MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

**Logique modale propositionnelle : une vue cavalière**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 57 (1977), p. 27-42

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1977__57__27_0>

*Math. Sci. hum.* (15[e] année, n°57, 1977, p.27-42)

# LOGIQUE MODALE PROPOSITIONNELLE : UNE VUE CAVALIERE

M. EYTAN*

## 0. INTRODUCTION

Cet article est une vue cavalière, à tous les sens de ce terme ; en particulier il ne comporte aucune démonstration** . Il représente une tentative de présentation de la logique modale propositionnelle au niveau d'abstraction le plus bas possible, donc accessible au plus large public possible. Il ne prétend donc à l'originalité ni pour le contenu, ni pour la forme, ni même pour la présentation.

Son auteur s'estimera heureux si les lecteurs seront en mesure d'aborder ensuite l'article de Fitting [2] : c'est son but quasi-exclusif.

## 1. HISTORIQUE

Il est de tradition d'évoquer le nom d'Aristote lorsque l'on veut marquer l'ancienneté et la vénérabilité de la logique modale. Nous nous abstiendrons soigneusement d'entrer dans les détails à propos de ce sujet difficile et controversé.

Plus près de nous et de l'avis commun, la première formulation sérieuse d'un système de logique modale propositionnelle est due à Lewis (à partir de 1914) et culminera avec le livre de Lewis and Langford [7]. Elle a pour origine la profonde insatisfaction qu'aurait éprouvé Lewis devant l'implication dite matérielle (remarque qui attirerait de sérieux ennuis à un étudiant contemporain) et son désir de la remplacer par l'implication

---

* U.E.R. Mathématiques, Logique Formelle et Informatique, Université René Descartes. Ce texte est la rédaction d'exposés faits en 1974 pour un groupe de linguistes ayant déjà des notions élémentaires de logique.

** Se référer à Fitting [2] ou Hughes and Creswell [3] qu'il appela stricte. Le style de l'époque étant celui des <u>Principia Mathematica</u>, Lewis et Langford donnent plusieurs systèmes formulés en termes exclusivement syntaxiques. Le lecteur saura se montrer compréhensif en se rappelant que c'était avant que Tarski nous introduisît au paradis de la sémantique.

A la date de parution du livre on connaissait la méthode des tables de vérité. On peut raisonnablement penser que les tentatives en ce sens ne manquèrent pas, jusqu'à ce que Dugundji démontrât, en 1940, que les opérateurs modaux n'étaient pas exprimables par une table de vérité. Dès lors se posait la question : que faire ?

La première voie couronnée de succès fut la voie algébrique de Mc Kinsey and Tarski [8], applicable aux systèmes S4 et S5. Une dizaine d'années plus tard Kripke [5] donna une sémantique pour S5 avec quantification qu'il étendit par la suite à d'autres systèmes de logique modale du 1er ordre.

A peu près à la même époque, avec une terminologie et un point de vue légèrement différents, Hintikka donnait une sémantique équivalente.

## 2. LES SYSTEMES DE LEWIS

### 2.0. <u>Le langage (commun à tous les systèmes formels)</u>

. Variables (lettres de proposition) : p,q,r,... en infinité dénombrable

. Connecteurs unaires : $\neg$ (négation)
$\Diamond$ (possibilité)
binaires : $\wedge$ (conjonction)

. Parenthèses : (, ).

. Règles de formation

(R1) une variable est une formule

(R2) si A est une formule, il en est de même pour $\neg A$, $\Diamond A$.

(R3) si A et B sont des formules, il en est de même pour $(A \wedge B)$.

. Abréviations

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(A \vee B)$ | abrège | $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ | (disjonction) |
| $(A \prec B)$ | " | $\neg \Diamond (A \wedge \neg B)$ | (implication stricte) |
| (A es B) | " | $(A \prec B) \wedge (B \prec A)$ | (équivalence stricte) parenthèses extérieures omises |
| $\Box A$ | " | $\neg \Diamond \neg A$ | (nécessité) |
| $(A \Rightarrow B)$ | " | $\neg(A \wedge \neg B)$ | (implication 'matérielle') |

Désormais on convient d'omettre les parenthèses extérieures.

## 2.1. Le système S1

. Axiomes

(Ax1) $(p \wedge q) \prec (q \wedge p)$

(Ax2) $(p \wedge q) \prec p$

(Ax3) $p \prec (p \wedge p)$

(Ax4) $((p \wedge q) \wedge r) \prec (p \wedge (q \wedge r))$

(Ax5) $((p \prec q) \wedge (q \prec r)) \prec (p \prec r)$

(Ax6) $(p \wedge (p \prec q)) \prec q$

. Règles

(Sub) $\dfrac{A}{\mathrm{sub}_B^x\ A}$ A et B formules, x variable

où $\mathrm{sub}_B^x\ A$ signifie la formule obtenue en substituant B à toutes les occurrences de x dans A.

(Adj) $\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ A,B formules

(Remp) $\dfrac{A \quad C \text{ es } D}{\underset{A'-A''}{\mathrm{remp}}\ {}^{C}_{D}\ A}$ A,C,D formules; C,D sous-formules de A; A',A'' sous-mots de A

où $\underset{A'-A''}{\mathrm{remp}}\ {}^{C}_{D}\ A$ signifie la formule obtenue en substituant C à D dans le contexte A'-A'' i.e. à l'occurrence de D qui correspond à A = A' D A'' et donnant donc A'C A''.

