduire un théorème fondamental de densité.

Théorème. L'ensemble des applications $f \in \mathcal{F}$ structurellement stables forment un ouvert *dense* de $\mathcal{F}$.

La propriété de stabilité structurelle est par définition une propriété ouverte. Nous voyons maintenant qu'elle est *générique* au sens où si f est une application structurellement instable on peut la stabiliser par une déformation aussi petite que l'on veut.

4.3.6.5. Remarque 1. Je viens d'utiliser le terme de *généricité*. Il s'agit d'une notion raffinant celle d'ouvert dense. Les espaces fonctionnels que rencontre la T.C. sont en général des *espaces de Baire* et ont donc la propriété qu'une intersection *dénombrable* d'ouverts denses est dense (mais en général ni ouverte ni fermée)(1). On appelle *résiduel* un tel ensemble.

Définition. Soit $\mathcal{F}$ un espace de Baire. Une propriété est dite générique si elle est satisfaite sur un ensemble résiduel de $\mathcal{F}$.

Remarque 2. La notion intuitive de stabilité structurelle présuppose celle de généricité. Il est donc capital de pouvoir *démontrer* celle-ci.

4.4. Nous disposons maintenant des outils conceptuels nous permettant d'esquisser la notion de déploiement universel.
Il s'agit d'analyser la structure stratifiée de l'ensemble catastrophique K de $\mathcal{F}$. Cela peut se faire à deux niveaux, l'un local, l'autre global.

4.4.1. *Niveau local*. Soit $f \in K$. Considérons l'orbite G(f) de f (sous l'action du groupe $G = G_M \times G_{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{F}$) c'est-à-dire sa classe d'équivalence pour le type différentiable (4.2.). La "bonne" situation est celle où l'on peut définir un *modèle transverse*. Supposons que G(f) soit de codimension k(2). *On dira alors que f est de codimension k.*

---

(1) Une intersection finie d'ouverts denses est un ouvert dense (résultat trivial de topologie générale).

(2) Cela suppose une définition plus sophistiquée (cf. 4.3.4. note (1)) puisque si G(f) est de codimension k, G(f) est de dimension infinie et n'est donc pas une variété.

Considérons, localement en f, une "sous-variété" W de $\mathcal{F}$ de dimension k et transverse en f à G(f) (1). K intersecte W suivant l'ensemble stratifié $K_W = K \cap W$. On dit que la stratification (W,K_W) est un modèle transverse de $(\mathcal{F},K)$ en f si, localement en f, la stratification $(\mathcal{F},K)$ est le *produit direct* de (W,K_W) par G(f).

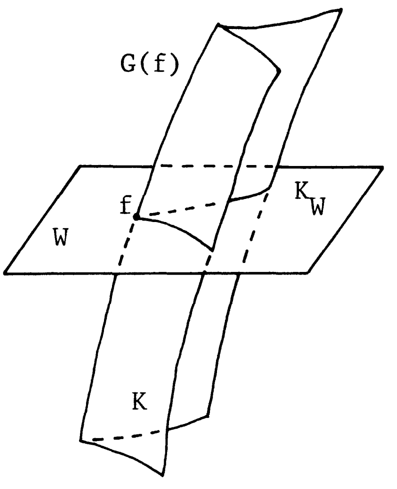


fig.16

L'intérêt principal de la notion de modèle transverse est évidemment de permettre la mise entre parenthèses de la structure spécifique de G(f). Ce qui nous intéresse dans un voisinage de f, ce ne sont pas les fonctions équivalentes à f, mais la classification des types qualitatifs incidents à f. Le modèle transverse suffit à une telle classification. Il s'agit en quelque sorte d'un *quotient* de $\mathcal{F}$ par G(f).

4.4.2. *Niveau global.* La question est celle du *recollement* des modèles transverses. (2) Ici se met en jeu une dialectique spécifique du local et du global.

Considérons par exemple un modèle transverse W de la singularité x^5 (queue d'aronde) de codimension 3. Nous verrons dans le troisième numéro de cette présentation qu'il s'agit de l'ensemble stratifié :

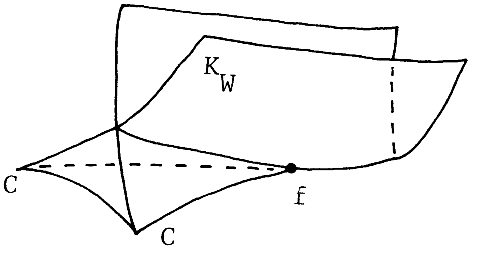


fig. 17

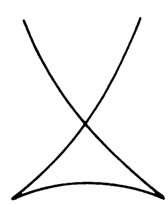
(1) Ce qui suppose que l'on ait défini une notion "d'espace tangent" en f à G(f). cf. plus haut.

