MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. FELDMAN

Pôles, intermédiaires et centres dans un groupe d'opinions

Mathématiques et sciences humaines, tome 43 (1973), p. 39-54

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__43__39_0>

Math. Sci. hum. (11e *année*, n° 43, 1973, p. 39-54)

PÔLES, INTERMÉDIAIRES ET CENTRES DANS UN GROUPE D'OPINIONS

par

J. FELDMAN [1]

RÉSUMÉ

Les opinions dont il s'agit sont des ordres totaux sur un ensemble d'objets. Par rapport à un groupe d'opinions exprimées, on définit les notions d'opinions « pôles », « intermédiaires » et « centres » : ces derniers peuvent servir de choix collectifs et on examine quelques-unes de leurs propriétés ; en particulier, ils appartiennent à l'intervalle convexe engendré par les opinions exprimées, autrement dit, ils conservent les avis unanimes.

SUMMARY

In this article opinions are total orderings on a set of candidates. With respect to a group of expressed opinions, we define opinions as « poles », « intermediaries » or « centers ». These can serve as collective choices, and we examine some of their properties. In particular they belong to the convex set generated by expressed opinions ; in other words, they conserve unanimous advices.

1. INTRODUCTION

Le groupe d'opinions dont il s'agira ici consiste en un ensemble d'individus ordonnant totalement un ensemble d'objets.

Cette situation a été considérée dans le cadre de l'étude des choix collectifs : il peut s'agir, par exemple, de candidats à élire, de choix économiques à décider, ou de préférences psychosociologiques [2]. Dans tous ces cas, la similarité des aspects formels des problèmes a été soulignée [3].

1. GEMAS, Maison des Sciences de l'Homme, Paris.
2. Citons en particulier Arrow [1], Guilbaud [9], Black [4], et, pour une application psycho-sociologique, Parlebas [15].
3. Voir par exemple Sen [17] pour un exposé récent.

Nous préférons ici penser plutôt à une situation de type psycho-sociologique, éventuellement expérimentale, donc partiellement reconstruite, afin de pouvoir bénéficier de plus de flexibilité, de contraintes extérieures moindres que dans une situation de type plus politique.

La question d'établir, à partir des ordres individuels, un ordre collectif satisfaisant un certain nombre de conditions a reçu une attention toute particulière. La démarche a en général consisté à considérer un ordre comme un assemblage de comparaison de paires, à définir pour chaque paire la préférence collective et à engendrer de la sorte le choix collectif. Si, pour chaque paire, on choisit le couple (ordonné) majoritaire, on dit qu'on utilise la *procédure de Condorcet,* ou *règle de majorité.* Cette méthode qui est la seule à satisfaire à un certain nombre de conditions [1] peut cependant conduire à des choix non transitifs, qui ne sont donc pas des ordres.

Nous utiliserons ici un point de vue différent : nous considérerons les ordres totaux comme les briques d'assemblage élémentaires : autrement dit, *au lieu de construire les ordres totaux à partir des couples, ce sont les couples, ou plus généralement les ordres partiels qui seront définis à partir des ordres totaux.*

A ce point de vue différent correspond une représentation mathématique autre que celles qui ont été en général utilisées. Au lieu de considérer les ordres totaux sur un ensemble fini A de n objets comme des relations, c'est-à-dire des parties du produit cartésien $A \times A$, on travaillera sur le *permutoèdre*, ensemble représentant les $n!$ ordres totaux correspondant à A ; les ordres partiels, et en particulier les couples, seront alors représentés par certaines parties du permutoèdre.

Cette représentation a été introduite par Guilbaud et Rosensthiel [10], et ensuite étudiée par différents auteurs [2]. Elle permet de dégager un certain nombre de notions, qui apparaissent peut-être moins aisément dans d'autres représentations. Le but de cet article est de présenter les notions de *pôles,* d'*intermédiaires* et de *centres.* Nous utiliserons, pour définir les centres (qui, en général, ne seront pas uniques), trois procédures, dont nous étudierons quelques propriétés. Ces procédures peuvent correspondre à des procédures de choix collectif. La différence essentielle avec les travaux antérieurs nous semble être l'abandon de l'exigence d'*unicité* (il ne s'agira donc pas d'une « social welfare function ») au profit de la *transitivité* : les choix collectifs pourront être plusieurs, ce seront toujours des ordres totaux.

Dans la prochaine section, il nous faut d'abord présenter le permutoèdre et les résultats dont nous aurons besoin par la suite.

2. LA REPRÉSENTATION PERMUTOÈDRIQUE

On s'intéresse aux ordres définis sur les n objets d'un ensemble A. Un *ordre total* s'écrira comme une suite lue de gauche à droite.

Exemple : pour $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, l'ordre total $t = bafdec$.

---

1. Voir par exemple Sen [17], p. 68 et chap. 5*.
2. En particulier [3], [6] et [13], chap. 3.

• *Contiguïté et inversions*

La *distance* de Kendall entre deux ordres totaux est bien connue : elle compte le nombre de couples (ordonnés) différents. Si cette distance est 1, le (seul) couple différent consiste en deux objets voisins, dans l'un et l'autre ordre :

Exemple : pour le même ensemble A, considérons l'ordre

$$t' = bafedc.$$

Entre t et t', seule diffère la paire $\{d,e\}$ et on a donc :

$$d\ (t,t') = 1.$$

On dira que t et t' sont *contigus.*

L'opération qui consiste à échanger deux éléments voisins dans un ordre sera nommée *inversion*[1]. L'inversion qui échange les ième et ième + 1 éléments sera notée p_i.

