

M. TREHEL

Catalogues, treillis de catalogues, génération et décomposition

Mathématiques et sciences humaines, tome 40 (1972), p. 5-18

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1972__40__5_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CATALOGUES, TREILLIS DE CATALOGUES, GÉNÉRATION ET DÉCOMPOSITION

par
M. TREHEL¹

Les catalogues forment un type particulier de fichiers arborescents. Les opérations qui consistent à réunir les informations ou à capter ce qui est commun à deux catalogues correspondent à l'union et l'intersection de la théorie des treillis. Cette étude donne un moyen de générer cette classe de treillis indépendamment des catalogues et de retrouver la forme des catalogues à partir de la forme du treillis.

INTRODUCTION

Le problème de l'échange d'informations sur bande magnétique entre laboratoires s'est posé dès l'apparition de ces bandes dans les centres de calcul : pour que le centre récepteur puisse décoder l'information, il est nécessaire que le format soit parfaitement défini. Le Centre d'Études pour la Traduction Automatique de Grenoble et le Laboratoire de Linguistique de la Rand Corporation à Santa Monica en Californie ont coordonné leurs efforts pour arriver à un format commun en 1963. Le résultat fut appelé format de catalogue [5]. La façon de relier entre eux les différents types d'information était expliquée dans un cas particulier. C'est seulement plus tard que la structure de catalogue fut définie de manière générale, à l'aide de la théorie des ensembles ordonnés, et que diverses propriétés mathématiques apparurent [8].

Bien que les catalogues soient issus de préoccupations linguistiques, ce n'est pas dans cette discipline qu'on en trouve les exemples les plus intéressants, mais plutôt à propos de préoccupations administratives. Nous allons donc présenter la notion de catalogue à partir d'exemples de complexité croissante, puis donner des schémas de fichiers qui ont été réellement construits sur ce format.

De nombreux fichiers administratifs ont une structure de catalogue à carte linéaire : ils sont constitués d'un certain nombre de fiches qui ont toutes le même nombre de niveaux [1]. Les informations qu'on trouve à un niveau donné sont dites être les différentes étiquettes d'une même caractéristique.

Supposons qu'on ait trois caractéristiques : un nom d'individu, son prénom, puis un code d'identification. Chaque fiche sera constituée de ces trois éléments.

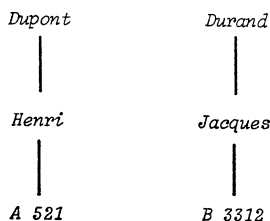


Figure 1

1. Ce travail a été réalisé à :
IUT, route de Perros-Guirec, 22302 Lannion.
UER, IRMA, Mathématiques Appliquées, Université scientifique et médicale de Grenoble.

L'information est de type « un pour un » puisque chaque individu n'a qu'un prénom principal et qu'un code. Toutefois, il peut y avoir plusieurs individus portant le même nom, et éventuellement le même prénom.

On peut alors imaginer de regrouper les informations de plus haut niveau.

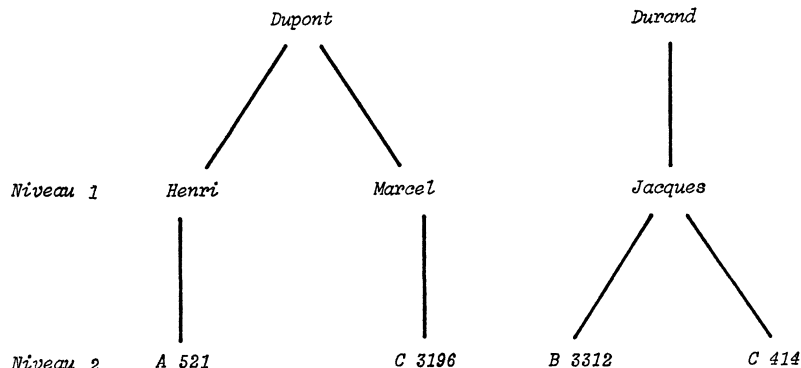


Figure 2

La mise sous forme arborescente n'a pas tellement de raison d'être dans ce cas. Présentons l'exemple de l'emploi du temps dans une université, où il en va différemment. Au nom de la personne, on attache les cours qu'il fait, puis le lieu, le jour, l'heure où il les fait.