(MP) $\dfrac{A \quad A \prec B}{B}$ A,B formules

Les *thèses* sont les formules obtenues à partir des axiomes en appliquant les règles (un nombre fini de fois).

PROPOSITION 1. *Toute thèse du calcul des propositions (classique) est une thèse de S1.*

PROPOSITION 2. *Si A est une thèse (classique),* $\Box$ *A est une thèse de S1.*

Ce système n'est pas satisfaisant à plusieurs points de vue.
Tout d'abord la règle :

$$(\mathrm{Nec}) \qquad \frac{A}{\Box A}$$

n'y est pas valide.

Ensuite il y a des "paradoxes de l'implication stricte" qui sont des thèses

(p. ex. $\Box\, p \Rightarrow (q \prec p)$, $\neg \Diamond\, p \Rightarrow (p \prec q)$) mais par contre d'autres n'en sont pas (p. ex. $\Box\, p \prec (q \prec p)$, $\neg \Diamond\, p \prec (p \prec q)$). De même aucune thèse de S1 n'est de la forme $\Box\Box\, A$.

## 2.2. Le système S2

Obtenu en ajoutant à S1 le seul axiome

$$\text{(Ax7)} \qquad \Box\, (p \wedge q) \prec \Box\, p$$

tout le reste étant inchangé.

La règle (Nec) n'y est toujours pas valide, p.ex. $(p \Rightarrow p) \prec (p \prec p)$ n'est pas une thèse de S2. Cependant on a la règle suivante :

$$\frac{A \prec B}{\Box\, A \prec \Box\, B}$$

qui n'est pas valide dans S1. Cette règle permet de démontrer dans S2 les formules du § 2.1. qui n'étaient pas des thèses de S1.

Il est surprenant de constater qu'avec tout ce qui précède la formule $(p \prec q) \prec (\Box\, p \prec \Box\, q)$ n'est pas une thèse de S2.

## 2.3. Le système S3

Obtenu en ajoutant à S1 le seul axiome

$$\text{(Ax8)} \qquad (p \prec q) \prec (\neg \Diamond\, q \prec \neg \Diamond\, p)$$

qui permet de démontrer dans S3 la formule en fin du § 2.2.

Ce système n'est toujours pas suffisant pour que la règle (Nec) y soit valide, bien qu'il soit plus fort que S2 au sens suivant.

PROPOSITION 3. *Toute thèse de S2 est une thèse de S3.*

## 2.4. Le système S4

Obtenu en ajoutant à S1 le seul axiome

$$\text{(Ax9)} \qquad \Box\, p \prec \Box\, \Box\, p.$$

PROPOSITION 4. *Toute thèse de S3 (et donc de S2) est une thèse de S4*

PROPOSITION 5. *La règle (Nec) est valide dans S4.*

Il est bien connu (cf. plus loin § 5) que toute modalité (i.e. tout mot sur l'alphabet constitué des symboles $\neg, \Diamond, \Box$) se réduit dans S4 à une parmi 14 possibilités.

## 2.5. Le système S5

Obtenu en ajoutant à S1 le seul axiome

$$\text{(Ax10)} \qquad \Diamond\, p \prec \Box\, \Diamond\, p$$

qui n'est pas, bien entendu, une thèse de S4.

PROPOSITION 6. *Toute thèse de S4 (et donc de S3,S2) est une thèse de S5.*

Ce système ne contient que les modalités $\neg$ , $\Box$ , $\Diamond$ avec leurs négations (les autres se réduisent).

PROPOSITION 7. *Les systèmes S1 à S5 sont tous distincts.*

L'on passera sous silence les divers bricolages donnant des systèmes intermédiaires du genre S3.1415 etc. En fait, pour des raisons qui apparaitront par la suite , les systèmes mathématiquement intéressants sont S4 et S5 (ce dernier dans une moindre mesure).

3. LE SYSTEME T DE FEYS (ou M DE VON WRIGHT)

Ce système formel, introduit par Feys en 1937, est le système minimal qui réponde aux exigences suivantes :

(1) Les opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ sont reliés par les conditions

$$\Box\, p \text{ eq } \neg\Diamond\neg p \quad , \quad \Diamond p \text{ eq } \neg\Box\neg\, p$$

(où A eq B abrège $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ).

(2) $(p \prec q)$ eq $\Box\, (p \Rightarrow q)$ est une thèse. Ce qui signifie que $(p \prec q) \Rightarrow \Box\, (p \Rightarrow q)$ (ou encore "l'implication stricte entraîne la nécessité de l'implication matérielle") étant intuitivement valide, on exige que sa converse soit aussi une thèse.

(3) L'opérateur $\Box$ n'est pas définissable en termes de connecteurs classiques (cf. §4.1.)

(4) $\Box\, p \Rightarrow p$ est une thèse.

(5) La règle (Nec) est valide.

(6) $(\Box\, p \wedge (p \prec q)) \Rightarrow \Box\, q$ est une thèse.