Ainsi, dans l'exemple, on peut écrire :

$$t' = \mathrm{p}_4\, t$$

$$\text{et également } t = \mathrm{p}_4\, t'.$$

On a en effet : $\mathrm{p}_i^2 = 1$, pour tout i.

Pour n objets ordonnés, il existe $(n - 1)$ inversions, avec lesquelles on peut engendrer n'importe quelle permutation de ces n objets, et qui satisfont les relations suivantes (dites de *commutation*) :

$$\mathrm{p}_i\mathrm{p}_j = \mathrm{p}_j\mathrm{p}_i \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2$$

$$\mathrm{p}_i\mathrm{p}_{i+1}\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_{i+1}\mathrm{p}_i\mathrm{p}_{i+1}$$

• *Le permutoèdre*

Le *permutoèdre*, noté $\mathscr{P}_{\mathrm{A}}$ ou $\mathscr{P}_n$, est l'ensemble des $n!$ ordres totaux définis sur A, muni de la relation de contiguïté.

Son graphe peut s'engendrer à partir d'un ordre de départ quelconque, en faisant agir successivement toutes les inversions possibles. Les relations de commutation font apparaître, la première, des quadrilatères, la seconde, des hexagones.

Les graphes complets ont été tracés jusqu'à $n = 5$ [16]. Dans les portions de permutoèdres dessinées dans cet article, les inversions sont représentées par des traits joignant deux ordres, et numérotées par le rang du premier objet qu'elles déplacent.

L'intérêt de cette représentation graphique, quand elle est possible (elle se complique très rapidement), est de permettre une compréhension plus concrète de la structure de l'ensemble des ordres totaux, muni de la distance de Kendall.

1. On dit aussi « transposition ».

• *Les ordres partiels*

Ils peuvent être représentés sur le permutoèdre par l'ensemble des ordres totaux qui les prolongent. Les propriétés de ces parties du permutoèdre ont été étudiées en [6]. Cette étude fait apparaître les notions suivantes :

— D'abord, à partir de la notion de *distance*, on définit les *chemins minimaux* entre deux points du permutoèdre.

— Un ordre total est dit *intermédiaire* de deux autres s'il se situe sur un chemin minimal entre ces deux ordres.

— L'ensemble des intermédiaires entre deux ordres est nommé *intervalle* [1], dont les *pôles* sont les deux ordres en question.

Dans $A \times A$, l'intersection de ces deux ordres donne un ordre partiel P. On montre que, sur $\mathscr{P}_A$, l'intervalle correspondant contient tous les ordres totaux prolongeant P, et eux seulement : il représente donc, sur $\mathscr{P}_A$, l'ordre partiel P.

Exemples : dans les figures, on a représenté des intervalles sur le permutoèdre, et, à côté, les graphes dans $A \times A$ correspondants.

Ces notions peuvent être généralisées au cas d'un nombre de sommets quelconque. On définit dans $\mathscr{P}_A$ l'*intervalle généralisé* entre les sommets t_1, t_2, ... t_p, — qu'on note I $[t_1,t_2 \dots t_p]$ — comme l'ensemble de tous les intermédiaires et de tous les intermédiaires d'intermédiaires (*fermeture convexe*) construits à partir de ces sommets. Cet intervalle contient tous les ordres totaux prolongeant l'ordre partiel obtenu par l'intersection dans $A \times A$ des p ordres de départ, et seulement ces ordres : il représente donc sur le permutoèdre cet ordre partiel.

Pour tout ordre partiel, on nomme *dimension* (au sens de Dushnick et Miller [5]), le nombre minimum d'ordres totaux pouvant l'engendrer par intersection dans $A \times A$. Sur le permutoèdre, on nomme *base de pôles* un ensemble de sommets dont le cardinal est égal à la dimension et dont la fermeture convexe engendre l'intervalle généralisé représentant cet ordre partiel. Les autres points de l'intervalle sont dits *intermédiaires.* Il peut exister plusieurs bases de pôles, et un sommet peut donc être à la fois pôle par rapport à une base, et intermédiaire par rapport à une autre.

Proposition : Pour des ordres de dimension 2, les bases de pôles sont distinctes.

Soient en effet trois sommets distincts t_1,t_2,t_3 tels que les intervalles I $[t_1,t_2]$ et I $[t_1,t_3]$ soient les mêmes. Si t_2 et t_3 sont distincts, t_3 est intermédiaire de t_1 et t_2 et se situe donc sur un chemin minimal entre t_1 et t_2. t_3 est donc plus proche de t_1 que ne l'est t_2. Mais on a aussi le résultat inverse, donc t_2 et t_3 doivent être confondus.

On peut montrer [2] que jusqu'à $n = 5$, tous les ordres partiels sont de dimension 2 (les intervalles correspondants peuvent donc être engendrés à partir de deux pôles).

Ayant exposé les notions dont nous aurons besoin, nous les appliquons à présent au cas d'un groupe d'opinion.

---

1. Barbut et Frey [3], utilisent le mot « fuseau », et définissent l'intervalle comme un fuseau orienté, c'est-à-dire un fuseau où l'un des sommets joue un rôle particulier, ce qui permet alors de montrer que c'est un treillis.

2. Voir [6] pour $n \leqslant 4$ et [11] pour le cas général, où le résultat est le suivant : la dimension de tout ordre partiel sur A est inférieure ou égale à la partie entière de $|A| / 2$.

3. GROUPE D'OPINIONS : AVIS COMMUNS ; PÔLES ET INTERMÉDIAIRES

On considère un ensemble de p *juges*, G, et un ensemble de n *candidats* à ordonner, A.

A la suite de [10], on nommera :

Opinion : un ordre total sur A.