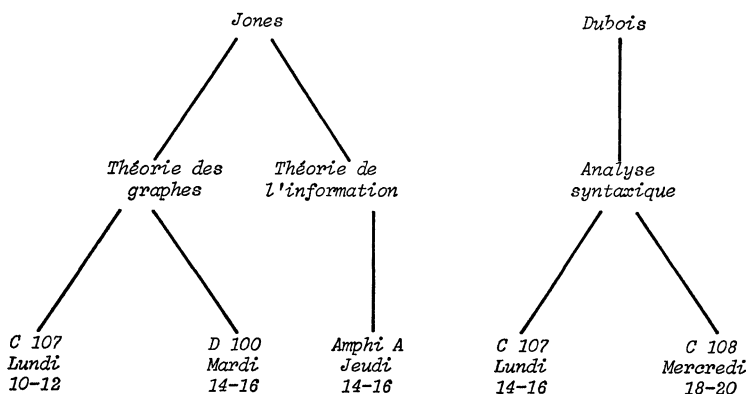


Figure 3

Un tel catalogue a cinq fiches.

La description des caractéristiques est faite au moyen d'une chaîne appelée carte et qui, dans cet exemple, se présente ainsi :

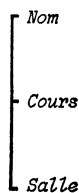


Figure 4

Une telle carte est dite linéaire. On peut imaginer une carte arborescente dans laquelle, si deux caractéristiques ne sont pas irrémédiablement liées l'une à l'autre, elles ne sont plus l'une sous l'autre. Ainsi, on peut avoir la carte :

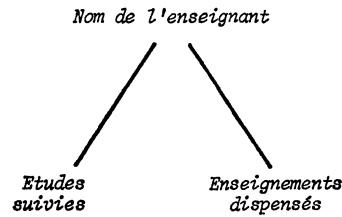


Figure 5

Afin que le catalogue soit une arborescence, nous adjoignons une racine ω .

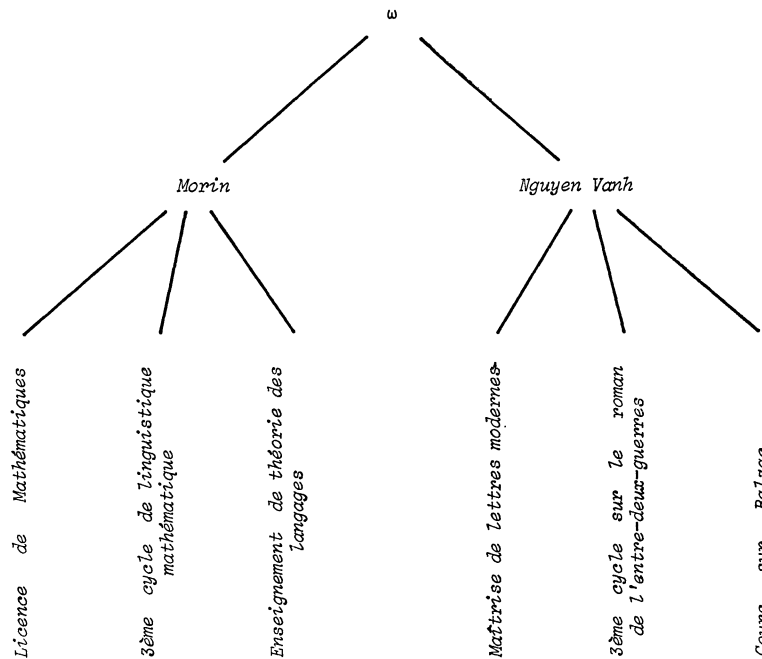


Figure 6

La fiche n'est plus une chaîne comme précédemment, mais une arborescence.

C'est une partie du catalogue, composée d'une et une seule étiquette de chaque caractéristique. Il y a quatre fiches dans l'exemple ci-dessus, chacune étant composée du nom d'un individu, d'un cycle d'études qu'il a suivi, d'un enseignement qu'il dispense.

