MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. HADJIAT

Construction et étude axiomatique d'une procédure d'agrégation des préférences individuelles

Mathématiques et sciences humaines, tome 52 (1975), p. 21-34

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1975__52__21_0>

Math. Sci. hum. (*13*^{e} année, n°52, *1975*, p.21-34)

CONSTRUCTION ET ETUDE AXIOMATIQUE D'UNE PROCEDURE D'AGREGATION DES PREFERENCES INDIVIDUELLES*

M.HADJIAT

INTRODUCTION

"Il n'existe qu'une seule méthode rigoureuse de connaitre le voeu de la pluralité dans une élection. Elle consiste à prendre ce voeu sur le mérite respectif de tous les concurrents comparés deux à deux ... Mais :
1°/ Cette méthode est très longue
2°/ Il peut arriver qu'aucun concurrent ne soit déclaré supérieur à tous les autres par la pluralité." C'est en ces termes que Condorcet évoquait les difficultés logiques rencontrées pour dégager une opinion collective. K.J.Arrow a analysé ce problème logique et a prouvé qu'étant donnés un ensemble E de n options, $n \geqslant 3$ et un ensemble V de v votants, $v \geqslant 2$, il n'existe aucune procédure d'agrégation satisfaisant aux axiomes I (universalité), II (corrélation positive entre les préférences individuelles et la préférence collective), III (indépendance) IV (souveraineté de la collectivité) et V (non dictature).

Ce travail a un double but, d'une part exposer la construction d'une nouvelle procédure d'agrégation en donnant un algorithme permettant ainsi la mise en oeuvre de la procédure, d'autre part présenter une étude axiomatique de cette procédure d'agrégation et établir une comparaison du point de vue axiomatique avec des procédures d'agrégation connues telles que les procédures de Condorcet, de Borda et de Jacquet-Lagreze.

---

*Ce travail a été fait au Département de Mathématiques de l'Université d'Oran, après la préparation d'un doctorat d'Etat à l'Institut de Statistiques de l'Université de Paris sous la direction de Monsieur le Professeur D.DUGUE et avec l'aide précieuse de Monsieur le Professeur G.KREWERAS.

On considère un ensemble V de v votants, $v \geq 2$ et un ensemble E de n options, $n \geq 3$, $E = \{1,2,\ldots,i,\ldots,j,\ldots,n\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots\}$ Les "options" peuvent être des actions possibles, des objets (biens ou ressources économiques), des agents économiques, des hommes politiques, des projets de loi, des projets de réalisation etc.. Les "votants" peuvent être des états de la nature, des branches d'activité, des critères de classification d'affectation, des électeurs etc..

.Définitions

Nous définissons l'opinion d'un votant v_i sur E comme un couple de relations R_{v_i} et P_{v_i} où R_{v_i} est un préordre total et P_{v_i} un ordre:

$\forall i,j \in ExE$, $i \; R_{v_i} \; j$ signifie i est "au moins aussi bon" que j selon le votant v_i.

$\forall i,j \in ExE$, $i \; P_{v_i} \; j$ signifie i est "meilleur" que j selon le votant v_i et on écrit $i \succ j$

$\forall i,j \in ExE$, "i est aussi bon que j" s'écrit $i =. j$.

L'ensemble des opinions de tous les votants constitue un état de l'opinion. Nous désignons par $\mathcal{M}_o$ l'ensemble de tous les états de l'opinion.

Nous définissons une opinion collective comme une relation de préordre total sur E. Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les préordres totaux sur E.

Nous définissons une procédure d'agrégation comme une application de l'ensemble $\mathcal{M}_o$ dans l'ensemble $\mathcal{M}$.

Soit à déterminer une procédure d'agrégation f vérifiant les axiomes suivants:

Axiome I

L'application f est définie pour tout état de l'opinion.

Axiome II

Pour toute option x et pour tout état de l'opinion ρ' se déduisant d'un état de l'opinion ρ par une modification favorable à l'option x dans une ou plusieurs opinions individuelles, l'opinion collective $f(\rho')$ est au moins aussi favorable (éventuellement plus favorable) à x que l'opinion collective $f(\rho)$.