Avis : un couple (ordonné) de A.

Exemple : $A = \{a,b,c,d,\}$

une opinion : *badc*

un avis : *ba*.

Dans notre représentation, une opinion est un sommet du permutoèdre $\mathscr{P}_A$, et un avis, un certain ensemble convexe d'opinions, ensemble très vaste d'ailleurs puisque très nombreuses sont les opinions compatibles avec un avis.

Un *groupe d'opinions* ou « état de l'opinion » sera défini ici comme une application de G dans $\mathscr{P}_A$. Autrement dit, à chaque juge, on fait correspondre son opinion sur les candidats A, représentée par un sommet de $\mathscr{P}_A$.

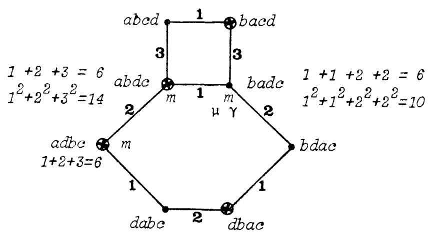
Pour simplifier, nous prendrons en général des cas où chaque juge a une opinion différente, c'est-à-dire où $\hat{G}$, l'*image* de G, sera formée de p opinions distinctes. Nous considérerons brièvement le cas où plusieurs juges peuvent avoir la même opinion, en introduisant alors une fonction de poids sur $\hat{G}$, à chaque opinion exprimée correspondant sa fréquence. Nous noterons alors l'image de G, $\hat{G}_p$.

L'*ensemble des avis communs* est, dans $A \times A$, l'intersection des opinions exprimées. Dans $\mathscr{P}_A$, c'est l'intervalle généralisé (ou fermeture convexe) construit à partir de ces opinions. Nous le notons $I[\hat{G}]$. Si, pour le choix collectif, on n'exige pas nécessairement un ordre total, alors l'ordre partiel rassemblant les avis communs paraît s'imposer.

Dans cet intervalle, nous avons défini dans le paragraphe précédent des *pôles* et des *intermédiaires,* et la situation des opinions exprimées peut ainsi servir à caractériser les juges. Ainsi, si un juge, en se retirant, laisse inchangé l'ensemble des avis communs, c'est un intermédiaire par rapport à une certaine base de pôles. La connaissance plus précise de leur position dans ce qui peut être l'intervalle de négociation peut conduire les juges à mener en accordance cette négociation.

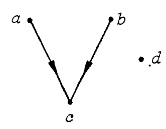
Nous examinerons quatre exemples. Dans les schémas représentant les différents cas examinés, les croix représentent les opinions exprimées, tous les juges ayant des opinions distinctes. Les points représentent (avec les croix), les sommets de l'intervalle engendré par les opinions exprimées, c'est-à-dire les autres opinions compatibles avec l'ensemble des accords communs. On a aussi représenté le graphe, dans $A \times A$, des avis communs, et le tableau de décomposition des opinions en avis, les couples associés au signe $+$ représentant les couples dans l'ordre alphabétique, ceux associés au signe — à l'ordre contraire à l'alphabet. Les autres éléments des figures concernent les centres, et seront discutés dans la section suivante. Les chiffres caractérisent les inversions qui font passer d'une opinion à une opinion contiguë.

Représentation sur le permutoèdre

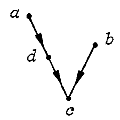


$$\begin{cases} r(\gamma,\hat{G}) = 2 \\ r_1(m,\hat{G}) = 1{,}5 \\ r_2(\mu,\hat{G}) = 2{,}5 \end{cases}$$

Graphe dans A × A



Avis communs



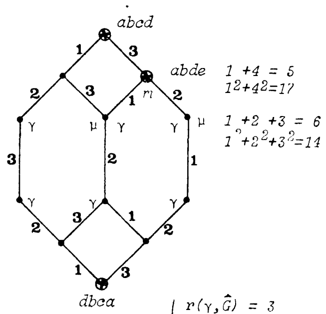
Décomposition en paires

	ab	ac	ad	bc	bd	cd
bacd	−	+	+	+	+	+
abde	+	+	+	+	+	−
adbc	+	+	+	+	−	−
dbac	−	+	−	+	−	−
C	?	+	+	+	?	−
Avis communs		+		+		

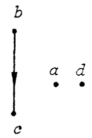
C :

		ab	ac	ad	bc	bd	cd
m	abdc	+	+	+	+	+	−
m	adbc	+	+	+	+	−	−
m	badc	−	+	+	+	+	−
cycle (bad)		−	+	+	+	−	−

Exemple 1

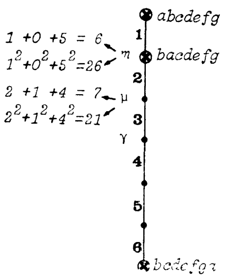


$$\begin{cases} r(\gamma,\hat{G}) = 3 \\ r_1(m,\hat{G}) = \frac{5}{3} = 1{,}67 \\ r_2(\mu,\hat{G}) = \frac{14}{3} = 4{,}67 \end{cases}$$

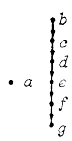


	ab	ac	ad	bc	bd	cd
abcd	+	+	+	+	+	+
abdc	+	+	+	+	+	−
dbca	−	−	−	+	−	−
C	+	+	+	+	+	−
Avis communs				+		