On a déjà dit que c'est à propos de linguistique que les catalogues ont été introduits. D'abord le corpus, ensemble de textes servant à tester les programmes de traduction automatique, a été mis sur bandes sous le format de catalogues. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les notices de la Rand Corporation ([4] et [5]).

Des dictionnaires techniques de l'anglais au russe ont aussi été mis sous format de catalogue : chaque dictionnaire (D) donne une liste de numéros (NR) de noms.

A chaque numéro est attaché ses formes en russe (FR) et ses équivalents anglais (EE).

Sous chaque FR on trouve des codes grammaticaux (CG) et des codes idiomatiques (CI).

La carte est la suivante :

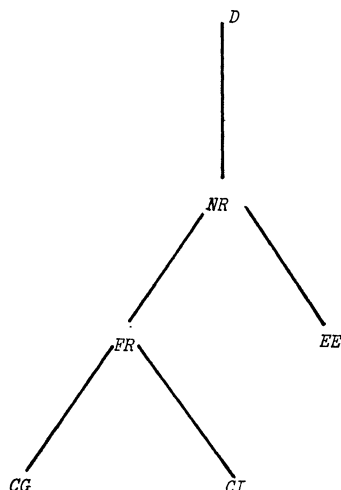


Figure 7

Tous ces exemples ne suffisent pas pour définir formellement un catalogue. La difficulté rencontrée pour aborder cette définition est due au fait qu'un catalogue n'est pas un ensemble, car plusieurs de ses éléments peuvent porter le même nom, c'est-à-dire la même étiquette, donc, *a fortiori*, ce n'est pas un ensemble ordonné.

Ainsi, pour la figure 5 plusieurs enseignants peuvent avoir suivi des études communes et dès lors le nom de ces études se retrouvera à plusieurs endroits dans le catalogue. Nous passerons donc par la notion intermédiaire de précatalogue, qui, lui, est un ensemble ordonné, dont on peut ensuite étiqueter des éléments distincts avec la même étiquette, sous certaines conditions.

L'ensemble des étiquettes d'une même caractéristique A sera appelé la collection liée à A . Nous serons aussi amenés à imposer à chaque fiche d'être complète, c'est-à-dire d'avoir une et une seule étiquette pour chaque caractéristique. Nous utiliserons pour cela la notion d'homomorphisme de première catégorie que nous verrons dans les rappels.

Après avoir défini formellement les catalogues, nous remarquerons dans une première partie que leur union et intersection permettent de définir des treillis. Dans une seconde partie, nous montrerons que ces treillis peuvent s'engendrer à l'aide du produit direct et d'une autre opération appelée produit contracté.

Dans une troisième partie, nous constaterons qu'étant donné un de ces treillis, il ne peut avoir été engendré que d'une seule manière et nous donnerons un algorithme de décomposition. Enfin, nous verrons dans la dernière partie quelles sont les cartes qui peuvent donner lieu à un certain treillis de catalogues.

RAPPELS

Dans un ensemble ordonné on dit que y couvre x si $x < y$ et si $x \leq z \leq y$ implique $z = x$ ou $z = y$. On note $x < y$.

Une chaîne est une suite d'éléments x_1, x_2, \dots, x_p telle que $x_1 < x_2 \dots < x_p$. Une chaîne maximale est une suite d'éléments x_1, x_2, \dots, x_p telle que $x_1 < x_2 \dots < x_p$ et x_1 est un élément minimal, x_p est un élément maximal. Dans la suite, quand on parlera de chaînes, il s'agira toujours de chaînes maximales.

On dit que x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Dans un ensemble ordonné ayant un élément nul 0 et un élément universel 1 , y est dit un complément de x si :

$$\begin{aligned} z \geq x, \quad z \geq y & \text{ impliquent } z = 1 \\ z \leq x, \quad z \leq y & \text{ impliquent } z = 0. \end{aligned}$$

Un ensemble ordonné complété est tel que tout élément admette un complément. Une arborescence est un ensemble ordonné fini tel que deux éléments quelconques ont un minorant commun mais pas de majorant commun. L'élément nul est appelé racine.

On distinguera l'ensemble X des éléments d'une arborescence Y , de l'arborescence elle-même, qui est la donnée de X et d'une relation d'ordre \mathcal{R} qui en fait une arborescence. On notera $Y = (X, \mathcal{R})$.

