G. TH. GUILBAUD

Qu'est-ce qu'une permutation ?

Mathématiques et sciences humaines, tome 42 (1973), p. 5-16
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1973__42__5_0>

Math. Sci. hum. (11e année, no 42, 1973, p. 5-16)

QU'EST-CE QU'UNE PERMUTATION?

par
G. Th. GUILBAUD

RÉSUMÉ

Il s'agit d'exercices sur les permutations : les tableaux de Young, qui ont été utilisés dans la fort savante théorie de la représentation du groupe symétrique, peuvent aussi être manipulés à un niveau très élémentaire.

SUMMARY

This paper deals with exercises on permutations : the "tableaux" of Young which have been used in the sophisticated theory of the representation of symmetric groups can also be handled on a very elementary level.

L'objet mathématique désigné sous le nom traditionnel de
permutation
peut être présenté de bien des manières.

Choisissons ici la présentation suivante (qui n'est pas la plus commune, mais qui est commode) : *un* ensemble muni de *deux* relations d'ordre (total et strict).

Ainsi, on parlera de « la permutation »

$$\boxed{b \quad j \quad i \quad f \quad a \quad d \quad e \quad c \quad g \quad h} \qquad (p)$$

Il faudra entendre :

1) un ensemble : l'ensemble des dix premières lettres de l'alphabet.

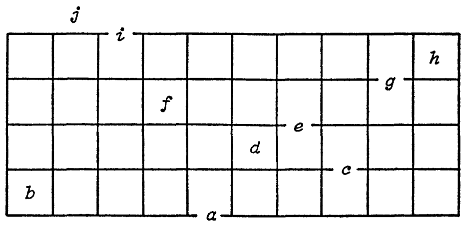
2) un premier ordre : l'ordre alphabétique ou de *référence :*

(*O*1) $\qquad a < b < c < \ldots < i < j$

3) un second ordre : l'ordre de succession dans la *présentation* (p) ci-dessus :

(*O*2) $\qquad b < j < i < f <$ etc.

Une première représentation graphique est analogue à celle de la notation musicale ; elle figure le premier ordre, l'alphabétique, selon une « portée » (la relation d'ordre étant : au-dessus, au-dessous) et le second ordre, la succession mélodique, selon l'écriture *usuelle* (avant, après).



Il peut être utile de connaître une construction différente préconisée par C. Schensted et qui utilise le dispositif que A. Young appelait « tableau» (en français dans le texte).

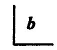
Voici d'abord l'idée directrice de cette procédure.

On *introduit* les objets selon l'un des ordres, soit si c'est le (*O*2) ci-dessus : d'abord *b*, puis *j*, puis *i*, et ainsi de suite.

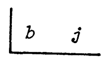
Mais on *range* ces lettres en suivant l'autre ordre, soit ici l'alphabétique. On arrive ainsi à une sorte de compromis entre les deux ordres, ce qui se traduit (graphiquement) par un ordre partiel.

Précisons maintenant les détails techniques.

On écrira d'abord la première lettre (selon l'ordre d'introduction) soit :

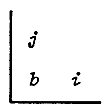


puis la seconde, à la suite :



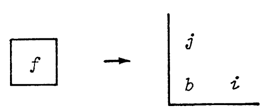
Mais quand il faut introduire *i* on ne peut plus l'écrire à la suite, puisqu'on veut, pour ranger, tenir compte de l'ordre alphabétique : on décide alors de déplacer *j* pour placer *i*. Il n'est pas question non plus de mettre *j* à la suite, puisqu'on veut tenir compte de l'ordre d'introduction ; on fera donc remonter *j* à la ligne du dessus.

On écrira donc :



Et l'on continue ; la règle étant : ranger la nouvelle lettre à sa place « naturelle» dans la première ligne du bas, au besoin en déplaçant une lettre déjà écrite. Quant à la lettre déplacée, elle doit être présentée à la ligne d'en dessus — et, bien entendu, elle doit s'y ranger à son rang, en déplaçant au besoin une autre lettre qui remontera encore, etc.