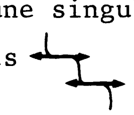
(2) Le lecteur en trouvera des exemples simples dans un prochain numéro.

Nous constatons deux choses.

4.4.2.1. Les points de l'arête de rebroussement C représentent des applications admettant une singularité cusp. Soit g un tel point. g est de codimension 2 et C est l'intersection de son orbite G(g) avec K_W. Un modèle transverse à g est donc une section plane W' transverse en g à C. Il est facile de vérifier que $(W',K_{W'})$ où $K_{W'} = K_W \cap W'$ est un modèle transverse du cusp. Cela montre qu'un modèle transverse d'un élément de K contient des modèles transverses de tous les éléments de codimension inférieure qui lui sont incidents ou encore qu'il y a *transitivité* du passage au quotient. Cela est d'une grande importance stratégique pour la raison suivante. Supposons que f soit de *détermination finie* (3.6.2.). On peut alors (si on travaille localement c'est-à-dire dans un espace de germes) remplacer f par un polynôme et, vue la transitivité, travailler dans un espace de polynômes qui est un espace de dimension *finie* où les stratifications deviennent de "vraies" stratifications.

4.4.2.2. Une section plane de W ne passant pas par f



s'obtient en recollant des modèles transverses des trois singularités de codimension 2 qu'elle contient : deux cusps et une singularité pli-pli (deux points d'inflexion à des niveaux différents ).

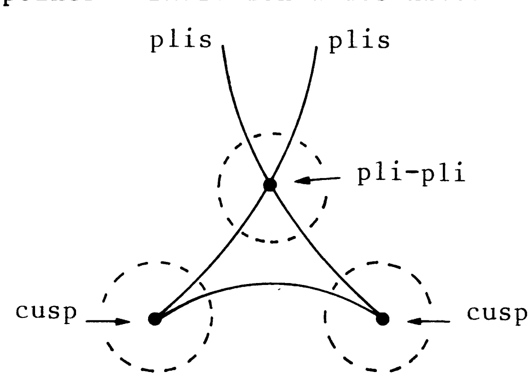


fig.18

4.4.3. Cette notion de modèle transverse qui est à la base de la modélisation propre à la T.C. comporte deux aspects, l'un théorique, l'autre pratique.

4.4.3.1. *Aspect théorique*.

Cette notion n'est vraiment opératoire que si l'on peut montrer que si $f \in K$ possède un modèle transverse, *tous ses modèles transverses sont équivalents*. C'est pour démontrer ce théorème que Thom a incité B. Malgrange à démontrer un théorème d'une très haute technicité que l'on appelle depuis le *théorème de préparation différentiable* (1961).(1)

(1) cf. par exemple Thom [2] p.46 et un prochain numéro.

Lorsque tous les modèles transverses de f sont équivalents, on les appelle *déploiements universels de f*. Cela pour la raison suivante :

i) Ce sont des déploiements. Si W est un modèle transverse de codimension k on peut le considérer comme plongement d'un voisinage W' de l'origine de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathcal{F}$ en y choisissant des coordonnées locales. Les éléments g de W s'identifient alors à des applications f_w paramétrées par $w \in W'$.

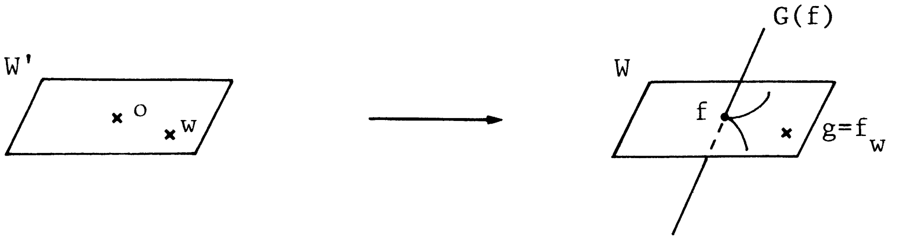


fig.19

ii) Ils sont universels dans le mesure où l'on peut montrer que tout autre déploiement (local) f_t de f paramétré par $t \in T$ est l'*image réciproque* de f_w par une application $\Theta : T \longrightarrow W$.