Une forêt est une union d'arborescences disjointes.

Une pseudo-arborescence [7] est une arborescence étiquetée, deux éléments distincts peuvent porter la même étiquette. Dans les pseudo-arborescences dont il sera question, les éléments distincts comparables porteront des étiquettes distinctes. La notion de chaîne maximale peut donc s'appliquer à des pseudo-arborescences.

Les racines d'une forêt seront dites de niveau 0 ; si x est de niveau i et y couvre x , alors x sera dit de niveau $i + 1$.

Un homomorphisme d'ordre strict de première catégorie par rapport à la première variable [6] est une application φ d'un ensemble ordonné E dans un ensemble ordonné F telle que :

i) $a < b$ implique $\varphi(a) < \varphi(b)$

ii) $\varphi(a) < \varphi(b)$ implique

$$\forall a_1 \in \varphi^{-1} \varphi(a), \exists b_1 \in \varphi^{-1} \varphi(b) : a_1 < b_1 .$$

Pour un homomorphisme par rapport à la deuxième variable, ii) est à remplacer par ii').

ii') $\varphi(a) < \varphi(b)$ implique $\forall b_1 \in \varphi^{-1} \varphi(b), \exists a_1 \in \varphi^{-1} \varphi(a) : a_1 < b_1 .$

Le produit cartésien $T_1 \times T_2$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in T_1, y \in T_2$. Le produit direct $T_1 \cdot T_2$ des ensembles ordonnés T_1 et T_2 est l'ensemble des couples, ordonné par la relation :

$$(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z, y \leq t.$$

Le treillis de Boole à 2^p éléments sera noté 2^p .

On écrira $T_1 \cong T_2$ pour exprimer l'isomorphisme des ensembles ordonnés T_1 et T_2 . Les autres notations utilisées sont évidentes.

Soient des ensembles ordonnés ayant un 0 .

On considère dans $T_1 \times T_2$ l'ensemble H des couples $(0, x)$ et $(x, 0)$ et la partition de $T_1 \times T_2$ en sous-ensembles pour lesquels H est le seul non-singleton. Le produit contracté $T_1 * T_2$ est l'ensemble des classes, muni de la relation d'ordre induite à partir du produit direct.

On a :

1) $T_1 * T_2 \cong (T_1 - \{0\}) \cdot (T_2 - \{0\}) \cup \{0\}$.

2) Si T_1 et T_2 sont des treillis, alors $T_1 * T_2$ en est un aussi.

- 3) $(T_1 * T_2) * T_3 \cong T_1 * (T_2 * T_3)$;
 $((T_1 * T_2) * T_3) * \dots * T_m$ sera noté $T_1 * T_2 * T_3 * \dots * T_m$.
- 4) $T_1 * T_2 \cong T_2 * T_1$.
- 5) $T_1 * 2^1 \cong 2^1 * T_1 \cong T_1$.

On dit que T est *irréductible* pour $*$ si T a plus de 2 éléments et si $T \cong T_1 * T_2$ implique $T_1 \cong 2^1$ ou $T_2 \cong 2^1$. On dit que T est irréductible pour $.$ si T a plus d'un élément et si $T \cong T_1 . T_2$ implique que T_1 ou T_2 a un seul élément.

Les ensembles ordonnés connexes possèdent la *factorisation unique* [3] pour le produit direct ce qui signifie que si $S_1 . S_2 \dots . S_m \cong T_1 . T_2 \dots . T_n$ et que les S_i et T_i soient connexes et irréductibles pour $.$, alors $m = n$ et $T_1, T_2 \dots T_n$ sont respectivement isomorphes à $S_{\varphi_1}, S_{\varphi_2}, \dots S_{\varphi_n}$ pour une permutation $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_n)$ de $(1, \dots n)$.

On en déduit aisément la factorisation unique pour le produit contracté des ensembles ordonnés avec θ .

I. DÉFINITION DES CATALOGUES, UNION ET INTERSECTION

Soit un ensemble X et une relation d'ordre \mathcal{H} qui en fait une arborescence $Y = (X, \mathcal{H})$. Une forêt F est dite un précatalogue sur Y s'il existe une application surjective de F sur Y qui soit un homomorphisme d'ordre strict de première catégorie successivement par rapport aux deux variables.