Ainsi, sur notre exemple, quand on présente *f* au tableau précédent :



nos conventions exigent que *f* prenne la place de *i* puisque, selon l'ordre alphabétique *f* est situé *entre* *b* et *i*, et *i* celle de *j* (puisqu'il est avant).

Soit le résultat :

$$\begin{array}{|ll} j & \\ i & \\ b & f \\ \hline \end{array}$$

Puis, on présente *a* qui prend la place de *b*, d'où une nouvelle cascade de déplacements :

$$\begin{array}{|ll} j & \\ i & \\ b & \\ a & f \\ \hline \end{array}$$

On continue avec *d*, qui repousse *f*, lequel prend la place à la seconde ligne :

$$\begin{array}{|ll} j & \\ i & \\ b & f \\ a & d \\ \hline \end{array}$$

Puis avec *e* :

$$\begin{array}{|lll} j & & \\ i & & \\ b & f & \\ a & d & e \\ \hline \end{array}$$

Puis *c* :

$$\begin{array}{|lll} j & & \\ i & & \\ f & & \\ b & d & \\ a & c & e \\ \hline \end{array}$$

Puis g, et enfin h, ce qui donne finalement :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
j \\
\cline{1-1}
i \\
\cline{1-1}
f \\
\cline{1-2}
b & d \\
\hline
a & c & e & g & h \\
\hline
\end{array}$$

On remarquera que l'ordre alphabétique de rangement est respecté aussi bien en lignes qu'en colonnes dans le tableau final.

Dans une pareille construction les deux ordres ne jouent pas le même rôle : l'un gouverne l'*introduction* des éléments, l'autre leur *rangement.* Mais on pourrait échanger les rôles (dualité, comme on dit), c'est-à-dire *introduire* successivement les lettres dans l'ordre alphabétique et, pour les *ranger* en tableau, suivre l'ordre donné par $(O1)$.

Voici alors la suite de tableaux qu'on construira selon la même règle, mais en adoptant ce nouveau point de vue :

$$\begin{array}{|l} a \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|l} a \\ b \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|ll} a & \\ b & c \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|ll} a & c \\ b & d \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|lll} a & c & \\ b & d & e \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|lll} c & & \\ a & d & \\ b & f & e \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|llll} c & & & \\ a & d & & \\ b & f & e & g \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|lllll} c & & & & \\ a & d & & & \\ b & f & e & g & h \\ \hline \end{array}
\quad
\begin{array}{|lllll} c & & & & \\ a & & & & \\ f & d & & & \\ b & i & e & g & h \\ \hline \end{array}$$

et enfin :

$$\begin{array}{|lllll} c & & & & \\ a & & & & \\ f & & & & \\ i & d & & & \\ b & j & e & g & h \\ \hline \end{array}$$

Un rangement en tableau selon C. Schensted résulte donc de la confrontation des deux ordres : l'ordre d'introduction et l'ordre de rangement. A titre d'illustration, voici tous les cas possibles, pour un ensemble de trois objets :

ORDRE D'INTRODUCTION

ORDRE DE RANGEMENT

	a b c	*a c b*	*b a c*	*c a b*	*b c a*	*c b a*
a b c	*a b c*	*c* *a b*	*b* *a c*	*c* *a b*	*b* *a c*	*c* *b* *a*
a c b	*b* *a c*	*a c b*	*b* *a c*	*c* *a b*	*b* *c* *a*	*c* *a b*
b a c	*a* *b c*	*a* *b c*	*b a c*	*c* *a* *b*	*c* *b a*	*c* *b a*
c a b	*a* *c b*	*a* *c b*	*b* *a* *c*	*c a b*	*b* *c a*	*b* *c a*
b c a	*a* *b c*	*a* *c* *b*	*a* *b c*	*c* *b a*	*b c a*	*c* *b a*
c b a	*a* *b* *c*	*a* *c b*	*b* *c a*	*a* *c b*	*b* *c a*	*c b a*