Axiome IV

Pour tout couple d'options, il existe un état de l'opinion ρ

auquel la procédure d'agrégation f fait correspondre une opinion collective $f(\rho)$ dans laquelle l'option x est strictement préférée à l'option y:

$\forall x,y \in E\times E$ tels que $x \neq y$ $\exists \rho \in \mathcal{M}_0$ tel que $x\ P\ y$.

Axiome V

La procédure f n'est pas dictatoriale.

Axiome VI

Toute option x placée seule en tête (respectivement seule en queue) par la majorité absolue des votants, est placée seule en tête (respectivement seule en queue) par la collectivité.

Axiome VII

Pour tout état de l'opinion sans "effet Condorcet", la procédure f conduit à un préordre collectif identique à celui obtenu à l'aide de la procédure de Condorcet.

En vertu du théorème d'impossibilité de K.J.Arrow, la procédure f cherchée ne vérifie évidemment pas l'axiome d'indépendance d'Arrow (Axiome III).

Désignons par H l'ensemble des préordres totaux sur E, par V_h le nombre de votants qui expriment un même préordre total $h \in H$ et par H_{ij} l'ensemble des préordres totaux dans lesquels l'option i est avant l'option j.

.Définition 1

Pour tout couple d'options distinctes i et j on définit la valeur $\varphi(i,j)$ telle que

$$\varphi(i,j) = \sum_{h \in H_{ij}} V_h - \sum_{h \in H_{ji}} V_h$$

.Remarque

Pour tout $i \in E$ on convient que $\varphi(i,i) = 0$.

$\forall i,j \in E$ on a évidemment $\varphi(i,j) + \varphi(j,i) = 0$.

PROPOSITION I Pour tout état de l'opinion ρ sans "effet Condorcet", la procédure de Condorcet conduit à un préordre collectif tel que : $\forall i,j \in E,\ i \gtrdot j \iff \varphi(i,j) > 0$.

Cela est évident en vertu de la définition 1.

.Remarque

Considérons le tableau carré des valeurs $\varphi(i,j)$, $i,j \in E$: Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots c_j, \ldots, c_n$ les n colonnes du tableau. Supposons que pour tout c_i et pour tout c_j la colonne c_i est disposée dans le tableau avant la colonne c_j si et seulement si $i \gtrdot j$ pour la collectivité selon la procédure de Condorcet. On remarque dans ce cas que toutes les valeurs $\varphi(i,j)$ situées au-dessus de la diagonale principale sont strictement positives et toutes celles qui sont situées au-dessous de la diagonale principale sont strictement négatives.

.<u>Définition</u> 2

Pour toute option i, on définit la valeur S(i) telle que:

$$S(i) = \sum_{j=1}^{j=n} \varphi(i,j).$$

.<u>Définition</u> 3

On considère les ensembles $T_1(E)$, $T_2(E)$ et $T_3(E)$ définis de la façon suivante: $T_1(E) = \{i \in E/S(i) > 0\}$; $T_2(E) = \{i \in E/S(i) = 0\}$ et $T_3(E) = \{i \in E/S(i) < 0\}$.

.<u>Remarque</u> 1

$T_2(E) \neq E \Longrightarrow T_1(E) \neq \emptyset$ et $T_3(E) \neq \emptyset$.

$T_1(E) \neq \emptyset \Longleftrightarrow T_3(E) \neq \emptyset$

Considérons en effet le tableau des valeurs $\varphi(i,j)$, $i,j \in E$

$\varphi(i,j) + \varphi(j,i) = 0 \quad \forall\, i,j \in E$ et $\varphi(i,i) = 0 \quad \forall\, i \in E$,

il est par conséquant évident que, pour tout état de l'opinion, la somme de toutes les valeurs de ce tableau est nulle:

$$\sum_{i,j \in E} \varphi(i,j) = 0 \qquad (1)$$

Supposons que $T_2(E) \neq E$, alors dans ce cas (1) ne peut être réalisé que si $T_3(E) \neq \emptyset$ et $T_1(E) \neq \emptyset$.