Il est clair que tous les éléments de $\varphi^{-1}(x)$ sont au même niveau pour chaque $x \in X$.

Ajoutons à F une racine ω pour en faire une arborescence.

Étiquetons les éléments du précatalogue de sorte que deux éléments n'ont même étiquette que s'ils appartiennent au même $\varphi^{-1}(x)$ et s'ils ne couvrent pas un même élément. La pseudo-arborescence obtenue alors est un *catalogue*.

Les éléments de X sont notés $A, B, C, \dots D$. L'ensemble des étiquettes de $\varphi^{-1}(A)$ est noté $coll(A) = \{a_1, a_2, \dots a_\alpha\}$ et appelé collection liée à A . Son nombre d'éléments est $card(coll.(A))$.

De même $coll(B) = \{b_1, b_2, \dots b_\beta\}$ et ainsi de suite.

$$V = coll(A) \cup coll(B) \dots \cup coll(D) \cup \{\omega\}$$

est dit ensemble d'étiquetage.

On trouvera des exemples de catalogues à la figure 8.

On appellera *carte* Z la donnée de l'ensemble X ordonné par la relation d'ordre \mathcal{H} et de V . On écrit $Z = (X, \mathcal{H}, V)$ et $arb(Z) = (X, \mathcal{H})$. Les catalogues ainsi définis auxquels on adjoint l'ensemble vide noté θ , sont les catalogues de carte Z . Enfin, un catalogue contenant un et un seul a_i , un et un seul b_i, \dots un et un seul d_i est appelé une *fiche*.

R est dit une fiche extraite de K si R est une fiche et si toute chaîne maximale de R est une chaîne maximale de K .

Conditions pour qu'un ensemble E de chaînes définisse un catalogue de carte donnée :

- 1) Ces chaînes doivent être toutes distinctes.
- 2) Chacune doit faire partie d'une fiche formée uniquement de chaînes de E .

Ces conditions sont visiblement nécessaires et suffisantes.

Union et intersection de catalogues

Soient les catalogues K_1 et K_2 de même carte C_1 .

Ordre

$K_1 \leq K_2$, si chaque fiche extraite de K_1 est une fiche extraite de K_2 . On vérifie que chaque chaîne maximale de K_1 est une chaîne maximale de K_2 .

Union de K_1 et K_2

Il s'ensuit que $K_1 \vee K_2$ est le catalogue dont chaque chaîne maximale est, soit une chaîne de K_1 , soit une chaîne de K_2 .