Il est clair que, pour construire un pareil tableau, il n'est pas nécessaire d'en effectuer la construction pour les 36 cas possibles. Dès que l'on a calculé par exemple que :

$$\left\{\begin{array}{l}\textbf{le Rangement} = abc\\ \textbf{l'Introduction} = cab\end{array}\right\}\ \textbf{produisent le tableau}\qquad \begin{array}{ll} c & \\ a & b \end{array}$$

on peut effectuer toute substitution qu'on voudra sur les lettres, par exemple :

Remplacer : *a* par *b*
b* par *c
c* par *a

Ce qu'on écrira : $(abc) \to (bca)$
ou : $(cab) \to (abc)$

et l'on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{le Rangement} & = bca \\ \text{l'Introduction} & = abc \end{array}\right\} \text{ produisent le tableau } \qquad \begin{array}{|ll} a & \\ b & c \\ \hline \end{array}$$

Soient alors, pour un ensemble E quelconque, deux ordres O_1 et O_2 ; supposons qu'on ait calculé

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} \text{Rangement} & = O_1 \\ \text{Introduction} & = O_2 \end{array}\right. \\ \hline \text{produisent le tableau } T \end{array}$$

on pourra effectuer une substitution quelconque S pour avoir :

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ll} \text{Rangement} & = SO_1 \\ \text{Introduction} & = SO_2 \end{array}\right. \\ \hline \text{produisent : } \quad ST \end{array}$$

En particulier, il existe une substitution telle que :

$$SO_2 = O_1, \qquad O_2 = S^{-1}O_1$$

On aura alors :

$$\begin{array}{r} O_1 \\ S^{-1}\ O_1 \\ \hline T \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} SO_1 \\ O_1 \\ \hline ST \end{array}$$

Ce qui permet de voir l'effet du changement de rôle pour O_1, le même ordre O_1 étant pris d'abord comme ordre de Rangement puis comme ordre d'Introduction, dans la construction des deux tableaux T et ST.

Pour étudier comment varie le tableau (produit) en fonction des deux ordres (facteurs), il suffira donc de faire varier l'un d'eux.

Fixons, par exemple, l'ordre de Rangement : on constate que la correspondance entre ordre d'introduction et tableau produit n'est pas injective : on peut obtenir le même tableau pour deux ordres *différents*. Mais elle a une forme bien particulière qui sera peut-être plus aisée à décrire sur le cas des ensembles de 4 objets.

Ordre de rangement = *a b c d*

Ordre d'introduction	Tableau produit
a b c d	*a b c d*
a b d c *a d b c* *d a b c*	*d* *a b c*
a c b d *a c d b* *c a b d*	*c* *a b d*
b a c d *b c a d* *b c d a*	*b* *a c d*
b a d c *b d a c*	*b d* *a c*
c a d b *c d a b*	*c d* *a b*
a d c b *d a c b* *d c a b*	*d* *c* *a b*
b d c a *d b a c* *d b c a*	*d* *b* *a c*
c b a d *c b d a* *c d b a*	*c* *b* *a d*
d c b a	*d* *c* *b* *a*

Ainsi apparaît une classification de vingt-quatre ordres possibles, la distribution se faisant selon la formule :

$$4\,! = 1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2$$

(laquelle est liée à la théorie de la représentation des groupes et aux relations entre les « caractères » de Frobenius ; on pourra consulter D. E. Rutherford ou G. de B. Robinson ou Young lui-même).