Avec le langage du §2, le système T est alors défini par les axiomes et règles qui suivent.

. Axiomes

1. $(p \vee p) \Rightarrow p$
2. $q \Rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
4. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r))$
5. $\Box\, p \Rightarrow p$
6. $\Box\, (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Box\, p \Rightarrow \Box\, q)$

On remarque que les axiomes 1 à 4 sont ceux des <u>Principia</u>.

. Règles

(Sub) $\dfrac{A}{\operatorname{sub}_{B}^{x} A}$ A,B formules, x variable

(MP) $\dfrac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$ A,B formules

(Nec) $\dfrac{A}{\Box A}$ A formule

Les règles (Sub) et MP) étant valables pour les formules sans modalités, la remarque qui suit la liste des axiomes entraîne immédiatement

PROPOSITION 8. *Toute thèse classique est une thèse de T.*

On peut aussi montrer

PROPOSITION 9. *Le système T est distinct des systèmes S1 à S5.*

4. SEMANTIQUE DES SYSTEMES T, S4, S5

4.1. Les systèmes formels définis jusqu'à présent sont suffisamment pénibles à manipuler pour que pendant de nombreuses années les articles les concernant se bornassent à établir des listes de thèses. La signification intuitive des opérateurs de modalité était délibérément ignorée. Par ailleurs aucune "table de vérité" finie ne peut suffire à définir les opérateurs modaux, d'où la condition (3) du §3.

Laissant de côté l'approche de Mc Kinsey and Tarski [8] (cf. plus loin) on exposera brièvement dans ce paragraphe la méthode de Kripke [6] faisant suite à Kripke [5], originellement définie pour S5, étendue ensuite à T et S4 (et puis à S2 et S3, mais on n'en parlera pas ici). Cette méthode a pour base intuitive la notion (attribuée à Leibniz) qu'une proposition est nécessaire si et seulement si elle est vraie de tous les "mondes possibles", du moins pour le système S5 (cf. plus loin).

4.2. Voici plus précisément comment on procède. On appelle *modèle de Kripke* le triplet ($\mathcal{G}$, R, $\models$) d'un ensemble $\mathcal{G}$ (d'univers), d'une relation binaire R sur $\mathcal{G}$ et d'une relation $\models$ entre univers et formules ($\Gamma \models A$ se lit '$\Gamma$ donne A') vérifiant pour un R-successeur $\Gamma^*$ de $\Gamma$ (i.e. tel que $\Gamma \mathrel{R} \Gamma^*$) :

(M1) $\Gamma \models \neg A$ ssi $\Gamma \not\models A$ (i.e.) non $\Gamma \models A$)

(M2) $\Gamma \models A \wedge B$ ssi $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$

(M3) $\Gamma \models A \vee B$ ssi $\Gamma \models A$ ou $\Gamma \models B$

(M4) $\Gamma \models A \Rightarrow B$ ssi $\Gamma \not\models A$ ou $\Gamma \models B$

(M5) $\Gamma \models \Box A$ ssi $\Gamma^* \models A$ pour tout $\Gamma^*$

(M6) $\Gamma \models \Diamond A$ ssi $\Gamma^* \models A$ pour un $\Gamma^*$

Le modèle de Kripke ( $\mathcal{G}$, R, $\models$ ) est un *T-modèle* si R est réflexive, un *S4-modèle* si R est en plus transitive, un *S5-modèle* si R est en plus symétrique.

Une formule est $\mathfrak{X}$ *-valide* (où $\mathfrak{X}$ = T, S4 ou S5) *dans un* $\mathfrak{X}$ *-modèle* de Kripke ( $\mathcal{G}$, R, $\models$ ) si pour tout univers $\Gamma \in \mathcal{G}$, $\Gamma \models$ A. A est $\mathfrak{X}$ *-valide* tout court si elle est valide dans tout $\mathfrak{X}$ -modèle de Kripke.

Revenons à la signification intuitive de cette définition : $\mathcal{G}$ est l'ensemble des univers (mondes possibles), $\Gamma$ R $\Gamma^*$ signifie que $\Gamma^*$ est un univers possible relativement à $\Gamma$ (ou encore accessible à partir de $\Gamma$). La condition (M5) signifie alors que A est nécessairement vraie dans l'univers $\Gamma$ si et seulement si A est vraie dans tout univers $\Gamma^*$ accessible à partir de $\Gamma$. Le lecteur explicitera pour lui-même la signification intuitive de (M6).

Pour les S5-modèles, la relation R est une relation d'équivalence, le préordre s'aplatit et on retrouve l'idée intuitive de la fin du §4.1. Pour les T-modèles la condition sur R signifie que chaque univers est accessible à partir de lui-même ; pour les S4-modèles que si $\Gamma'$ est accessible à partir de $\Gamma$ et $\Gamma''$ à partir de $\Gamma'$ alors $\Gamma''$ est accessible à partir de $\Gamma$ .

4.3. Ayant défini les notions de $\mathfrak{X}$ -validité ( $\mathfrak{X}$= T, S4 ou S5), on peut se poser la question de déterminer les formules $\mathfrak{X}$-valides et se demander si ce sont les thèses des systèmes formels correspondants. La réponse est positive, comme on le verra ci-dessous.

