MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. LECLERC

Note sur une relation d'intermédiarité dans les treillis

Mathématiques et sciences humaines, tome 44 (1973), p. 35-40
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__44__35_0>

Math. Sci. hum. (11[e] année, n° 44, 1973, p. 35-40).

NOTE SUR UNE RELATION D'INTERMÉDIARITÉ DANS LES TREILLIS

par

B. LECLERC

RÉSUMÉ

Nous rapprochons ici une intermédiarité classique dans les treillis, obtenue par une généralisation à partir de la notion d'intervalle d'un ordre total, et la p*-analyse, introduite par C. Flament* et al. *à propos de l'analyse de similitude. Les éléments de cette note doivent être intégrés à un travail sur les graphes dont les arcs sont (partiellement) préordonnés.*

Au paragraphe 1, *nous introduisons deux treillis, dont celui des intervalles généralisés d'un treillis, et nous étudions le lien entre ces treillis. Au paragraphe* 2, *nous exprimons une intermédiarité dans les treillis par une égalité « triangulaire » que nous lions au paragraphe* 3 *à la* 3*-analyse des relations symétriques.*

SUMMARY

In this paper we bring together a classical « between relation » in lattices obtained by generalising the notion of an interval in a total order, with the p*-analysis introduced by C. Flament* et al. *in connection with analysis of similarity. The elements of this note should be integrated into a work on graphs whose edges are (partially) preordered.*

In paragraph 1, *we introduce two lattices in which one of them is the lattice of the generalised intervals of a lattice, and we study the relation between these lattices. In paragraph* 2 *we express a « between relation » in lattices by a « triangle » equality which we relate in paragraph* 3 *to the* 3*-analysis of symmetric relations.*

1. TREILLIS DES INTERVALLES D'UN TREILLIS QUELCONQUE

1.1. Soit T un treillis quelconque, dont nous noterons l'ordre $\leqslant$, les opérations supremum et infimum $\vee$ et $\wedge$. Nous reprendrons ces notations pour les autres treillis que nous aurons à considérer.

On associe à T deux autres treillis :

Le treillis $T^* \times T$ est l'ensemble des couples (a,b), où $a \in T$ et $b \in T$, muni de l'ordre

$$\forall a,b,a',b', \in T\ (ab) \leqslant (a',b') \Leftrightarrow a \geqslant a' \text{ et } b \leqslant b'$$

On a :

$$(a,b) \vee (a',b') = (a \wedge a', b \vee b')$$
$$(a,b) \wedge (a',b') = (a \vee a', b \wedge b')$$

Le treillis $J(T)$ est celui des intervalles de T, définis comme suit : soient a et b deux éléments de T ; l'ntervalle [a,b] est l'ensemble suivant : (*cf.* [1], vol. 1, p. 93) :

$$\forall a,b \in T\ [a,b] = \{t \in T\ /\ a \wedge b \leqslant t \leqslant a \vee b\}$$

La relation d'ordre (de treillis) sur $J(T)$ est l'inclusion. On a :

$$[a,b] = [a \wedge b, a \vee b].$$

Un intervalle [a,b] est noté sous sa forme canonique si a est son minimum et b son maximum. Il est évident que la forme canonique d'un intervalle est unique. Dans la suite, sauf lorsque cela sera précisé, tous les intervalles seront sous forme canonique. On a alors :

$\forall [a,b],[a'b'] \in J(T)$ $\qquad [a,b] \vee [a'b'] = [a \wedge a', b \vee b']$

D'autre part, soit $x \in [a,b] \wedge [a',b']$, donc $x \in [a,b]$ et $x \in [a',b']$. On en déduit $x \leqslant b$ et $x \leqslant b'$, donc $x \leqslant b \wedge b'$. De même $x \geqslant a \vee a'$. Par conséquent $a \vee a' \leqslant x \leqslant b \wedge b'$ et $[a \vee a', a \wedge a'] = [a,b] \wedge [a',b'] = [a,b] \cap [a',b']$.

S'il n'est pas vide, l'infimum de deux intervalles [a,b] et [a',b'] est sous forme canonique $[a \vee a', b \wedge b']$.