4.4.3.2. *Aspect pratique*.

Les modèles statiques de Thom deviennent alors évidents. Soit M l'espace interne du système et Ω son espace de contrôle. Supposons que l'on travaille localement dans un ouvert W de Ω. L'énergie E est un champ E_w paramétré par W c'est-à-dire une application $j : W \longrightarrow \mathcal{F}$ plongeant le contrôle W dans l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$. L'hypothèse (physique) de stabilité structurelle va s'exprimer en disant que l'image j(W) est transverse à K. La transversalité implique que j(W) évite les strates de codimension supérieure à dim W. La morphologie locale de complexité maximale pouvant apparaître dans W est donc celle d'un modèle transverse à une strate de codimension égale à dim W. L'ensemble catastrophique empirique observé dans W se déduira alors par une convention (convention de Maxwell, convention du retard parfait,etc.) de l'ensemble stratifié $K \cap j(W)$.

L'on comprend dès lors pourquoi un déploiement manifeste une tendance, un Drang (2.3.5.4. et 2.5.5.) à la stabilisation. C'est qu'il y a un rapport étroit entre stabilité structurelle et transversalité et que la transversalité implique qu'un déploiement de f transverse à K ne peut engendrer que des applications de codimension inférieure et donc "plus"stables.

4.5. Revenons alors une dernière fois à notre exemple de base. Nous avons vu (3.7.) que la singularité organisatrice était de type cusp. Le déploiement universel du cusp $x^4/_4$ est $x^4/_4 + ux^2/_2 + vx$.

Quant au déploiement E il est équivalent au déploiement

$$E' = \frac{\mu}{6}\Theta^4 - \frac{\alpha}{6}\Theta^3 - \tilde{\beta}\,\Theta^2 + \alpha\,\Theta.$$

Montrons qu'il est équivalent au précédent. Pour cela construisons le déploiement (non universel)

$$F = \Theta^4/_4 + w\,\Theta^3/_3 + u\,\Theta^2/_2 + v\,\Theta.$$

On constate que c'est le produit du déploiement universel de $\Theta^4/_4$ par une courbe (qui appartient donc à l'orbite de Θ^4)

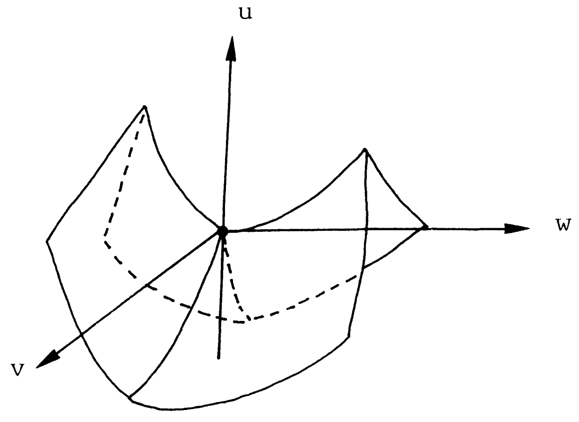


fig.20

E' est (à la renormalisation par $\mu/_6$ près) la section plane de F correspondant à l'application

$$(\alpha,\tilde{\beta}) \longmapsto \begin{cases} w = -\dfrac{\alpha}{6} \\ u = -\tilde{\beta} \\ v = \alpha \end{cases}$$

c'est-à-dire la section de F par le plan $w = -\frac{v}{6}$.
Cette section étant *transverse*, E' est un déploiement universel du cusp d'après le théorème du déploiement universel.
Nous avons donc articulé un corpus de théorèmes profonds légitimant notre assertion initiale que l'être-physique ne peut que réaliser une solution physique aux contraintes de la stabilité structurelle (2.4.4. et 3.7.3.).

4.6. La stratégie générale que je me suis borné à esquisser se heurte cependant à une série de difficultés et d'objections techniques. Citons-en quelques-unes pour conclure.
4.6.1. J'ai dit (4.3.6.5. Remarque 2.) que la notion intuitive de stabilité structurelle présupposait celle de généricité. Nous avons vu (4.3.6.4.) que tel est bien le cas pour les modèles statiques. *Mais ce n'est pas toujours le cas.* Si au lieu de considérer des applications $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit la dynamique interne par une famille de champs de vecteurs sur M (modèles métaboliques) on se place dans l'espace fonctionnel $\mathcal{X}$ de ces champs. Or en général il existera dans $\mathcal{X}$ des éléments X structurellement instables dont *tous* les éléments voisins sont instables. Cela peut signifier que la notion de stabilité structurelle que l'on a adopté n'est pas "naturelle". Mais cela peut manifester aussi une limitation *intrinsèque* de la stratégie.