## 5. ALGEBRE ET SYSTEMES T, S4, S5

5.1. Dans le calcul des propositions classique une technique très utile pour l'étude algébrique est de passer à l'algèbre de Lindenbaum (quotient de l'ensemble des formules par la relation eq). Cette technique est parfaitement applicable aux systèmes T, S4, S5 ; elle est due à Mc Kinsey and Tarski [8] pour l'essentiel.

5.2. T-Algèbre

C'est la donnée d'une structure $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, ', \Diamond, 0, 1 \rangle$ où $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ est une algèbre de Boole sur l'ensemble B et $\Diamond$ est un opérateur unaire sur B vérifiant (avec la convention habituelle que $x \leqslant y$ dans $\mathcal{B}$ ssi $x \wedge y = x$ ).

1. $x \leqslant \Diamond x$ pour tout $x \in \mathcal{B}$
2. $\Diamond (x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$ pour tout $x,y \in \mathcal{B}$
3. $\Diamond 0 = 0$

Bien entendu le quotient $\mathcal{F}(T)_{/eq}$ des formules du système T par la relation

"A eq B ssi A $\Longleftrightarrow$ B est une thèse du système T" est une T-algèbre qui vérifie [A] = 1 ssi A est une thèse du système T, [A] étant la classe de A dans $\mathcal{F}(T)_{/eq}$.

Un *morphisme de T-algèbres* étant défini comme une application conservant les opérations des T-algèbres (y compris les 0-aires i.e. les constantes) on appellera *modèle T-algébrique* d'un système T le couple ($\mathcal{B}$,h) d'une T-algèbre $\mathcal{B}$ et d'un morphisme de T-algèbres h de $\mathcal{F}(T)_{/eq}$ dans $\mathcal{B}$. On dira que A $\in$ $\mathcal{F}$(T) est *T-algébriquement valide* dans le modèle ($\mathcal{B}$,h) si h [A] = 1. A est T-algébriquement valide si elle l'est dans tout modèle T-algébrique.

PROPOSITION 10. *Une formule A du système T est T-valide (au sens de Kripke) ssi A est T-algébriquement valide.*

5.3. S4-algèbre

C'est une T-algèbre vérifiant en plus l'axiome

$$4. \qquad \Diamond\Diamond x = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathcal{B}.$$

Un instant d'attention aux axiomes 1 à 4 montre que l'opération $\Diamond$ dans une S4-algèbre est une fermeture au sens de Kuratowski et qu'elle munit donc la S4-algèbre d'une structure d'espace topologique. C'est pourquoi l'on peut considérer le système S4 comme mathématiquement le plus intéressant. Ceci était à prévoir dès le moment où l'on avait défini des S4-modèles au sens de Kripke comme étant des ensembles munis d'une relation de préordre. Par analogie avec le § 5.2. on définit les *morphismes de S4-algèbres*, les *modèles S4-algébriques*, la *validité S4-algébrique*.

PROPOSITION 11. *Une formule A du système S4 est S4-valide (au sens de Kripke) ssi A est S4-algébriquement valide.*

Sans entrer dans les détails, que l'on trouvera dans Fitting [1], signalons une très importante propriété du système S4 : il existe une correspondance M qui à toute formule du calcul propositionnel intuitionniste associe une formule de S4. Elle est définie récursivement comme suit

(0) $M(p) = \Box\, p$ si p est une variable

(1) $M(A \wedge B) = M(A) \wedge M(B)$

(2) $M(A \vee B) = M(A) \vee M(B)$

(3) $M(\neg A) = \Box \neg M(A)$

(4) $M(A \Rightarrow B) = \Box\, (M(A) \Rightarrow M(B))$

La propriété intéressante de cette correspondance (moins triviale qu'elle n'en a l'air car à gauche il s'agit des connecteurs intuitionnistes) est la suivante.

PROPOSITION 12. *Une formule A du calcul des propositions intuitionniste est valide (au sens intuitionniste) ssi M(A) est S4-valide.*

5.4. S5-algèbre

C'est une S4-algèbre vérifiant en plus l'axiome

$$5. \quad \Diamond x = 1 \quad \text{pour tout } x \neq 0 .$$

On voit donc que la topologie est passablement "aplatie" dans S5, ce qui rend ce système moins intéressant que S4. On avait d'ailleurs vu un phénomène analogue avec les S5-modèles au sens de Kripke.

On définira encore par analogie avec les paragraphes précédents les *morphismes de S5-algèbres*, les *modèles S5-algébriques*, la *validité S5-algébrique*.

PROPOSITION 13. *Une formule A du système S5 est S5-valide (au sens de Kripke) ssi A est S5-algébriquement valide.*

Désormais on s'en tiendra pour l'essentiel à S4.

## 6. DEDUCTION NATURELLE POUR S4

Il s'agit de déduction naturelle à la Smullyan [9].

6.1. Règles pour les arbres ("tableaux" de Smullyan)

Une *formule signée* est par définition TX ou FX, X étant une formule de S4.

$\mathcal{S}$ étant un ensemble de formules signées, on désignera par $\mathcal{S}$,A l'ensemble $\mathcal{S} \cup \{A\}$ pour toute formule signée A. Enfin par $\mathcal{S}_\Box$ on entend l'ensemble $\{T \Box X : T \Box X \in \mathcal{S}\}$.