Exemple 2



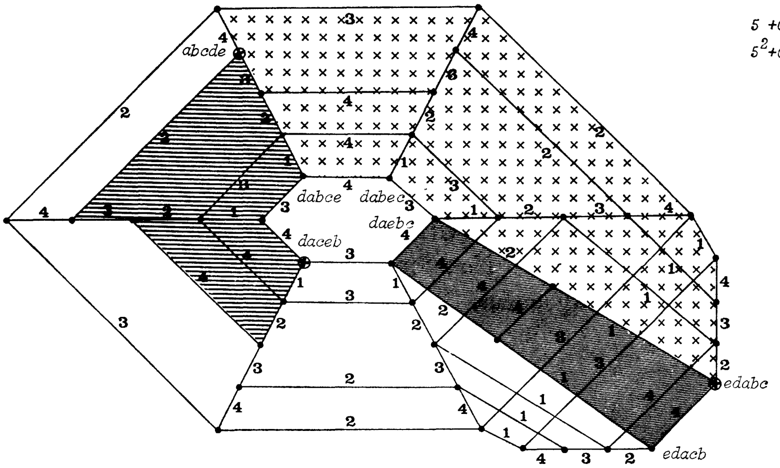
$$\begin{cases} r(\gamma,\hat{G}) = 3 \\ r_1(m,\hat{G}) = 2 \\ r_2(\mu,\hat{G}) = 7 \end{cases}$$



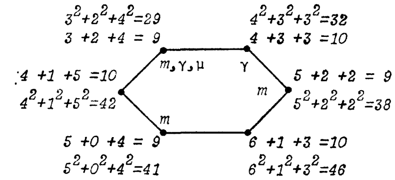
	ab	ac	ad	ae	af	ag	bc	bd ...
abcdefg	+	+	+	+	+	+	+	+ ...
bacdefg	−	+	+	+	+	+	+	+ ...
bcdefga	−	−	−	−	−	−	+	+ ...
C	−	+	+	+	+	+	+	+ ...
Avis communs							+	+ ...

Exemple 3

Figure 1

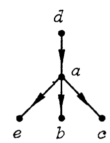


Représentation de I(Ĝ) sur le permutoèdre



$$\begin{cases} r(\gamma, \hat{G}) = 4 \\ r_1(m, \hat{G}) = 3 \\ r_2(\mu, \hat{G}) = 9{,}67 \end{cases}$$

L'hexagone de l'Effet Condorcet et les centres



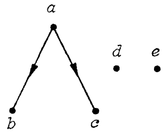
Son graphe dans A x A

I[abcde, daceb]   I[daceb, edabc]   I[abcde, edabc]

I(Ĝ) = I[abcde, edacb] |I(Ĝ)| = 40

	cb	ac	ad	ae	bc	bd	be	cd	ce	de
abcde	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
daceb	+	+	−	+	−	−	−	−	+	+
edabc	+	+	−	+	+	−	−	−	−	−
C	+	+	−	+	+	−	−	−	+	+
Avis communs	+	+								

Décomposition en paires



Graphe dans A x A

Exemple 4

Figure 2

Pour l'*exemple* 1, il existe pour l'intervalle I [Ĝ] deux bases de pôles, les opinions *abcd* et *dbac* d'une part, et les opinions *bacd* et *dabc* de l'autre. Deux des opinions exprimées, *bacd* et *dbac*, sont donc des *pôles*, mais dans des bases distinctes. Les deux autres opinions exprimées, *abdc* et *adbc* sont des *intermédiaires* par rapport à chaque base de pôles. Mais ce ne sont pas des intermédiaires par rapport aux opinions exprimées pôles : si en effet on supprime les opinions *abdc* et *adbc*, l'intervalle est changé, et se réduit à l'unique chemin minimal entre les opinions exprimées restantes, *bacd* et *dbac*, avec badc et bdac comme intermédiaires.

Dans l'*exemple* 2 au contraire, *abcd* et *dbca* forment une base de pôles et *abdc* est intermédiaire. Si on supprime l'opinion intermédiaire, l'intervalle représentant les avis communs n'est pas modifié.

Le *troisième exemple* a été choisi parce qu'il évoque un segment linéaire : on peut montrer [6] que les seuls arbres parmi les intervalles sont de ce type très simple, et qu'ils correspondent à des permutations circulaires. Il n'y a qu'une seule base de pôles (il y en avait plusieurs dans l'exemple 2, dont une seule est contenue dans les opinions exprimées), les autres points étant intermédiaires.

Le *dernier exemple*, plus complexe, a déjà été particulièrement étudié en [10] puis repris en [6]. Dans ce dernier article, on avait représenté les intervalles entre des paires d'opinions. Ici, nous représentons l'intervalle généralisé engendré par *abcde, daceb* et *edabc.* Dans la construction de l'intervalle, nous avons été guidés par la représentation de $\mathscr{P}_5$ donnée en [16]. L'intervalle contient 40 sommets. Il correspond à deux avis communs. Une base de pôles est constituée par *abcde* (opinion exprimée) et *edacb* (opinion non exprimée). Nous indiquons de la même façon qu'en [6], les trois intervalles entre les paires d'opinions exprimées.

4. OPINIONS COLLECTIVES. POINTS CENTRAUX, POINTS MÉDIANS, POINTS MOYENS

Lorsque l'on veut résumer un ensemble d'opinions individuelles par une opinion collective, on cherche à définir, d'une certaine façon, un *centre* de ces opinions. Nous utiliserons pour cela trois procédures qui ont été proposées pour les graphes [14]. Nous indiquerons quelques propriétés de ces centres, puis, dans le paragraphe suivant, examinerons d'un peu plus près certaines propriétés qui ont été exigées pour les opinions collectives.