Réciproquement, soient deux intervalles [a,b] et [a',b'] : si $a \vee a' \leqslant b \wedge b'$, $[a \vee a', b \wedge b']$ est inclus dans [a,b] et dans [a',b']. Il est donc l'infimum de ces deux intervalles.

Par contre, si $[a,b] \cap [a',b'] = 0$, soit $a \vee a' \geqslant b \wedge b'$, soit $a \vee a'$ et $b \wedge b'$ sont incomparables. Dans tous les cas l'infimum de deux intervalles est leur intersection.

1.2. Dans ce qui précède, on voit que les structures de treillis de $T^* \times T$ et $J(T)$ sont liées. Précisons ce lien.

Supposons que T admet un majorant et un minorant universels, respectivement notés V et Λ (on peut toujours compléter T). On définit la surjection $s : T^* \times T \rightarrow J(T)$ et l'injection $t : J(T) \rightarrow T^* \times T$:

$$\begin{array}{llll} \forall a,b \in T & s(a,b) & = [a,b] & \text{si } a \leqslant b \\ & & = \varnothing & \text{si } a \nleqslant b \\ & i[a,b] & = (a,b) & \text{si } a \leqslant b \\ & i(\varnothing) & = (\vee,\wedge) & \end{array}$$

s est un $\wedge$-morphisme :

$$s((a,b) \wedge (a',b')) = s(a \vee a', b \wedge b') = [a,b] \cap [a',b'].$$

Si $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$, ceci découle du paragraphe 1.1. Si $a \nleqslant b$, on ne peut avoir $a \vee a' \leqslant b \wedge b'$, car on aurait :

$a \leqslant a \vee a' \leqslant b \wedge b' \leqslant b,$

on trouve bien : $s((a,b) \wedge (a',b')) = \emptyset = (s(ab)) \cap (s(a',b'))$.

i est un $\vee$-morphisme (évident).

De plus :

si $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$, $s(a,b) \vee s(a',b') = [a,b] \vee [a',b']$;

si $a \nleqslant b$ et $a' \leqslant b'$, $s((a,b) \vee (a',b')) \neq \emptyset$

car $a \wedge a' < a' < b' < b \vee b'$, mais en général $s((a,b) \vee (a',b')) \neq s(a',b')$;

si $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$, on peut avoir $s((a,b) \vee (a',b')) \neq \emptyset$;

si $[a,b] \cap [a',b'] \neq \emptyset$, $i([a,b] \cap [a',b']) = i[a,b] \cap i[a',b']$,

mais si $[a,b] \cap [a',b'] = \emptyset$, on n'a pas en général $i[a,b] \cap i[a',b'] = (V,\Lambda)$.

Les structures de $T^* \times T$ et de $J(T)$ ne se ramènent donc pas de façon évidente l'une à l'autre, comme si par exemple $J(T)$ était isomorphe à un sous-treillis ou à un treillis quotient de $T^* \times T$.

La signification des éléments de $J(T)$ (intervalles) est plus claire pour les applications que nous avons en vue. Par contre, les propriétés algébriques de $T^* \times T$ (modularité, distributivité) sont plus facilement connues à partir de celles de T. En fait, nous restons dans ce qui suit dans le « domaine commun » aux deux structures.

2. INTERMÉDIARITÉ DANS LES TREILLIS

2.1. G. Birkhoff, [4], p. 42 donne quatre types d'intermédiarité dans les treillis, correspondant aux conditions (1) à (4) respectivement pour que b soit intermédiaire entre a et c.

(1) $a \leqslant b \leqslant c$

(2) $b \in [a,c]$ (ici, on peut avoir $a \nleqslant c$)

(3) $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = b = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$

(4) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$.

Si T est un ordre total, les quatre conditions sont équivalentes. Dans le cas d'un treillis non total, le sens de la condition (1) est évidente. Elle implique les trois autres. On trouve une étude de celles-ci dans Barbut et Monjardet, [1], vol. 1, pp. 151-167. Résumons-la brièvement : (4) $\Rightarrow$ (2) et (4) implique que le sous-treillis engendré par a,b et c est d'une forme particulière (distributif et à neuf éléments). Si T est modulaire, (4) signifie que b est sur une chaîne de longueur minimale (au sens des graphes) dans la relation de couverture (ou de successeur, *cf.* [1], vol. 1, p. 18) associée à l'ordre T. On a aussi (4) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) et (3) implique que le triplet (a,b,c) est médian. Si T est distributif, (2), (3) et (4) sont équivalentes.