Voici les règles :

(MT∧) $\dfrac{\mathcal{S},\ T(X \wedge Y)}{\mathcal{S},\ TX,\ TY}$ (MF∧) $\dfrac{\mathcal{S},\ F(X \wedge Y)}{\mathcal{S},\ FX \mid \mathcal{S},FY}$

(MT∨) $\dfrac{\mathcal{S},\ T(X \vee Y)}{\mathcal{S},\ TX \mid \mathcal{S},TY}$ (MF∨) $\dfrac{\mathcal{S},\ F(X \vee Y)}{\mathcal{S},\ FX\ ,\ FY}$

(MT¬) $\dfrac{\mathcal{S},\ T\ (\neg X)}{\mathcal{S},\ FX}$ (MF¬) $\dfrac{\mathcal{S},\ F\ (\neg X)}{\mathcal{S},\ TX}$

(MT⇒) $\dfrac{\mathcal{S},\ T\ (X \Rightarrow Y)}{\mathcal{S},\ FX \mid \mathcal{S}\ ,TY}$ (MF⇒) $\dfrac{\mathcal{S},\ F\ (X \Rightarrow Y)}{\mathcal{S},\ TX,\ FY}$

(MT□) $\dfrac{\mathcal{S},\ T \Box X}{\mathcal{S},\ TX}$ (MF□) $\dfrac{\mathcal{S},\ F \Box X}{\mathcal{S}_\Box,\ FX}$

$\mathcal{U}$ étant un ensemble de formules signées, on dira que la règle (R) (ce symbole est une variable qui prend ses valeurs parmi les règles écrites ci-dessus) *s'applique à* $\mathcal{U}$ si par un choix convenable de $\mathcal{S}$ , X, Y l'ensemble des formules signées au-dessus de la ligne dans la règle (R) devient $\mathcal{U}$ .

Une *application* de la règle (R) à $\mathcal{U}$ est la substitution à $\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ si (R) est (MF$\wedge$), (MT$\vee$) ou (MT$\Rightarrow$)) où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des formules au-dessus de la ligne dans la règle (R) (après substitution convenable pour $\mathcal{S}$ , X, Y) et $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$) est l'ensemble des formules sous la ligne. Ce qui précède suppose implicitement que (R) s'applique à $\mathcal{U}$. Si ce n'est pas le cas, par convention le résultat est de nouveau $\mathcal{U}$.

Une *configuration* est un ensemble fini $\{ \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ d'ensembles de formules signées.

Une *application* de la règle (R) à la configuration $\{ \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ consiste à remplacer cette configuration par celle qui résulte en y remplaçant chaque $\mathcal{S}_i$ par le résultat (resp. les résultats) de l'application de (R) à $\mathcal{S}_i$.

Un *arbre* (ou "tableau") est une suite finie $C_1, C_2, \dots, C_m$ de configurations, dans laquelle chaque configuration, sauf la première, est le résultat de l'application d'une des règles ci-dessus à la configuration précédente.

Un ensemble $\mathcal{S}$ de formules signées est *clos* s'il contient à la fois TX et FX pour une formule X. Une configuration $\{ \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ est *close* si chacun des $\mathcal{S}_i$ est clos. Un arbre $C_1, C_2, \dots, C_m$ est clos si l'un des $C_j$ est clos.

Un *arbre pour un ensemble* $\mathcal{S}$ de formules signées est un arbre $C_1, C_2, \dots, C_m$ avec $C_1 = \{\mathcal{S}\}$.

Un ensemble fini $\mathcal{S}$ de formules signées est *inconsistant* s'il y a un arbre pour $\mathcal{S}$ qui est clos. Sinon, $\mathcal{S}$ est *consistant*. X est une *thèse* de S4 si {FX} est inconsistant, et un arbre clos pour {FX} est une *démonstration* de X. $\vdash_{S4}$ X est une notation pour 'X est une thèse de S4'.

6.2. Motivation et interprétation intuitive

Supprimons les règles (MT$\square$) et (MF$\square$) du §6.1., et interprétons TX comme signifiant 'X est vraie', FX comme signifiant 'X est fausse'. (R) peut alors être interprétée comme suit : si l'ensemble des formules au-dessus de la ligne est constituée de formules vraies, alors celui (resp. ceux) en-dessous de la ligne aussi. On peut alors remplacer TX par X, FX par $\neg$ X et une démonstration au sens défini ci-dessus devient un procédé de réfutation.

En effet, supposons X fausse (commencer l'arbre par {FX}) ; on en conclut, puisqu'on aboutit à une configuration close, qu'une formule doit être simultanément vraie et fausse. Ceci étant impossible, X est vraie.