D'autre part, en vertu de (1) il est bien évident que

$$T_1(E) \neq \emptyset \Longleftrightarrow T_3(E) \neq \emptyset$$

.<u>Remarque</u> 2

Il résulte de ce qui précède que pour tout état de l'opinion ρ on a: $T_1(E) \neq E$ et $T_3(E) \neq E$ et par suite

$$|T_1(E)| < E \quad \text{et} \quad |T_3(E)| < E \qquad (2)$$

CONSTRUCTION DE LA PROCEDURE D'AGREGATION f

La procédure d'agrégation f consiste à effectuer un certain nombre d'opérations notées $_o$, $_1$, ..., $_p$. L'opération consiste à déterminer les éléments maximaux et les éléments minimaux de E. On désigne par M_E l'ensemble des éléments maximaux de E et par m_E l'ensemble des éléments minimaux de E. Soit à déterminer l'ensemble M_E. On considère les ensembles $T_1(E)$, $T_2(E)$ et $T_3(E)$ définis précédemment. Trois cas sont à envisager: l'ensemble $T_1(E)$ est tel que $|T_1(E)| \geqslant 2$, dans ce cas il s'agit

de déterminer l'ensemble $M_{T_1(E)}$ et on pose par définition (récurrente en vertu de la remarque 2) $M_E = M_{T_1(E)}$.
L'ensemble $T_1(E)$ est tel que $|T_1(E)| = 1$, dans ce cas on a $M_E = T_1(E)$.
L'ensemble $T_1(E)$ est vide, dans ce cas, en vertu de la remarque 1 on a nécessairement $T_2(E) = E$ et par suite $M_E = T_2(E) = E$.
Soit à déterminer l'ensemble m_E. D'une manière analogue on envisage les trois cas suivants: si $|T_3(E)| \geq 2$ alors $m_E = m_{T_3(E)}$. Si $|T_3(E)| = 1$ alors $m_E = T_3(E)$ et si $T_3(E) = \emptyset$ alors nécessairement $T_2(E) = E$ et par suite $m_E = T_2(E) = E$.
Considérons maintenant l'ensemble E_1 tel que $E_1 = E - M_E - m_E$.
L'opération Ω_1 consiste à déterminer les ensemble M_{E_1} et m_{E_1} de la même façon que précédemment. Et ainsi de suite de sorte que la $p^{\text{ième}}$ opération Ω_{p-1} permet de déterminer les ensembles $M_{E_{p-1}}$ et $m_{E_{p-1}}$ où $E_{p-1} = E_{p-2} - M_{E_{p-2}} - m_{E_{p-2}}$.

Deux cas peuvent se produire:
a/ $E_{p-1} = M_{E_{p-1}} \cup m_{E_{p-1}}$, dans ce cas la procédure d'agrégation f conduit à l'ordre collectif:

$$M_E \succ M_{E_1} \succ M_{E_2} \succ \cdots \succ M_{E_{p-1}} \succ m_{E_{p-1}} \succ m_{E_{p-2}} \succ \cdots \succ m_E.$$

$\forall i,j \in (1,\dots,p-1)$ M_{E_i} et m_{E_j} sont des classes d'indifférences telles que:

$$|M_{E_i}| \geq 1 \quad \text{et} \quad |m_{E_j}| \geq 1.$$

b/ $E_{p-1} = M_{E_{p-1}} \cup m_{E_{p-1}} \cup X$ où $X \subset E$ et $T_2(X) = X$, dans ce cas la procédure d'agrégation f conduit à l'ordre collectif :

$$M_E \succ M_{E_1} \succ M_{E_2} \succ \cdots \quad M_{E_{p-1}} \succ X \succ m_{E_{p-1}} \succ m_{E_{p-2}} \succ \cdots \succ m_E.$$

$\forall i,j \in (1,\dots,p-1)$ M_{E_i} et m_{E_j} sont des classes d'indifférences.