Il paraît d'abord raisonnable de chercher à conserver les avis communs dans l'opinion collective. Autrement dit, nous cherchons le centre dans l'intervalle I [$\hat{G}$]. Pour chaque point de cet intervalle, nous définirons de trois façons différentes son éloignement à l'ensemble des opinions exprimées, et les centres (car il y en aura plusieurs en général) correspondront aux points à éloignement minimum. Nous obtiendrons ainsi les *points centraux,* les *points médians* et les *points moyens,* ou *centres de gravité* [1].

En fait, le *théorème de convexité sur les centres,* démontré en appendice, et sur lequel nous reviendrons dans la section 5 à propos du principe faible de Pareto montre qu'il n'est pas nécessaire, mais suffisant, de restreindre *a priori* la recherche des centres à l'intervalle I [$\hat{G}$] : en effet, tout centre (tel qu'il est défini ici) obtenu en minimisant l'éloignement à $\hat{G}$ des sommets du permutoèdre tout entier tombe nécessairement, d'après ce théorème, dans l'intervalle I [$\hat{G}$]. D'où, dans les schémas, la possibilité de se restreindre à l'étude et la représentation de cet intervalle.

a) *Points centraux*

On définit l'éloignement d'un point y à $\hat{G}$ par la plus grande distance de y aux points de $\hat{G}$:

$$r\,(y,\hat{G}) = \max_{x \in \hat{G}} d\,(y,x)$$

1. La terminologie des centres dans les graphes n'est pas encore fixée. En général, le centre correspond à ce que nous nommons ici point central.

De même, *l'écartement* est en général défini pour les sommets d'un graphe : ici, nous considérons des points n'appartenant pas nécessairement à G, d'où notre préférence pour *le terme éloignement.*

Les points centraux sont les points de I $[\hat{G}]$ qui correspondent à un éloignement minimum :

$$r(\gamma,\hat{G}) = \min_{y \in I[\hat{G}]} r(y,\hat{G})$$

On appelle cette valeur le *rayon.*

— *Présence d'une pondération :* cette définition ne tient pas compte du fait que plusieurs juges peuvent avoir la même opinion. Si l'on veut tenir compte de ce fait dans l'opinion collective, il faut donc utiliser une autre définition du centre.

Dans les figures, on a indiqué par γ les points centraux. On peut voir, surtout sur les 2e et 3e exemples, que cette définition du centre privilégie les extrêmes au détriment des intermédiaires, dont l'influence est nulle. Elle pourra donc servir dans les cas où l'on désire que l'opinion collective tienne avant tout compte des positions les plus extrêmes.

b) Points médians

L'éloignement d'un point y à $\hat{G}$ est définie par la somme des distances de y aux points de $\hat{G}$, divisée par l'effectif de $\hat{G}$:

$$r_1(y,\hat{G}) = \frac{1}{|\hat{G}|} \sum_{x \in \hat{G}} d(y,x)$$

Les points médians correspondent à la valeur minimum, dans I $[\hat{G}]$, de cet éloignement :

$$r_1(m,\hat{G}) = \min_{y \in I[\hat{G}]} r_1(y,\hat{G})$$

— *Présence d'une pondération :* on définit alors l'éloignement en tenant compte de cette pondération :

$$r_1(y,\hat{G}_p) = \sum_{x \in \hat{G}} p_x\, d(y,x)$$

On peut voir sur les exemples, et tout particulièrement sur les 2e et 3e, que, contrairement à la précédente, cette définition privilégie avant tout les intermédiaires, en négligeant les distances (exemple 3, en particulier, où le point le plus bas pourrait être éloigné des deux autres, sans que le point médian soit changé).

Rapport avec la médiane Condorcet [1]

La médiane Condorcet est la relation obtenue par la procédure de majorité par paires. Elle correspond au minimum de la somme des distances aux ordres individuels (d'où le nom) [2].

Autrement dit, la médiane Condorcet satisfait une relation semblable à celle qui définit les points médians, à cela près que l'on minimise parmi toutes les relations possibles, et non plus seulement parmi les ordres totaux.

Si la médiane Condorcet est un ordre total, il n'y a pas *d'effet Condorcet* (pas d'intransitivité). Dans le cas contraire, il y a effet Condorcet (présence d'intransitivités dans le choix collectif).

1. Voir aussi [12] dans le même numéro.

Si la médiane Condorcet est un ordre total, c'est bien sûr également un point médian. Dans le cas d'un nombre impair de juges, il est clair que la médiane Condorcet est unique. Si on se trouve donc en présence de plusieurs points médians, c'est qu'il y a effet Condorcet. Une question réciproque serait : dans quelles situations l'unicité du point médian entraîne-t-elle qu'il s'agit en effet de la médiane Condorcet [1] ?

Nous examinons à présent nos quatre exemples :

Dans l'*exemple* 1, il y a un nombre pair de juges. La procédure de Condorcet fixe quatre couples, mais deux sont en balance (deux juges pour, deux juges contre), donnant quatre combinaisons possibles : l'une d'entre elles (avec *ba* et *dc*) introduit le cycle (*bad*), et n'est donc pas un ordre. Les trois autres combinaisons correspondent aux ordres *abdc, adbc* et *badc,* qui sont effectivement aussi les points médians.

Dans les *exemples* 2 *et* 3, il n'y a pas d'effet Condorcet, et médiane Condorcet et point médian coïncident.