C'est essentiellement à l'intermédiarité du type (2) que nous allons nous intéresser. Elle correspond à une première généralisation de l'intervalle des ordres totaux, que nous avons donnée en 1.1. (3) et (4) sont dans le cas général, obtenues en ajoutant des conditions supplémentaires à (2).

2.2. La condition (2) se met sous les formes équivalentes

(2′) pour $T^* \times T$ et (2″) pour $\mathcal{J}(T)$:

(2′) $(a \wedge b, a \vee b) \vee (b \wedge c, b \vee c) = (a \wedge c, a \vee c)$

(2″) $[a,b] \vee [b,c] = [a,c]$

L'équivalence de (2′) et de (2″) est immédiate, d'après le par, 1.2., car $[a,b] \cap [b,c] \neq \emptyset$. Montrons que (2) $\Leftrightarrow$ (2′) :

$$a \wedge c \leqslant b \leqslant a \vee c \Leftrightarrow a \wedge b \wedge c = a \wedge c \text{ et } a \vee c = a \vee b \vee c \Leftrightarrow a \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) \text{ et } a \vee c = (a \vee b) \vee (b \vee c) \Leftrightarrow (2')$$

Notons que (2′) équivaut à l'inégalité *a priori* moins forte.

$$(2'a)\quad (a \wedge b', a \vee b) \vee (b \wedge c, b \vee c) \leqslant (a \wedge c, a \vee c)$$

c'est-à-dire $(a \wedge c, a \vee c) \geqslant (a \wedge b, a \vee b)$, et $(a \wedge c, a \vee c) \geqslant (b \wedge c, b \vee c)$.

Les conditions (1), (3) et (4) se traduisent aussi par des égalités dans $T^* \times T$ ou dans $\mathcal{J}(T)$. Ainsi (1) $\Leftrightarrow$ (1′)

$$(1')\quad (a,b) \vee (b,c) = (a,c)$$

Entre (1′) et (2′), il y a le même lien qu'entre les intervalles d'un ordre total et ceux d'un treillis : la substitution du couple $(a \wedge b, a \vee b)$ au couple (a,b). On généralise immédiatement (1) et (1′) à un ordre T quelconque, ce qui n'est pas le cas de (2) et (2′).

3. APPLICATION AUX RELATIONS

3.1. Soient un ensemble E, une relation symétrique $R \subset E \times E$ (éventuellement généralisée par un graphe) et un treillis T. Soit une application $v : E \rightarrow T$.

On définit à partir de v une application $\boldsymbol{v} : R \rightarrow T^* \times T$

$$\forall (x,y) \in R \qquad \boldsymbol{v}(x,y) = (v(x) \wedge v(y), v(x) \vee v(y)).$$

L'application v définit un préordre P sur E :

$$\forall (x,y) \in E \qquad x \; P \; y \Leftrightarrow v(x) \leqslant v(y).$$

De même $\boldsymbol{v}$ définit un préordre P sur R :

$$\forall (x,y), (x',y') \in R \qquad (x,y) \; P \; (x',y') \Leftrightarrow \boldsymbol{v}(x,y) \leqslant \boldsymbol{v}(x',y').$$

La donnée d'un préordre non total sur une relation R sur E généralise dans deux directions celle d'une préordonnance sur E, c'est-à-dire d'un préordre total sur $E \times E$ ([2] et [7]).

3.2. Supposons définie une relation ternaire d'intermédiarité sur l'ensemble E des sommets de la relation R. C. Flament, [5], a proposé de simplifier alors la relation R de la façon suivante : si y est intermédiaire entre x et z, on supprime, s'il existe, l'arc (x,z). L'existence de cet arc indique en effet une correspondance directe entre x et z.