Dans le registre précédent (le lecteur pourra, à titre d'exercice utile, établir le registre analogue pour cinq objets), on voit, par exemple, que — pour un même ordre de rangement, ici l'alphabétique — les trois ordres d'introduction : *a b d c*, *a d b c* et *d a b c*, fournissent le même tableau final ; mais tous les trois n'y arrivent pas, par le même chemin :

1) *a b d c* donne successivement : $\begin{array}{|l} a \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} a & b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} a & b & d \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$

2) *a d b c* " " $\begin{array}{|l} a \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} a & d \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} d & \\ a & b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$

3) *d a b c* " " $\begin{array}{|l} a \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l} a \\ a \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} d & \\ a & b \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$

Pour désigner chacun de ces trois chemins, il suffit de donner la suite des formes vides, c'est-à-dire les schémas :

1) $\begin{array}{|l} \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$

2) $\begin{array}{|l} \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} \cdot & \\ \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$

3) $\begin{array}{|l} \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|l} \cdot \\ \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|ll} \cdot & \\ \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|lll} \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$

ou bien, si l'on préfère, comme le fait Schensted, donner l'ordre de remplissage des cases du tableau.

soit pour le premier : $\begin{array}{|lll} 4 & & \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$

pour le second : $\begin{array}{|lll} 3 & & \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$

pour le troisième : $\begin{array}{|lll} 2 & & \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$

Pour indiquer l'ordre d'occupation des cases d'un tableau, on peut les numéroter comme on vient de le faire — mais l'utilisation de l'ensemble ordinal typique : « 1, 2, 3, 4, etc. » n'est pas indispensable, c'est même quelque chose d'étranger à notre étude car nous disposons ici, d'un « ordre de référence », l'ordre de rangement alphabétique des lettres — dans notre exemple : « *a*, *b*, *c*, *f* ».

On pourra donc noter les trois cas précédemment distingués de la façon suivante :

1) $\begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$ qui signifie la même chose que $\begin{array}{|lll} 4 & & \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$

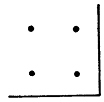
2) $\begin{array}{|lll} c & & \\ a & b & d \\ \hline \end{array}$,, ,, ,, $\begin{array}{|lll} 3 & & \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$

3) $\begin{array}{|lll} b & & \\ a & c & d \\ \hline \end{array}$,, ,, ,, $\begin{array}{|lll} 2 & & \\ 1 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$

ORDRES D'INTRODUCTION

pour un *Tableau* de forme $\begin{array}{ccc|} & & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$

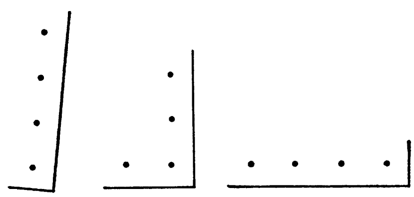
<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Ordre d'occupation des cases</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|lll} c & & \\ a & b & d \\ \hline \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|lll} b & & \\ a & c & d \\ \hline \end{array}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Contenu des cases</td><td>$\begin{array}{|lll} d & & \\ a & b & c \\ \hline \end{array}$</td><td>a b c d</td><td>a d b c</td><td>d a b c</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|lll} c & & \\ a & b & d \\ \hline \end{array}$</td><td>a c d b</td><td>a c b d</td><td>c a b d</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|lll} b & & \\ a & c & d \\ \hline \end{array}$</td><td>b c d a</td><td>b c a d</td><td>b a c d</td></tr>
</table>

pour un *Tableau* de forme 

Ordre d'occupation des cases

Contenu des cases	$\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} b & d \\ a & c \end{matrix}$
$\begin{matrix} b & d \\ a & c \end{matrix}$	$b \quad d \quad a \quad c$	$b \quad a \quad d \quad c$
$\begin{matrix} c & d \\ a & b \end{matrix}$	$c \quad d \quad a \quad b$	$c \quad a \quad d \quad b$

On exprimerait de façon analogue ce qui concerne les autres formes possibles (il y en a trois comme on a vu).