Dans l'*exemple* 4, il y a effet Condorcet, dû au cycle (*bce*). L'hexagone central représente précisément, dans $\mathscr{P}_5$, l'ordre partiel où *da* précède les candidats *b, c* et *e,* qui ne sont pas comparés. Les trois points médians se situent sur cet hexagone, et on constate que ce ne sont pas tous les points de l'hexagone qui sont des points médians. Chacun des points médians favorise une des trois opinions exprimées. En particulier, l'une d'entre elles, *daceb,* est un point médian. Ce peut être un argument pour choisir celui-là comme opinion collective, ou non, selon le rôle qu'on tient à faire jouer aux juges.

c) Points moyens, ou centres de gravité

On définit l'éloignement d'un point y à $\hat{G}$ comme la somme des carrés des distances de y aux points de $\hat{G}$, divisée par l'effectif de $\hat{G}$:

$$r_2\,(y,\hat{G}) = \frac{1}{\hat{G}} \sum_{x \in \hat{G}} d^2\,(y,x)$$

Les points moyens (ou centres de gravité) correspondent à l'éloignement minimum dans I $[\hat{G}]$:

$$r_2\,(\mu,\hat{G}) = \min_{y \in \mathrm{I}\,[\hat{G}]} r_2\,(y,\hat{G})$$

Cette définition tient compte à la fois des distances et des intermédiaires, comme on le voit en particulier sur l'exemple 3. On remarque que, dans l'exemple 2, on obtient deux centres de gravité, alors qu'il n'y en a qu'un dans les autres exemples.

On voit facilement comment introduire une pondération dans l'éloignement.

En utilisant les trois procédures à la fois, on peut être guidé sur le choix d'une opinion collective : ainsi, dans l'exemple 1, *badc* est la seule opinion à être à la fois point central, moyen et médian. Dans l'exemple 4, *dabce* a la même propriété. Par contre, dans les autres exemples, il faut choisir nettement si l'on entend privilégier les pôles, les intermédiaires, les distances. Un des

1. Il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple suivant, portant sur 3 candidats *a,b,c* et 7 juges, dont 2 préfèrent *acb*, 2 autres *bac,* et 3 *cba* : il y a effet Condorcet, mais un seul point médian, *cba.*

intérêts, à notre avis, d'avoir plusieurs procédures est d'être ainsi plus conscient des hypothèses possibles dans l'établissement d'un choix collectif.

5. QUELQUES AUTRES PROPRIÉTÉS DES CENTRES

Dans les recherches sur les choix collectifs, on a l'habitude de considérer un certain nombre de conditions, et nous allons examiner ici, pour quelques-unes d'entre elles, si les définitions des centres les satisfont ou non. Nous allons suivre la formulation de Sen [17].

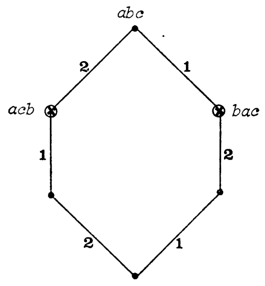
Commençons par la condition d'*unicité* qui n'est d'ordinaire pas discutée parce que considérée comme allant de soi. Nous avons vu que, dans notre cas, il y a souvent plusieurs solutions satisfaisant la condition d'éloignement minimum. Nous n'avons donc pas une « social welfare function » au sens d'Arrow. Nous ne pensons pas que la violation de la règle d'unicité soit très importante : il ne peut être question, dans ce genre de problèmes, d'espérer arriver à une définition du choix collectif sans ambiguïté aucune. Il y aurait même un certain danger à ce que, ayant à prendre des décisions à partir de ces choix, on puisse s'imaginer que les procédures proposées résolvent complètement le problème : il s'agit, dans les meilleurs des cas, de situations très épurées par rapport à la réalité et le mérite de la formalisation est de bien préciser les hypothèses d'épuration. Le fait de faire apparaître plusieurs centres peut éventuellement permettre la prise en considération d'autres éléments du problème (par exemple l'influence des juges), jusque-là ignorés. En somme, il peut s'agir d'une définition d'un choix collectif en plusieurs étapes, les conditions s'affinant d'une étape à l'autre. Dans le cas d'une étude de type psycho-sociologique, on pourrait peut-être considérer que la définition des centres entre dans le cadre d'une première étude de type statique de la situation, à laquelle doit succéder une étude psycho-dynamique, où l'on verrait comment s'établit le compromis.

La condition de domaine non restrictif [1] exige que la règle puisse être utilisée dans tous les cas possibles. Elle est bien évidemment satisfaite ici. De même sont satisfaites les conditions d'*anonymat* [2] (invariance par rapport à une permutation des juges, autrement dit, tous les juges jouent *a priori* le même rôle), et de *neutralité* [3] (toutes les paires de candidats jouent *a priori* le même rôle).

Abordons la très puissante condition d'*indépendance des alternatives* [4], qui demande que la préférence collective sur deux candidats ne dépende que des préférences individuelles sur ces candidats. On voit bien comment cette condition peut entrer en conflit avec la transitivité, puisque celle-ci implique au contraire une interdépendance entre les couples de candidats [5]. Puisque nous nous sommes toujours placés en terrain transitif (les procédures aboutissent toujours à des ordres), cette condition n'est en général pas respectée. Prenons par exemple les cas suivants de deux juges et de trois candidats :

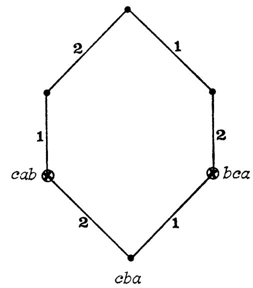
---

1. Sen [17] p. 37.
2. Sen [17] p. 69.
3. Sen [17] p. 69.
4. Sen [17] p. 37.
5. Cette condition a fait l'objet d'une critique récente [8].



a)

Figure 3



b)

Figure 4

Dans les deux cas, points centraux et points moyens sont uniques et confondus (*abc* pour le cas a) et *cba* pour le cas b)). Or, dans les deux cas, les juges sont en désaccord sur la paire $\{a,b\}$. Avec la condition d'indépendance des alternatives, le choix collectif devrait être le même. En fait, il n'en est rien, puisque pour a) le choix collectif contient *ab*, et pour b), il contient *ba*.