Exemple

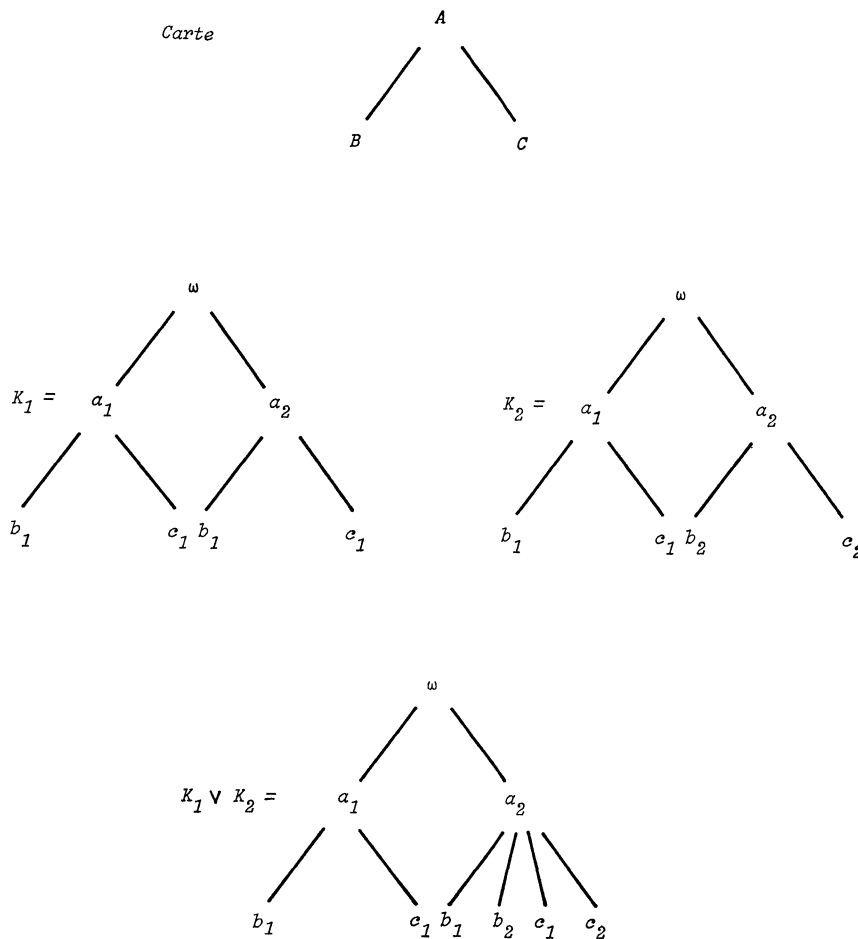


Figure 8

C'est un exemple où $K_1 \vee K_2$ contient des fiches qui n'appartiennent ni à K_1 ni à K_2 .

Intersection de K_1 et K_2

$K_1 \wedge K_2$ est l'union des fiches extraites de K_1 et K_2 .

Exemple

On reprend K_1 et K_2 de la figure 8.

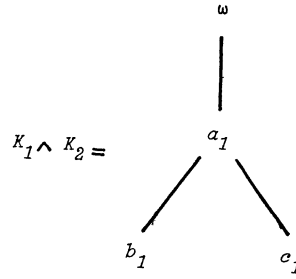


Figure 9

Ayant une union et une intersection, les catalogues de carte C_1 forment un treillis qui sera noté $T(C_1)$. V étant fini, il s'agit d'un treillis fini. Son élément nul sera noté 0 , son élément universel 1 . Les atomes sont les catalogues formés d'une seule fiche.

II. GÉNÉRATION DES TREILLIS DE CATALOGUES

Composition de cartes

Soient n cartes $C_1 = (X_1, \mathcal{K}_1, V_1), C_2 = (X_2, \mathcal{K}_2, V_2), \dots, C_n = (X_n, \mathcal{K}_n, V_n)$. On suppose les X_i disjoints 2 à 2 et $V_i \cap V_j = \{\omega\}$ si $i \neq j$.

Soit A n'appartenant à aucun X_i et $coll(A) = \{a_1, \dots, a_m\}$ disjoint avec chaque V_i .

La carte (X, \mathcal{K}, V) ainsi définie :

$$\begin{aligned}
 X &= \{A\} \cup X_1 \cup X_2 \dots \cup X_n \\
 \mathcal{K} : \quad \forall x \in X : \quad &A \mathcal{K} x \\
 x, y \in X \quad x, y \neq A & \\
 x \mathcal{K} y \leftrightarrow \exists i : x, y \in X_i \quad &\text{et} \quad x \mathcal{K}_i y \\
 V &= V_1 \cup V_2 \dots \cup V_n \cup \{a_1, \dots, a_m\}
 \end{aligned}$$

sera notée $A^m C_1 C_2 \dots C_n$.

Catalogues de $T(A^1 C_1 C_2 \dots C_n)$

Soit un catalogue non nul de $T(A^1 C_1 C_2 \dots C_n)$. Par la définition précédente les éléments d'une chaîne ne peuvent appartenir à des collections liées à plus d'un C_i . On note K_i le catalogue formé des chaînes dont les éléments appartiennent à des collections liées aux éléments de C_i .

K sera noté $a_1 K_1 K_2 \dots K_n$.

Propriété 1

$$T(A^1 C_1 C_2 \dots C_n) \cong T(C_1) * T(C_2) * \dots * T(C_n).$$

Démonstration

On a vu que les catalogues non nuls de $T(A^1 C_1 C_2 \dots C_n)$ s'écrivent $a_1 K_1 K_2 \dots K_n$ où $K_i \in T(C_i)$ et $K_i \neq 0$. On retrouve donc bien le produit contracté.