Exemple
Appliquons la procédure d'agrégation f à l'exemple suivant étudié par MM G.Th.Guilbaud et P. Rosenstiehl selon la procédure de Condorcet: E est un ensemble de sept candidats (a,b,c,d,e,f, g) et V un ensemble de 15 juges désignés par des numéros (1 à 15) et exprimant les préférences suivantes:

1/ $b \succ c \succ d \succ f \succ e \succ a \succ g$
2/ $d \succ e \succ g \succ b \succ a \succ f \succ c$

3/ $d \succsim a \succsim c \succsim e \succsim f \succsim g \succsim b$

4/ $c \succsim d \succsim e \succsim f \succsim g \succsim a \succsim b$

5/ $a \succsim b \succsim c \succsim d \succsim e \succsim f \succsim g$

6/ $d \succsim e \succsim c \succsim f \succsim b \succsim a \succsim g$

7/ $b \succsim a \succsim d \succsim c \succsim e \succsim f \succsim g$

8/ $a \succsim b \succsim c \succsim g \succsim d \succsim e \succsim f$

9/ $d \succsim c \succsim a \succsim e \succsim f \succsim b \succsim g$

10/ $b \succsim e \succsim a \succsim c \succsim f \succsim g \doteq d$

11/ $c \succsim b \succsim d \succsim f \succsim a \succsim e \succsim g$

12/ $c \succsim f \succsim g \succsim b \succsim a \succsim e \succsim d$

13/ $a \succsim c \succsim g \succsim d \succsim e \succsim f \succsim b$

14/ $b \succsim g \succsim f \succsim a \succsim c \succsim d \succsim e$

15/ $f \succsim b \succsim e \succsim a \succsim c \succsim d \succsim g$

Nous obtenons le tableau des valeurs φ (i,j) suivant:

i \ j	a	b	c	d	e	f	g
a	0	-3	3	1	3	1	7
b	3	0	1	3	3	1	5
c	-3	-3	0	5	7	9	11
d	-1	-3	-5	0	9	7	6
e	-3	-3	-7	-9	0	5	7
f	-1	-1	-9	-7	-5	0	7
g	-7	-5	-11	-6	-7	-7	0

Opération Ω_o: E = (a,b,c,d,e,f,g)

$T_1(E) = (a,b,c,d) = E^1$ $\qquad$ $T_3(E) = (e,f,g) = E^2$

$T_1(E^1) = (a,b,c) = E'^1$ $\qquad$ $T_3(E^2) = (g) = m_E$

$T_1(E'^1) = (b) = M_E$

Opération Ω_1 : $E_1 = E - M_E - m_E$

$$E_1 = (a,c,d,e,f)$$

$$T_1(E_1) = (a,c,d) = E_1^1 \qquad T_3(E_1) = (e,f) = E_1^2$$

$$T_1(E_1^1) = (a,c) = E_1'^{\,1} \qquad T_3(E_1^2) = (f) = m_{E_1}$$

$$T_1(E_1'^{\,1}) = (a) = M_{E_1}$$

Opération Ω_2 : $E_2 = E_1 - M_{E_1} - m_{E_1}$

$$E_2 = (c,d,e)$$

$$T_1(E_2) = (c,d) = E_2^1 \qquad T_3(E_2) = (e) = m_{E_2}$$

$$T_1(E_2^1) = (c) = M_{E_2}$$

Or $E_2 = M_{E_2} \cup m_{E_2} \cup (d)$

Nous obtenons donc l'ordre collectif :

$$b \succsim a \succsim c \succsim d \succsim e \succsim f \succsim g$$

THEOREME I <u>La procédure d'agrégation f satisfait aux axiomes I, II, IV, V et VI.</u>

Cela est évident quant aux axiomes I, IV et V en vertu de la construction de la procédure f. L'axiome II est vérifié: Considérons un état de l'opinion ρ et l'opinion collective

$$M_E \succsim M_{E^1} \succsim M_{E^2} \succsim \cdots \succsim M_{E^{h-1}} \succsim M_{E^h} \succsim \cdots \succsim m_E$$

On a donc $\sum_{j \in E^h} \varphi(i,j) > 0$, $i \in M_{E^h}$

Supposons que un ou plusieurs votants favorisent la position de i, on obtient ainsi un nouvel état de l'opinion ρ' où $\sum_{j \in E^h} \varphi(i,j)$ est nécessairement positive et $\forall\ \Gamma^k \subset F^h$ on a $\sum_{j \in E^k} \varphi(i,j) > 0$, ainsi pour l'état de l'opinion ρ' l'option i appartient au moins à l'ensemble M_{Γ^h} si i n'appartient pas à un ensemble $M_{E^{h'}}$, tel que $M_{E^{h'}} > M_{\Gamma^h}$.