Dans le système S4, l'interprétation est différente. TX signifie que X est vraie dans un monde possible $\Gamma$, FX que X y est fausse. La règle (R) signifie maintenant que si la situation au-dessus de la ligne a lieu, alors la situation au-dessous de la ligne est accessible (i.e. a lieu dans un monde possible $\Gamma^*$ accessible à partir de $\Gamma$). Soit par exemple la règle (MF$\Box$), la seule quelque peu délicate à interpréter. Puisque la situation $\mathcal{S}$, F $\Box$ X a lieu dans $\Gamma$, donc $\Box$ X est fausse dans $\Gamma$, il y a un $\Gamma^*$ accessible à partir de $\Gamma$ où X est fausse, et il faut donc inscrire FX sous la ligne. Pour ce qui est des formules (signées) de $\mathcal{S}$, on ne peut affirmer qu'elles sont vraies dans $\Gamma^*$ que si elles sont de la forme T $\Box$ Y, car alors Y est vraie dans tout monde accessible à partir de $\Gamma$ et donc aussi dans $\Gamma^*$ ainsi que dans tout monde accessible à partir de $\Gamma^*$ ; on ne peut donc inscrire sous la ligne que l'ensemble $\mathcal{S}_\Box = \{T \Box Y : T \Box Y \in \mathcal{S}\}$. Les démonstrations se font encore par réfutation : supposons que X soit fausse dans un monde $\Gamma$ (commencer l'arbre par {FX}). On en conclut qu'une formule est à la fois vraie et fausse dans un monde $\Gamma^*$ (accessible à partir de $\Gamma$). Ceci étant impossible X est vrai dans $\Gamma$, et ceci pour tout $\Gamma$.

## 6.3. Adéquation des arbres

On dira qu'un ensemble de formules signées $\mathcal{S} = \{TX_1,\dots,TX_n,FY_1,\dots,FY_m\}$ est *réalisable* s'il y a un S4-modèle de Kripke ($\mathcal{G}$, R, $\models$) et un monde possible $\Gamma \in \mathcal{G}$ tels qu'on ait :

$$\Gamma \models X_1,\dots,\ \Gamma \models X_n,\ \Gamma \not\models Y_1,\dots,\ \Gamma \not\models Y_m$$

on dit que $\Gamma$ *réalise* $\mathcal{S}$ .

Si $\{\mathcal{S}_1,\dots,\mathcal{S}_p\}$ est une configuration on la dit *réalisable* si l'un des $\mathcal{S}_i$ de cette configuration l'est.

PROPOSITION 14. *Soit* $C_1,\dots,C_n$ *un arbre. Si* $C_i$ *est réalisable alors* $C_{i+1}$ ($i = 1,\dots, n-1$) *l'est aussi.*

PROPOSITION 15. *Les règles du § 6.1. sont adéquates, i.e. si* $\vdash_{S4} X$ *alors X est S4-valide.*

## 6.4. Collections de Hintikka

Par analogie avec le cas classique, et bien que sa signification intuitive soit moins évidente, on appelle *collection de Hintikka* toute collection $\mathcal{G}$ d'ensembles consistants de formules signées vérifiant pour chaque $\Gamma \in \mathcal{G}$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (HT$\wedge$) | si | $T(X\wedge Y) \in \Gamma$ | alors | $TX \in \Gamma$ | et $TY \in \Gamma$ |
| (HF$\wedge$) | si | $F(X\wedge Y) \in \Gamma$ | alors | $FX \in \Gamma$ | ou $FY \in \Gamma$ |
| (HT$\vee$) | si | $T(X\vee Y) \in \Gamma$ | alors | $TX \in \Gamma$ | ou $TY \in \Gamma$ |
| (HF$\vee$) | si | $F(X\vee Y) \in \Gamma$ | alors | $FX \in \Gamma$ | et $FY \in \Gamma$ |
| (HT$\neg$) | si | $T\neg X \in \Gamma$ | alors | $FX \in \Gamma$ | |
| (HF$\neg$) | si | $F\neg X \in \Gamma$ | alors | $TX \in \Gamma$ | |
| (HT$\Rightarrow$) | si | $T(X\Rightarrow Y) \in \Gamma$ | alors | $FX \in \Gamma$ | ou $TY \in \Gamma$ |
| (HF$\Rightarrow$) | si | $F(X\Rightarrow Y) \in \Gamma$ | alors | $TX \in \Gamma$ | et $FY \in \Gamma$ |
| (HT$\Box$) | si | $T \Box X \in \Gamma$ | alors | $TX \in \Gamma$ | |
| (HF$\Box$) | si | $F \Box X \in \Gamma$ | alors | pour un $\Delta \in \mathcal{G}$, $\Gamma_\Box \subset \Delta$ et $FX \in \Delta$. | |

Soit $\mathcal{G}$ une collection de Hintikka. On dira que $(\mathcal{G}, R, \models)$ est un *modèle* de $\mathcal{G}$ si :

1) $(\mathcal{G}, R, \models)$ est un S4-modèle au sens de Kripke.
2) si $\Gamma_\Box \subset \Delta$ alors $\Gamma R \Delta$ .
3) si $TX \in \Gamma$ alors $\Gamma \models X$ et si $FX \in \Gamma$ alors $\Gamma \not\models X$.

THEOREME 1. *Toute collection de Hintikka admet un modèle.*
SCHOLIE. *Pour démontrer la complétude de la méthode, il suffit de démontrer que si* $\not\vdash_{S4} X$ *alors il y a une collection de Hintikka* $\mathcal{G}$ *telle que pour un* $\Gamma \in \mathcal{G}$ *on ait* $FX \in \Gamma$.