Le même résultat s'étend au cas des trois points médians dont les avis sur $\{a,b\}$ ne sont pas toujours les mêmes.

Considérons maintenant une condition de *monotonie* adaptée de la condition de « positive responsiveness »[1] :

- Soit un premier groupe d'opinion $G \rightarrow \mathscr{P}_A$ et, pour ce groupe deux candidats a et b tels que tous les centres satisfont *ab* (a est préféré à b).
- Soit une opinion exprimée x telle que *ba*, b et a étant de plus voisins dans x.

On considère le nouveau groupe $G' \rightarrow \mathscr{P}_A$ tel que seul x soit changé en x', où x et x' ne diffèrent que par le couple *ab* (x' préférant a à b). La condition de monotonie demande que, pour ce nouveau groupe, n'apparaisse pas de centres tels que *ba*.

On voit qu'il en est bien ainsi : l'éloignement des opinions telles que *ba* à $\hat{G}$ ne peut pas diminuer quand x' (tel que *ab*) remplace x (tel que *ba*). Si donc il n'existait pour $\hat{G}$ aucun centre tel que *ba*, il n'en peut pas exister non plus pour $\hat{G}'$.

Dans le cas des points médians, on a aussi le résultat suivant : l'éloignement des opinions telles que *ab* diminuant d'une unité, et celui des opinions telles que *ba* augmentant d'une unité, s'il existait pour G des points médians tels que *ba*, ils disparaîtraient pour $\hat{G}'$.

En utilisant la proposition 1 de l'appendice, on peut généraliser le premier résultat au cas où a et b ne sont plus voisins dans x (tel que *ba*), et où x' est obtenu de x par simple échange de ces deux candidats : tout ordre tel que *ab* étant plus proche de x' que de x, il ne peut apparaître de centres tel que *ba*, s'il n'en existait pas auparavant.

Prenons pour finir le *principe faible de Pareto*[2] : si tous les juges préfèrent a à b, alors il doit en être de même pour l'opinion collective.

1. Sen [17] p. 69.
2. Sen [17] p. 37.

Comme nous l'avons dit avant de définir les centres dans I [Ĝ], le théorème de convexité des centres définis en minimisant des éloignements « monotones » (cf. appendice) dans tout le permutoèdre montre que les centres sont nécessairement dans I [Ĝ], autrement dit, qu'ils conservent les avis communs, et satisfont donc au principe faible de Pareto.

6. CONCLUSION

Le but de cet article a été de dégager un certain nombre de notions apparaissant plus particulièrement dans la représentation du permutoèdre et pouvant être utilisées dans des problèmes de choix collectif, où une opinion est un ordre total. Ainsi, l'ensemble des avis communs est représenté par l'intervalle convexe engendré par les opinions individuelles. Dans cet intervalle, on peut distinguer les *bases de pôles,* ensembles d'opinions pouvant engendrer l'intervalle entier et de cardinal minimum, et les opinions *intermédiaires* par rapport à ces bases : si un juge se retire sans que l'ensemble des avis communs soit modifié, c'est que son opinion était intermédiaire par rapport à une certaine base de pôles.

Pour le problème plus particulier de déterminer une opinion collective à partir d'opinions individuelles, nous avons défini de trois façon des *centres* par rapport aux opinions exprimées, qui ont tous la propriété de conserver les avis communs : ce sont les *points centraux, médians et moyens.* Nous avons indiqué quelques relations entre les points médians et la médiane Condorcet, obtenue par la règle de majorité, relations examinées plus en détail dans un autre article ([12]) de ce numéro. Différentes propriétés de ces centres ont été examinées. En particulier, si, de par leur construction, les centres sont toujours des ordres totaux, il n'y a pas en général unicité. En fait, l'existence de plusieurs choix possibles selon une première série de critères peut être un avantage puisque l'on peut ensuite introduire une nouvelle série de critères, pour discriminer parmi ces choix.

La description graphique de l'organisation des opinions conservant les avis communs pourrait, à notre avis, aider à mieux comprendre le déroulement effectif de l'établissement d'un compromis, ou choix collectif.

APPENDICE : *Le théorème de convexité pour les Centres* [1]

Proposition 1 *:* Soient deux ordres t_1 et t_2 tels que le couple (ij) (i avant j) appartienne à t_1 et que le couple inverse (ji) appartienne à t_2 ; alors, l'ordre t'_1 déduit de t_1 en échangeant i et j est plus proche (distance de Kendall) de t_2 que ne l'était t_1.

Démonstration : Prenons pour t_1 l'ordre numérique $t_1 = (1,2,\ldots\ i,..,k,..,j,..,n)$.

On a alors pour t'_1 : $t'_1 = (1,2,\ldots\ j,..,k,..,i,..,n)$.

Autrement dit, t'_1 se distingue de t_1 par les paires suivantes : $\{i,j\}$ et les paires $\{i,k\}$ et $\{k,j\}$ pour $i < k < j$; tous les autres couples restent identiques.

1. Le théorème est démontré dans le cas des points médians dans [12]. On s'est inspiré de cette démonstration pour parvenir au cas général.

La distance de t_2 à t'_1 est donc modifiée uniquement en raison de ces paires. Notons $d_{\{ab\}}(t_1,t_2)$ la contribution à $d(t_1,t_2)$ de la paire {a,b} : c'est soit 0, si les couples sont les mêmes dans les deux ordres, soit 1 s'ils sont inverses.