D'autre part la procédure d'agrégation f vérifie l'axiome VI. Supposons en effet qu'une option $i \in E$ soit placée seule en tête par la majorité absolue des votants; alors $i \in T_1(E)$ et $\forall\ E' \subset E$, $i \in E'$ on a $i \in T_1(E')$ et par suite $M_E = \{i\}$. Donc i est seule en tête pour la collectivité. On montre de même que si i est placée seule en queue par la majorité absolue des votants, elle est placée seule en queue par la collectivité.

THEOREME II <u>La procédure d'agrégation f satisfait à l'axiome VI</u>

Soit ρ un état de l'opinion sans "effet Condorcet" et supposons tout d'abord que la procédure de Condorcet conduise à l'ordre collectif:

$1 > 2 > 3 > \ldots > i > \ldots > j > \ldots > n$ où $\forall\ i,j \in E,\ i > j \Leftrightarrow i > j$

Dans le tableau des valeurs $\varphi(i,j)$, $i \in (1,2,\ldots,n)$, $j \in (1,\ldots,n)$ toutes les valeurs situées au-dessus de la diagonale principale sont strictement positives et toutes celles qui sont situées au-dessous de la diagonale principale sont strictement négatives

Il résulte donc que :

$\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(1,j) = S(i) > 0$ et par suite $1 \in T_1(E)$. D'autre part:

$\sum_{j=1}^{j=n} \varphi(n,j) = S(n) < 0$ et par suite $n \in T_3(E)$. On montre de la même façon que : a/ pour tout ensemble E', $E' \subset E$ tel que $1 \in E'$ on a $1 \in T_1(E')$. On conclut ainsi que $M_E = \{1\}$ parceque à la fin du processus $T_1(E^h) = \{1\}$. b/ pour tout ensemble E'', $E'' \subset E$ tel que $n \in E''$ on a $n \in T_3(E'')$. On conclut alors que $m_E = \{n\}$ parceque à la fin du processus $T_3(E^h) = \{n\}$.

Soit d'autre part $E_1 = E - M_E - m_E$. On obtient à l'aide de l'opération Ω_1 $M_{E_2} = \{2\}$ et $m_{E_2} = \{n-1\}$, et ainsi de suite, si bien que la procédure f conduit à l'ordre collectif $1 > 2 > \ldots > n-1 > n$ identique à celui auquel conduit la procédure de Condorcet.

Considérons maintenant le cas d'un préordre collectif, obtenu à l'aide de la procédure de Condorcet et admettant des exaequos: $1 \succ 2 \succ 3 \succ \dots \quad k =. \ k+1 =. \ k+2 \succ \dots \succ n$

où $\forall \ i,j \in E - \{k,k+1,k+2\}$ on a $i > j \Leftrightarrow i \succ j$

Il résulte du tableau des valeurs $\varphi(i,j)$ $i,j \in E$ que $S(1) > 0$ donc $1 \in T_1(E)$ et $S(n) < 0$ donc $n \in T_3(E)$ et on conclut de la même façon que précédemment que $M_E = \{1\}$ et $m_E = \{n\}$.