PROPOSITION 16. *La méthode des arbres est complète.*

REMARQUE 1. En vertu de la prop. 12 on aurait pu démontrer ces propriétés à partir de celles, analogues, du calcul des propositions intuitionnistes. C'est ce qui est fait dans Fitting [1].
REMARQUE 2. La méthode, que nous avons appelé méthode des arbres est en fait celle des configurations. Le lecteur avisé associera à chaque configuration un arbre et inversement.

## 7. LA VARIANTE DE FITTING [2]

Partant d'une idée de Fitch, il s'agit d'utiliser la méthode des arbres du §6, mais en incorporant au système formel des symboles représentant des mondes possibles (au sens de Kripke). Ici on ne présentera que la version abrégée valable pour le système S4.

### 7.1. Arbres et formules préfixées

On se donne le couple $(\mathcal{G}_o, R_o)$ d'un univers $\mathcal{G}_o$ et d'une relation $R_o$ réflexive et transitive sur $\mathcal{G}_o$, fixés une fois pour toutes. X étant une formule (de S4) et $P \in \mathcal{G}_o$, on dira que PX est une *formule préfixée*.

S étant un ensemble de formules préfixées, $(\mathcal{G}, R, \models)$ un S4-modèle au sens de Kripke, I une application d'une partie de $\mathcal{G}_o$ dans $\mathcal{G}$, on dira que I est une *interprétation* de l'ensemble F des préfixes des formules X dans S si

1) le domaine de I est F

2) pour tout $P,Q \in F$ si $P\ R_o\ Q$ alors $I(P)\ R\ I(Q)$

Si de plus $PX \in X$ entraine $I(P) \models X$, on appellera $((\mathcal{G}, R, \models), I)$ une (S4-) réalisation de S ; dans ce cas S est dit (S4-) réalisable.

Soit maintenant $\varphi$ une application de $\mathcal{G}_o \times \mathcal{P}(\mathcal{G}_o)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{G}_o)$, où $\mathcal{P}$ est l'opérateur ensemble des parties. On dira que $\varphi$ est une *fonction de sélection* pour $(\mathcal{G}_o, R_o)$ si pour chaque partie finie F de $\mathcal{G}_o$, et pour chaque $P \in F$, $\varphi(P,F) \neq \emptyset$ et si $Q \in \varphi(P,F)$ entraîne $P\ R_o\ Q$.

Soit alors $\varphi$ une fonction de sélection pour $(\mathcal{G}_o, R_o)$ ; on dira que $((\mathcal{G}_o, R_o), \varphi)$ est une *structure de tableau* (pour S4) si

1) $(\mathcal{G}_o, R_o)$ est une (S4-) structure dénombrable.

2) Si S est un ensemble fini quelconque de formules préfixées qui est (S4-) réalisable et si F est l'ensemble des préfixes des formules de S, alors

(2.1.) si $P \Box X \in S$ ou $P \Diamond X \in S$ et $Q \in \varphi(P,F)$ alors $S, QX$ est (S4-) réalisable.

(2.2.) si $P \neg \Box X \in S$ ou $P \neg \Diamond X \in S$ et $Q \in \varphi(P,F)$ alors $S, Q \neg X$ est réalisable.

Voici comment construire un arbre pour une structure de tableau. Soit $((\mathcal{G}_o, R_o), \varphi)$ une structure de tableau fixe. On définit les composantes de formules préfixées $\alpha$, $\beta$ comme suit

| $\alpha$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |
|---|---|---|
| $P(X \wedge Y)$ | $PX$ | $PY$ |
| $P \neg (X \vee Y)$ | $P \neg X$ | $P \neg Y$ |
| $P \neg (X \Rightarrow Y)$ | $PX$ | $P \neg Y$ |
| $P \neg \neg X$ | $PX$ | $PX$ |

| $\beta$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ |
|---|---|---|
| $P(X \vee Y)$ | $PX$ | $PY$ |
| $P \neg (X \wedge Y)$ | $P \neg X$ | $P \neg Y$ |
| $P(X \Rightarrow Y)$ | $P \neg X$ | $PY$ |

On définit aussi les formules préfixées $\nu$ (nécessaire) et $\pi$ (possible) par

| $\nu$ | $\nu(Q)$ |
|---|---|
| $P \Box X$ | $QX$ |
| $P \neg \Diamond X$ | $Q \neg X$ |

| $\pi$ | $\pi(Q)$ |
|---|---|
| $P \Diamond X$ | $QX$ |
| $P \neg \Box X$ | $Q \neg X$ |

Soit PX une formule préfixée quelconque. Un (S4-) *arbre pour PX* est construit comme suit :

(i) inscrire au sommmet PX ;

(ii) si une formule de type $\alpha$ se présente sur une branche, prolonger cette branche en y inscrivant $\alpha_1$ et $\alpha_2$ successivement ;

(iii) si une formule de type $\beta$ se présente, bifurquer en inscrivant $\beta_1$ à gauche, $\beta_2$ à droite ;