Exemple

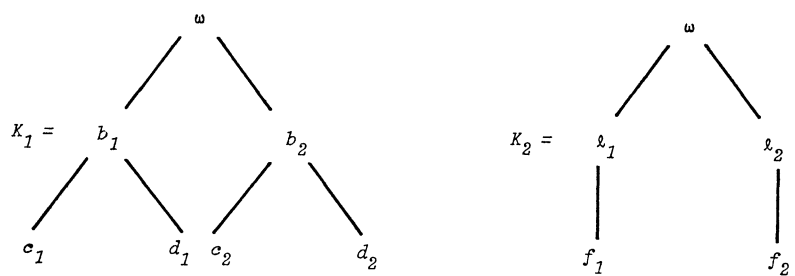
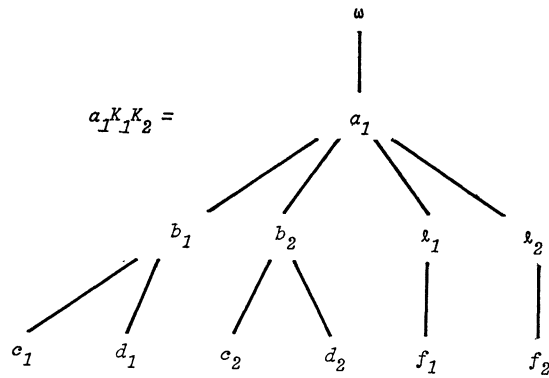
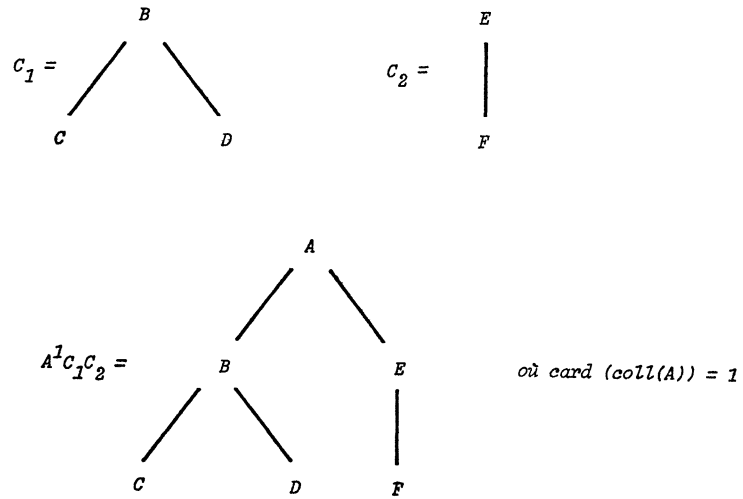


Figure 10

Propriété 2

$$T(A^m C_1 C_2 \dots C_n) \cong (T(A^1 C_1 C_2 \dots C_n))^m.$$

Démonstration

Les catalogues de $T(A^m C_1 C_2 \dots C_n)$ peuvent s'écrire $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ où chaque α_i est un catalogue $\alpha_i K_i$ d'un treillis $T(A^1 C_1 \dots C_n)$ ou \emptyset . On retrouve donc le produit direct.

Propriété 3

Les treillis de catalogues sont isomorphes aux treillis obtenus par un nombre fini d'applications des deux opérations suivantes : élévation à la puissance, et produit contracté, à partir de 2^1 .

C'est une conséquence immédiate des propriétés précédentes.

Les treillis de catalogues sont des cas particuliers des treillis *CD* ainsi définis :

Les treillis *CD* sont les treillis obtenus par un nombre fini d'applications des opérations de produit direct et de produit contracté à partir de 2^1 .

Le lecteur vérifiera aisément les propriétés suivantes, qui nous serviront dans la suite et qui se déduisent de la manière dont on a engendré ces treillis.

Propriété 4

Les treillis *CD* sont complémentés.

Propriété 5

Les treillis *CD* sont coatomiques (ce qui signifie que tout élément est intersection de coatomes).

Propriété 6

Dans un treillis *CD*, l'union des compléments d'un coatome x est complément de x .