Exemple : Soit la relation d'intermédiarité sur E :

y est intermédiaire entre x et z si $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$,

et $v(x) \wedge v(z) \leqslant v(y) \leqslant v(x) \vee v(z)$;

d'après 3.1. et 2.2., ceci équivaut, si $(x,z) \in R$, à

$(x,y)\ P\ (x,z)$ et $(y,z)\ P\ (x,z)$.

L'arc (x,z) est donc supprimé si et seulement s'il est supérieur dans *P*, à la fois à (x,y) et à (y,z).

Rappelons que la *p*-analyse (Flament, Degenne et Vergès, [6], p. 12) consiste à supprimer le plus grand arc de tout cycle de R de longueur au plus égale à *p*. En particulier, pour la 3-analyse, on supprime le plus grand arc de tout triangle : c'est la simplification décrite au début de ce paragraphe. Par « plus grand arc », on entend généralement, l'ensemble des arcs étant valué par un indice de similitude, celui pour lequel l'indice est minimum (éloignement maximum des sommets).

L'exemple précédent, correspondant à l'intermédiarité (2) dans les treillis, ressort bien de la 3-analyse, à ceci près que, le préordre *P* n'étant pas total, tout triangle n'est pas simplifiable.

Généralisons à la *p*-analyse : soit un arc (x,z) et une chaîne $C = \{(x,y_1), (y_1,y_2), ..., (y_i,y_{i+1}), ..., (y_k,z)\}$, avec $k \leqslant p-2$.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(I) $\forall u \in C \qquad u\ P\ (x,z)$

(II) $\forall i = 1, ..., k \qquad v(x) \wedge v(z) \leqslant v(y_i) \leqslant v(x) \vee v(z)$.

Supprimer tout arc (x,z) tel qu'il existe une chaîne C de x à z vérifiant (I) équivaut donc à constater que tous les sommets y_i situés sur C sont intermédiaires entre x et z.

Dans le cas où T est total, *v* injective (les arcs sont totalement ordonnés), et $p \geqslant |E|$, on obtient l'arbre minimum de la relation R (Berge, [3], p. 472, Rosenstiehl, [8], p. 357 ; *cf.* aussi [6], p. 16).

3.3. *Exemples*

1) C. Flament, [5], a proposé l'intermédiarité suivante pour les sommets d'une relation R : y est intermédiaire entre x et z si $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$, et $Rx \cap Rz \leqslant Ry \leqslant Rx \cup Rz$.

On est ramené à l'étude précédente, avec pour treillis T le treillis boloéen $\mathscr{P}(E)$ et, pour tout $x \in E$, $v(x) = Rx$, d'où

$$\forall (x,y) \in R \qquad v(x,y) = (Rx \cap Ry, Rx \cup Ry).$$

2) Soient deux ensembles E et F, et une relation S de E vers F.

On prend l'application $v : E \to \mathscr{P}(F)$

$$\forall x \in E \qquad v(x) = Sx, \text{ d'où}$$
$$\forall (x,y) \in E \times E \qquad v(x,y) = (Sx \cap Sy, Sx \cup Sy).$$

Cest un cas partculier de celui où v est une application de E dans un produit cartésien d'ordres totaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT, M. et MONJARDET, B., *Ordre et classification,* Algèbre et combinatoire, Paris, Hachette, 1970.

[2] BENZÉCRI, J.-P., *Description mathématique des classifications,* Texte ronéoté, Institut de Statistique des Universités de Paris.

[3] BERGE, C., *Graphes et hypergraphes,* Paris, Dunod, 1970.

[4] BIRKHOFF, G., *Lattice theory,* American Mathematical Society Colloquium Pubications, vol. 25, Providence, R I, 1967.

[5] FLAMENT, C., « L'analyse de similitude », *Cahiers du C.E.R.O.,* vol. 4, n° 2.

[6] FLAMENT, C., DEGENNE, A. et VERGES, P., *L'analyse de similitude,* texte ronéoté, Aix-en-Provence, 1971.

[7] LERMAN, I.-C., *Les bases de la classification automatique,* Paris, Gauthier-Villars, 1970.

[8] ROSENSTIEHL, P., « L'arbre minimum d'un graphe », in *Théorie des graphes,* Journées internationales d'étude, Rome, 1966, Paris, Dunod, 1967.