Pour la paire $\{i,j\}$: $d_{\{ij\}}(t_1,t_2) = 1$ tandis que $d_{\{ij\}}(t'_1,t_2) = 0$.

Considérons à présent un des triplets $\{i,j,k\}$ où $i < k < j$. Trois cas seulement sont possibles pour t_2, puisque j est avant i par hypothèse (voir illustration sur $\mathscr{P}_3$, fig. 5).

Ce sont les triplets ordonnés (kji), (jik) et (jki). La contribution des paires $\{i,k\}$ et $\{k,j\}$ aux distances sont, dans les deux premiers cas :

$$d_{\{ik\}}(t_1,t_2) + d_{\{kj\}}(t_1,t_2) = 1$$

$$d_{\{ik\}}(t'_1,t_2) + d_{\{kj\}}(t'_1,t_2) = 1$$

dans le dernier cas :

$$d_{\{ik\}}(t_1,t_2) + d_{\{kj\}}(t_1,t_2) = 2$$

$$d_{\{ik\}}(t'_1,t_2) + d_{\{kj\}}(t'_1,t_2) = 0$$

Ainsi, la contribution totale aux distances de t_2 à t_1 ou t'_1 des paires concernées par l'échange diminue d'une unité au moins quand on passe de t_1 à t'_1. Il en est de même pour la distance elle-même.

Définition : L'éloignement $r(y,\hat{G}) = f(d(y,x)\ ;\ x \in \hat{G})$ est dit *monotone* si lorsque, pour tout $x \in \hat{G}$, $d(y,x) < d(y',x)$, alors $r(y,\hat{G}) < r(y',\hat{G})$.

On vérifie aisément la :

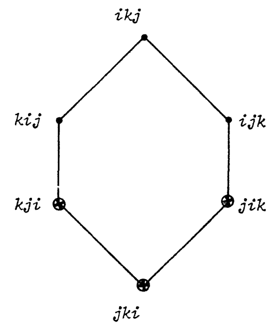
Proposition 2 : Les éloignements définis dans la section 4, et dont la minimisation donne les points centraux, médians et moyens, sont monotones.

Théorème : Soit un ensemble de sommets $\hat{G}$ du permutoèdre. Pour tout éloignement monotone, la minimisation par rapport à $\hat{G}$, dans le permutoèdre tout entier, conduit à des « centres » intérieurs à l'intervalle convexe engendré par $\hat{G}$.

Démonstration : Il faut montrer que tout couple (ab) commun à tous les points de $\hat{G}$ appartient aux centres obtenus par minimisation d'un éloignement monotone : soit c un tel centre :

$$r(c,\hat{G}) = \min_{y \in \mathscr{P}_n} r(y,\hat{G}).$$

Supposons que (ba) appartienne à c. Alors, c' obtenu de c en échangeant a et b, est, d'après la proposition 1, strictement plus proche de tous les points de $\hat{G}$, et par conséquent, de par la monotonie, son éloignement à $\hat{G}$ est strictement moindre que celui de c, qui n'est donc pas à éloignement minimum, et ne peut être un centre.



	ij	ik	kj
ikj	+	+	+
kji	−	−	+
jik	−	+	−
jki	−	−	−

Le triplet $\{i,j,k\}$

Figure 5

La réalisation graphique est due à J. Leconte.

BIBLIOGRAPHIE (PARTIELLE)

[1] ARROW, K. J., *Social choice and individual values,* New York, Wiley, 1951, 2nd ed., 1963.

[2] BARBUT, M., *Médianes Condorcet et Kendall,* S.E.M.A., Paris.

[3] BARBUT, M. et FREY, L., *Techniques ordinales en analyse des données : Algèbre et combinatoire,* Paris, Hachette, 1971.

[4] BLACK, D., *The Theory of committees and elections,* Cambridge, Cambridge University Press, 1958.

[5] DUSHNICK, B. et MILLER, E. W., « Partially ordered sets », *American journal of mathematics,* 63, 1941, pp. 600-610.

[6] FELDMAN-HÖGAASEN, J., « Ordres partiels et permutoèdre », *Math. Sc. hum.,* n° 28, 1969.

[7] FELDMAN-HÖGAASEN, J., « Description du permutoèdre à l'aide des permutations voisines », *Ordres totaux finis,* Paris, Gauthier-Villars, 1971, pp. 109-114.

[8] FISHBURN, P. C., « Should social choice be based on binary comparisons ? », *Journal of mathematical sociology,* 1, 1971, 133.

[9] GUILBAUD, G. Th., « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie appliquée,* vol. 15, oct.-déc. 1952.

[10] GUILBAUD, G. Th. et ROSENTHIEL, P., « Analyse algébrique d'un scrutin », *Math. Sc. hum.,* n° 4, 1963. Voir aussi *Ordres totaux finis,* Paris, Gauthier-Villars, 1971, pp. 71-100.

[11] Hiraguti, T., « On the dimension of orders », *Science Reports of the Kanazawa University*, IV, 1955, p. 1-20.

[12] Monjardet, B., « Tournois et ordres médians pour une opinion », *Math. Sci. hum.*, 43, 1973.

[13] *Ordres totaux finis*, Paris, Gauthier-Villars, 1971.

[14] Ore, O., « Theory and graphs », *American mathematical society*, 1962.

[15] Parlebas, P., « Effet Condorcet et dynamique sociométrique », *Math. Sci hum.*, n° 36, 1971, et n° 37, 1972.

[16] Rosenstiehl, P. et Mothes, J., *Mathématiques de l'action*, Paris, Dunod, 1965.

[17] Sen, A. K., *Collective choice and social welfare*, Londres, Oliver and Boyd, 1970.