On montre aussi que pour $E_1 = E - M_E - m_E$ on obtient $M_{E_1} = \{2\}$, $m_{E_1} = \{n-1\}$, et $\forall \ i \in E - \{k,k+1,k+2,n-k+1,n-k,n-k-1\}$ on a

$$M_{E_{i-1}} = \{i\} \quad \text{et} \quad m_{E_{i-1}} = \{n-i\}$$

Soit l'ensemble $E_i = E_{i-1} - M_{i-1} - m_{E_{i-1}}$. Trois cas sont à envisager:

a/ $i = k$ et $i \notin \{n-k+1,n-k,n-k-1\}$. Ainsi $E_i = \{k,k+1,k+2,\dots,p\}$

Dans ce cas d'après le tableau des valeurs $\varphi(i,j)$ $i,j \in E_i$ il est clair que $S(k) > 0$, $S(k+1) > 0$ et $S(k+2) > 0$, par suite $k,k+1,k+2 \in T_1(E_i)$ et $\forall \ E' \subset E_i$ tel que $k,k+1,k+2 \in E'$ on a: $k,k+1,k+2 \in T_1(E')$ et pour $E'' = \{k,k+1,k+2\}$ on a $k,k+1,k+2 \in T_2(E'')$ et par suite $M_{E_i} = M_{E''} = \{k,k+1,k+2\}$.

On montre aisement que $m_{E_i} = \{p\}$.

b/ $i = n-k+1$ et $i \notin \{k,k+1,k+2\}$, ainsi $E_i = \{j,\dots,k,k+1,k+2\}$, c'est le cas dual du précédent et on montre de la même manière que $M_{E_i} = \{j\}$ et $m_{E_i} = \{k,k+1,k+2\}$.

c/ $E_i = \{k,k+1,k+2\}$, dans ce cas il résulte du tableau des valeurs $\varphi(i,j)$, $i,j \in k,k+1,k+2$, que $S(k) = S(k+1) = S(k+2) = 0$ et par suite $T_2(E_i) = E_i$ et $M_{E_i} = m_{E_i} = \{k,k+1,k+2\}$.

On obtient en définitive un préordre collectif identique à celui auquel conduit la procédure de Condorcet.

COMPARAISON AXIOMATIQUE DE DIFFERENTES PROCEDURES

Ainsi la procédure d'agrégation f satisfait aux axiomes I,II, IV,V,VI et VII. Que peut-on dire des procédures de Condorcet, de Borda et celle de Jacquet-Lagrèze (Procédure algorithmique).

La procédure de Condorcet satisfait aux axiomes II,III,IV,V,VI et VII. La procédure de Borda satisfait aux axiomes I,II,IV et V. La procédure de Borda ne satisfait pas aux axiomes VI et VII. Il est clair que la procédure de Borda ne vérifie pas l'axiome

d'indépendance d'Arrow (axiome III).
Considérons en effet l'exemple suivant: E est un ensemble de 3 options a,b et c et V est un ensemble de 43 votants;

23 votants	expriment	leurs	préférences	selon	l'ordre	$a > b > c$
15 "	"	"	"	"	"	$b > c > a$
5 "	"	"	"	"	"	$c > a > b$

La procédure de Borda conduit à l'ordre collectif $b > a > c$.
La majorité absolue des votants place l'option a seule en tête, l'axiome VI n'est donc pas vérifié. D'autre part la procédure de Condorcet conduit à l'ordre collectif $a > b > c$ différent de celui auquel conduit la procédure de Borda, la procédure de Borda ne vérifie donc pas l'axiome VII.
Compte tenu de certaines ambiguités auxquelles conduit parfois la procédure algorithmique de Jacquet-Lagrèze, nous pouvons dire que l'axiome I et l'axiome VII ne sont pas vérifiés.

Axiome VIII

La procédure d'agrégation est telle que si chaque votant inverse son préordre de préférence, le préordre collectif est également inversé.