(iv) si une formule de type $\pi$ se présente, avec préfixe P, prolonger ladite branche en y rajoutant $\pi(Q)$ avec $Q \in \varphi(P,F)$, F étant l'ensemble des préfixes ayant une occurrence dans les formules situées sur la branche examinée. On conçoit $\varphi$ comme opérant une sélection de préfixes qui sont dans la relation $R_o$ avec P, mais qui sont non-restreintes par les autres préfixes de la branche. Brièvement : on peut rajouter $\pi(Q)$ à une branche contenant $\pi$ pour tout Q relié, non-restreint ;

(v) si une formule de type $\nu$ se présente, avec préfixe P, prolonger la branche en y rajoutant $\nu(Q)$ soit pour les $Q \in \varphi(P,F)$, F étant l'ensemble des préfixes ayant une occurrence sur la branche, soit pour les $Q \in F$ tels que $P\ R_o\ Q$. Brièvement : on peut rajouter $\nu(Q)$ à une branche contenant $\nu$ pour tout Q relié qui est soit non-restreint soit utilisé auparavant.

On peut représenter graphiquement ces cas :

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} \qquad\qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

$$\frac{\nu}{\nu(Q)}$$ Q relié, non-restreint ou utilisé

$$\frac{\pi}{\pi(Q)}$$ Q relié, non-restreint

Une branche est *close* si elle contient à la fois PY et $P \neg Y$ pour une formule Y et un préfixe P. Un arbre est *clos* si toutes ses branches sont closes. X est une (S4-) *thèse* s'il y a un arbre clos pour $P \neg X$, pour un préfixe P.

Interprétation intuitive : PX signifie $P \models X$.

### 7.2. Adéquation

PROPOSITION 17. *Soit S un ensemble de formules préfixées :*
*(a) si* $S, \alpha$ *est réalisable alors* $S, \alpha_1, \alpha_2$ *l'est aussi ;*
*(b) si* $S, \beta$ *est réalisable alors* $S, \beta_1\beta_1$ *ou* $S, \beta_1\beta_2$ *l'est aussi.*

PROPOSITION 18. *Soit* $S, \nu$ *un ensemble fini de formules préfixées, F l'ensemble des préfixes de cet ensemble, P le préfixe de* $\nu$, $Q \in F$, $P\ R_o\ Q$. *Alors* $S, \nu$

*réalisable entraîne* $S, \nu, \nu(Q)$ *réalisable* .

On dira qu'une branche est (S4-) *réalisable* si l'ensemble des formules y inscrites l'est ; un arbre est (S4-) *réalisable* si l'une des ses branches l'est.

THEOREME 2. *Si* $\mathcal{C}$ *est un arbre réalisable et si* $\mathcal{C}'$ *est obtenu à partir d'une des règles en fin du § 7.1., alors* $\mathcal{C}'$ *aussi est réalisable.*

COROLLAIRE. *Si X est démontrable par la méthode des arbres alors X est valide dans tous les S4-modèles de Kripke.*

### 7.3. (S4-) ensembles de Hintikka

Un ensemble S de formules préfixées est un (S4-) *ensemble de Hintikka* si :

(0) pour aucune formule atomique et aucun préfixe P on n'a simultanément PA, $P \neg A \in S$.

(1) si $\alpha \in S$ alors $\alpha_1$ et $\alpha_2 \in S$.

(2) si $\beta \in S$ alors $\beta_1$ ou $\beta_2 \in S$.

(3) si $\nu \in S$ alors $\nu(Q) \in S$ pour tout $Q \in F$ dans la relation $R_o$ avec le préfixe de $\nu$, et il y a des $Q \in F$ dans la relation $R_o$ avec le préfixe de $\nu$.

(4) si $\pi \in S$ alors $\pi(Q) \in S$ pour un $Q \in F$ dans la relation $R_o$ avec le préfixe de $\pi$.

THEOREME 3. *Tout (S4-) ensemble de Hintikka est (S4-) réalisable.*

### 7.4. Complétude

THEOREME 4. *Si X est S4-valide alors X est démontrable par la méthode des arbres.*

On ne traitera pas l'extension de la méthode au calcul des prédicats modal du 1er ordre. Le lecteur trouvera facilement dans les ouvrages indiqués en bibliographie les indications nécessaires.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] FITTING M., *Intuitionnistic Logic, Model Theory and Forcing,* Amsterdam, North-Holland, 1969.

[2] FITTING M., "Tableau Methods of Proof for Modal Logics", *Notre Dame Jr.,* XIII (1972), 237-247.

[3] HUGUES C.E. & CRESWELL M.J., *An introduction to Modal Logic,* London, Methuen, 1968.

[4] SCHÜTTE K., *Vollständige Systeme Modaler und Intuitionistischer Logik,* Berlin, Springer, 1968.

[5] KRIPKE S., "A Completeness Theorem in Modal Logic", *Jr. Symb. Log.,* 24 (1959), 1-14.

[6] KRIPKE S., "Semantic Analysis of Modal Logic I", *Zeitschr. für Mat. Log.,* 8 (1962), 67-96.

[7] LEWIS C.I. & LANGFORD C.H., *Symbolic Logic,* New York, Dover, 1932.

[8] MC KINSEY J.C.C. & TARSKI A., "Some Theorems about Sentential Calculi of Lewis and Heyting", *Jr. Symb. Log.,* 13 (1948).

[9] SMULLYAN R., *First Order Logic,* Berlin, Springer, 1968.