Nous voici arrivés au terme de la construction :

C'est une bijection entre couple d'ordres (complets)

1) deux ordres (quelconques) sur le même ensemble : c'est une permutation par exemple :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$$

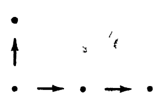
2) deux ordres sur les cases d'un « tableau» — mais ordres totaux compatibles avec l'ordre partiel du tableau, ainsi

$$\begin{matrix} b & & \\ a & c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c & & \\ a & b & d \end{matrix}$$

Chacun de ces tableaux, soit, par exemple :

$$\begin{matrix} c & & \\ a & b & d \end{matrix}$$

représente un morphisme de l'ordre partiel :

 (P)

dans l'ordre total : $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet$ *(T)*

La bijection étant ici notée par la reproduction d'une même lettre :

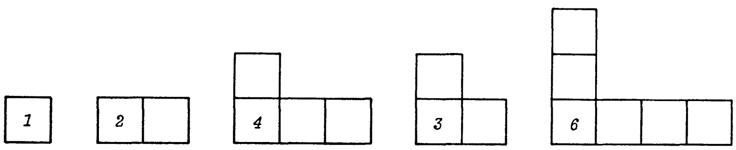
$$\begin{array}{l} c \\ \uparrow \\ a \to b \to d \end{array} \qquad\qquad a \to b \to c \to d$$

Si l'on veut dénombrer ces bijections

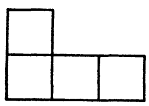
$$P \to T$$

c'est-à-dire déterminer le nombre des ordres partiels du type (P) compatibles avec l'ordre total (T), on peut appliquer la règle de Thrall, que voici :

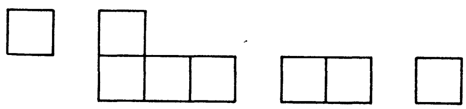
On attribue à chaque élément de P (cases ou places) un poids qui est le nombre des cases d'une « équerre» (en anglais : *hook*). Exemples :



, etc.

Pour la forme (P) 

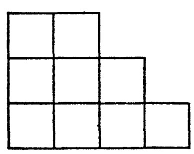
les équerres relatives à chaque case sont



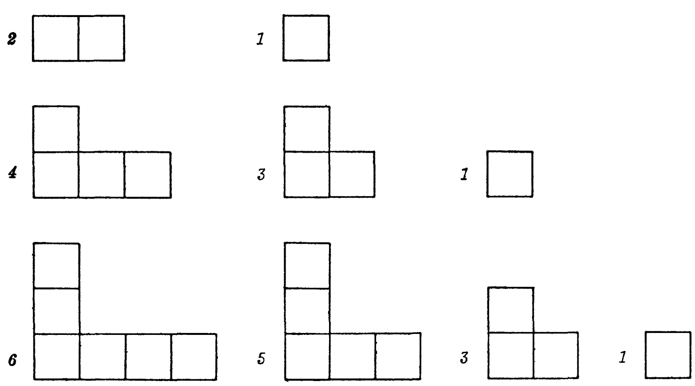
de poids respectifs :

1 4 4 1

Pour une autre forme telle que



On a :



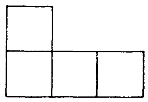
Désignons par h_1, h_2, ..., h_n les poids ainsi calculés.

Le nombre cherché est

$$n \,/\, \Pi h_i$$

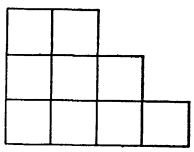
où Πh_i désigne le produit des n poids h_i.

Exemples

1)  les poids sont $\left\{\begin{array}{lll} 1 & & \\ 4 & 2 & 1 \end{array}\right.$

le nombre des morphismes $= \dfrac{24}{8} = 3$

comme il est facile de vérifier.

2)  poids $\left\{\begin{array}{llll} 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 8 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right.$

nombre des morphismes $= 168$

BIBLIOGRAPHIE

Robinson, G. de B., *Representation theory of the symmetric group*, Toronto, University of Toronto Press, 1961, 204 p.

Rutherford, D. E., *Substitutional analysis*, Edinburgh, University Press, 1948, 103 p.

Schutzenberger, M. P., "Quelques remarques sur une construction de Schensted", *Mathematica Scandinavia*, 12 (1963), pp. 117-128.

Schutzenberger, M. P., "Promotion des morphismes d'ensembles ordonnés", *Discrete Mathematics*, Vol. 2, num. 1, march 1972, pp. 73-94.