4.6.2. Une autre difficulté est liée à la *relativité* de la notion de stabilité structurelle. Considérons par exemple une application f : M ⟶ ℝ et le champ de gradient X ∈ $\mathcal{X}$ qui lui est associé (via une métrique riemanienne sur M). Que f soit structurellement stable comme élément de $\mathcal{F}$ n'implique pas que X soit structurellement stable comme élément de $\mathcal{X}$ (objection dite de Guckenheimer).
Il en va de même si l'on se restreint par exemple à des applications f ∈ $\mathcal{F}_G$ invariantes par l'action d'un groupe de symétrie G.
Si f est structurellement stable relativement à $\mathcal{F}_G$ elle ne l'est pas en général relativement à $\mathcal{F}$.
4.6.3. Ensuite il n'est pas toujours possible de définir une stratification pour K. K peut posséder des zones très chaotiques impossibles à modéliser géométriquement (catastrophes généralisées). Même dans le cas simple qui est celui que nous avons traité, on ne peut stratifier que la partie de K correspondant aux applications de détermination finie (de codimension finie). On peut d'ailleurs remarquer à ce propos *un conflit entre stabilité structurelle et simplicité d'expression*. Les fonctions les plus simples à définir sont les fonctions constantes. Ce sont les plus instables. Elles sont de codimension infinie et incidentes à toutes les autres.
4.6.4. Mais même si l'on se restreint à une "bonne" stratification de K, on se heurte au problème suivant. La stratification de K dérive *de sa géométrie*. C'est elle qui définit ce que j'ai appelé l'identité structurale. (4.2.).
Il est clair que les strates de K sont G-invariantes c'est-à-dire réunion de G-orbites . Mais elles ne se réduisent pas en général à une seule orbite. Cela signifie que l'identité structurale est *strictement plus faible* que l'identité phénoménale, ou encore que K classe les éléments de $\mathcal{F}$ suivant une notion de type qualitatif plus faible que le type différentiable, par exemple le type topologique. Autrement dit la relation d'incidence $T_1 < T_2$ (2.3.3.) entre types différentiables est bien un *préordre :* l'on peut avoir $T_1 < T_2$ et $T_1 > T_2$ sans avoir $T_1 = T_2$. On dit dans ce cas qu'il existe *des modules*. *Une des propriétés importantes des catastrophes élémentaires est qu'il n'y existe pas de modules*. La classification par la stratification équivaut à celle par le type différentiable.

(à suivre)

Math. Sci. hum. (15^e année, n°59, *1977*, p.81)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

R. ABRAHAM, "Introduction to Morphology", *Publications du département de Mathématiques*, Tome 9, Université de Lyon-I, 1972.

J.M. LEVY-LEBLOND, "Catastrophes, Paradoxes et Métaphores", *Critique*, n°359, Avril 1977.

R. THOM [1] , *Stabilité structurelle et Morphogénèse, Essai de théorie générale des modèles*, New York, Benjamin, 1972 [Paris dépôt : Ediscience].

R. THOM [2] , *Modèles Mathématiques de la Morphogénèse*, Paris, Union Générale d'Editions, 1974.

R. THOM [3] , "La planète de l'oncle Thom", *Sauvage*, n°37, 1977.

R. THOM [4] ,"Answer to Christopher Zeeman's reply",*Dynamical Systems - Warwick 1974*, Lecture Notes in Mathematics, n°468, pp.384-389, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1975.

R. THOM [5] , "Réponse à Lévy-Leblond", *Critique*, n°361-362, Juin-Juillet 1977.

J.M.T. THOMPSON and G.W. HUNT, *A general theory of elastic stability*, London, Wiley, 1973.

H. WHITNEY, "Mappings of the plane into the plane", *Annals of Mathematics*, 62, 374-470, 1955.

E.C. ZEEMAN [1] ,"Catastrophe theory :a reply to Thom", *Dynamical Systems - Warwick 1974*, Lecture Notes in Mathematics, n°468, pp.373-383, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1975.

E.C. ZEEMAN [2] , "Euler Buckling", *Structural stability, the Theory of Catastrophes, and applications in the Sciences*, Lecture Notes in Mathematics, n°525, pp.373-395, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1976.