Inverser chacun des préordres individuels revient à intervertir les lignes et les colonnes occupant le même rang, dans le tableau des valeurs $\varphi(i,j)$. Il résulte donc que les procédures de Condorcet, de Borda et celle de Jacquet-Lagrèze vérifient bien l'axiome VIII. D'autre part la procédure d'agrégation f vérifie l'axiome VIII. Soit en effet ρ l'état de l'opinion donné et soit ρ' l'état de l'opinion déduit de ρ en inversant chacun des préordres individuels. Soient $M_E(\rho)$ et $m_E(\rho)$ respectivement l'ensemble des options maximales et l'ensemble des options minimales correspondant à l'état de l'opinion ρ. Il résulte de ce qui précède que $M_E(\rho') = m_E(\rho)$ et $m_E(\rho') = M_E(\rho)$.
Soit $E' = E - M_E(\rho) - m_E(\rho) = E - M_E(\rho') - m_E(\rho')$, de la même façon on obtient $M_{E'}(\rho') = m_{E'}(\rho)$ et $m_{E'}(\rho') = M_{E'}(\rho)$ et ainsi de suite jusqu'à la fin du processus de sorte que la procédure d'agrégation f conduit, dans le cas de l'état de l'opinion ρ à l'opinion collective $M_E > M_{E'} > \dots > m_{E'} > m_E$ et dans le cas de l'état de l'opinion ρ' à l'opinion collective $m_E > m_{E'} > \dots > M_{E'} > M_E$ inverse de la précédente.

. Remarque

On considère la procédure d'agrégation f^+ construite de la façon suivante: on détermine l'ensemble M_E de la même façon que dans le cas de la procédure f. Soit $E^1 = E - M_E$. On détermine M_{E^1} de la même façon qu'on a déterminé M_E et ainsi de suite jusqu'à la fin du processus de sorte que pour l'ensemble $E^k = E^{k-1} - M_{E^{k-1}}$ on obtient $M_{E^k} = E^k$, d'où l'ordre collectif:

$$M_E \succsim M_{E^1} \succsim M_{E^2} \succsim \cdots \succsim M_{E^{k-1}} \succsim M_{E^k} \qquad (1)$$

On considère d'autre part la procédure d'agrégation f^- qui consiste à déterminer l'ensemble m_E de la même façon que dans le cas de la procédure f. On détermine ensuite l'ensemble $m_{E',1}$, $E'^1 = E - m_E$ et ainsi de suite, d'où l'ordre collectif:

$$m_{E',k} \succsim m_{E',k-1} \succsim \cdots \succsim m_{E',2} \succsim m_{E',1} \qquad (2)$$

Les ordres (1) et (2) sont en général différents. Considérons en effet l'exemple suivant: E est un ensemble de 6 options a,b,c,d,e,f et V un ensemble de 27 votants

6 votants expriment l'ordre $a \succsim b \succsim c \succsim d \succsim e \succsim f$
5 " " " $b \succsim c \succsim d \succsim e \succsim a \succsim f$
8 " " " $b \succsim d \succsim f \succsim c \succsim a \succsim e$
4 " " " $f \succsim b \succsim e \succsim d \succsim c \succsim a$
3 " " " $e \succsim f \succsim a \succsim c \succsim d \succsim b$
1 " " " $d \succsim c \succsim b \succsim e \succsim f \succsim a$

La procédure f^+ conduit à l'ordre collectif: $b \succsim c \succsim d \succsim e \succsim f \succsim a$ par contre la procédure f^- conduit à l'ordre collectif: $b \succsim d \succsim f \succsim c \succsim e \succsim a$. D'autre part les procédures f^+ et f^- ne vérifient pas l'axiome VIII. En effet dans le cas de l'exemple précedent on obtient le tableau des valeurs $\varphi(i,j)$ suivant:

$\varphi(i,j)$	a	b	c	d	e	f
a	0	-9	-9	-9	1	-5
b	9	0	19	19	21	13
c	9	-19	0	1	13	-3
d	9	-19	-1	0	13	13
e	-1	-21	-13	-13	0	3
f	5	-13	3	-13	-3	0

La procédure f^+ conduit à l'ordre collectif: $b \succsim c \succsim d \succsim e \succsim f \succsim a$

et lorsque chaque votant inverse son ordre de préférence, la procédure f^{+} conduit à l'ordre collectif $a > e > c > f > d > b$.
La procédure f^{-} conduit à l'ordre collectif $b > d > f > c > e > a$, et lorsque chaque votant inverse son ordre de préférence, la procédure f^{-} conduit à l'ordre collectif $a > f > e > d > c > b$.
Les procédures f^{+} et f^{-} ne satisfont donc pas à l'axiome VIII.
La procédure f conduit dans ce cas à l'ordre collectif $b > c > d > e > f > a$ et lorsque chaque votant inverse son ordre de préférence, on vérifie bien que l'ordre collectif est inversé: $a > f > e > d > c > b$.
En définitive on obtient le tableau récapitulatif suivant:

X \ Y	A_I	A_{II}	A_{III}	A_{IV}	A_V	A_{VI}	A_{VII}	A_{VIII}
Procédure de Condorcet		x	x	x	x	x	x	x
Procédure de Borda généralisée	x	x		x	x			x
Procédure de Jacquet-Lagrèze		x		x	x	x		x
Procédure f^{+}	x	x		x	x	x	x	
Procédure f^{-}	x	x		x	x	x	x	
Procédure f	x	x		x	x	x	x	x

TABLEAU RECAPITULATIF

Une croix marquée dans la case (X,Y) indique que la procédure d'agrégation X vérifie l'axiome Y. Toute case (X,Y) non marquée d'une croix indique que la procédure d'agrégation X ne vérifie pas l'axiome Y.
De toutes les procédures d'agrégation que nous avons pu ainsi envisager la procédure f est la seule qui satisfait aux axiomes I, II, IV, V, VI, VII et VIII.
Dans certain cas, la procédure d'agrégation f peut conduire à une indifférence totale lorsqu'il y a "effet Condorcet". Mais

dans tous ces cas on obtient également une indifférence totale en appliquant la procédure de Borda ou bien la procédure de Kreweras dans le cas plus général des préordres totaux individuels.

THEOREME III <u>La procédure d'agrégation f conduit à une indifférence totale si et seulement si la procédure de Borda (et plus généralement la procédure de Kreweras) conduit à une indifférence totale</u> .

La condition est nécessaire. $\forall\ i \in E$ on a $S(i) = \sum_{j \in E} \varphi(i,j) = 0$

Or il est facile de voir que la procédure Borda équivaut à classer les options, dans l'opinion collective, selon l'ordre décroissant des totaux $S(i)$. Or $S(i) = 0 \quad \forall\ i$, les totaux $S(i)$ sont donc identiques et par suite la procédure de Borda conduit forcément à une indifférence totale.

La condition est suffisante. Tous les totaux $S(i)$, $i \in E$ sont identiques. Or nous savons que pour tout état de l'opinion $\sum_{i \in E} S(i) = 0$. Par suite $S(i) = 0 \quad \forall\ i \in E$.

Il résulte donc que la procédure d'agrégation f conduit à une indifférence totale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARROW K.J., <u>Social choice and individual values</u>, New York, Wiley, 1963.

[2] CONDORCET , <u>Sur la forme des élections</u>, Paris, Arago, 1847, tome IV, p. 305, Brunswick, 1891, tome V, p.29.

[3] GUILBAUD G.Th., "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", <u>Economie appliquée</u>, n°4, (1952), Article réedité dans <u>Eléments de la théorie mathématiques des Jeux</u>, Paris, Dunod, 1968.

[4] INADA K.,"A note on the simple majority decision rule", <u>Econometrica</u>, 32, (1964).

[5] INADA K.,"The simple majority decision rule", <u>Econometrica</u>, 37, (1969).

[6] JACQUET-LAGREZE E., Informatique Sci.hum, 1970.

[7] KREWERAS G.,"Les décisions collectives, <u>Math.Sci.hum.</u> n°2, (1963).

[8] KREWERAS G.,"La présentation polyédrique des préordres complets finis et application à l'agrégation des des préférences", in La decision, 2, Agrégation et dynamique des ordres de préférences, CNRS, 1969.

[9] MORLAT G.,"Des poids et des choix",Math.Sci.hum. n°3,(1963).

[10] ROY B., "A propos de l'agrégation d'ordres complets. Quelques considérations théoriques et pratiques", in, La decision, 2, Agrégation et dynamique des ordres de préférences. CNRS, 1969.

[11] SEN A.K. , "A possibility theorem on majority decision", Econometrica, 34, (1966).