III. DÉCOMPOSITION UNIQUE D'UN TREILLIS *CD*. ALGORITHME DE DÉCOMPOSITION

Il y a plusieurs façons de montrer qu'un treillis *CD* résultant d'un produit contracté ne peut être isomorphe à un treillis *CD* résultant d'un produit direct. Nous en choisissons une qui débouche sur un algorithme simple.

Grphe des compléments

Supposons que l'ensemble ordonné T soit complémenté : on dit que le graphe non orienté (X, U) où X est l'ensemble des sommets, U , l'ensemble des arêtes, est graphe des compléments de T si :

— $X = T - \{0, 1\}$

— l'arête $[a, b] \in U$ si et seulement si b est complément de a dans T .

Propriété 7

Si les ensembles ordonnés T_1 et T_2 sont complémentés et distincts de 2^1 , alors le graphe des compléments de $T_1 * T_2$ est connexe.

Démonstration

Soient $x, y \in T_1 * T_2$. $x, y \neq 0, 1$.

On peut écrire $x = (a, b), y = (c, d)$; $a, c \in T_1$; $b, d \in T_2$.

Montrons qu'il existe une chaîne entre x et y .

Soit $z \in T_2, z \neq 0, 1$. Soient a' et c' des compléments respectifs de a et c dans T_1 , z' et d' des compléments respectifs de z et d dans T_2 .

— → Si a et c sont distincts de 1

$$\begin{array}{rcl}
 x = (a, b) \text{ est complément de } (a', 1) & & \\
 (a', 1) & \text{---} & (a, z) \\
 (a, z) & \text{---} & (1, z') \\
 (1, z') & \text{---} & (1, z) \\
 (1, z) & \text{---} & (c, z') \\
 (c, z') & \text{---} & (c', 1) \\
 (c', 1) & \text{---} & (c, d) = y.
 \end{array}$$

— → Si $c = 1$ alors $d \neq 1$ puisque $y \neq 1$.

Soit en plus par exemple $a \neq 1$

$$\begin{array}{rcl}
 x = (a, b) \text{ est complément de } (a', 1) & & \\
 (a', 1) & \text{---} & (a, 1) \\
 (a, 1) & \text{---} & (a', d) \\
 (a', d) & \text{---} & (1, d') \\
 (1, d') & \text{---} & (c, d) = y.
 \end{array}$$

Les autres cas sont symétriques.

Ainsi x, y quelconques sont reliés par une chaîne : le graphe est connexe.

Propriété 8

Le graphe des compléments de $T_1 \cdot T_2$ n'est pas connexe.

Il est en effet clair que $(1, 0)$ a pour complément unique $(0, 1)$.

Ces deux propriétés permettent de voir qu'un treillis CD provenant d'un produit contracté ne peut être isomorphe à un autre venant d'un produit direct. De plus un treillis a la propriété de factorisation unique pour le produit direct et pour le produit contracté. Ainsi un treillis CD n'a qu'une génération, ou une décomposition, possible.

Algorithme de décomposition d'un treillis CD

Notons $x]$ l'ensemble des éléments qui sont inférieurs ou égaux à x . Si le treillis n'est pas à graphe des compléments connexe, il est isomorphe au produit des $x]$ où x est minimal (distinct de 0) parmi les éléments ayant un seul complément. x s'écrit en effet : $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Si le treillis est à graphe des compléments connexe il est résultat d'un produit contracté dont il faut pouvoir trouver les facteurs.

Notons $C(x)$ l'ensemble des coatomies supérieures ou égaux à tous les compléments de x .

$$C^2(x) = \cup \{ C(y) \mid y \in C(x) \}.$$

Propriété 9

Dans un treillis CD résultant d'un produit direct, si x et y sont deux coatomies distincts, alors $y \in C(x)$ ou $y \in C^2(x)$.

Démonstration

Supposons que x s'écrive $(a, 1, 1, \dots, 1)$ et $y = (1, b, 1, \dots, 1)$ l'union z des compléments de x est $z = (a', 0, 0, \dots, 0)$ et $y \geq z$ donc $y \in C(x)$.

Si par contre y s'écrit $(d, 1, 1, \dots, 1)$ alors l'union z des compléments de y est $t = (d', 0, 0, \dots, 0)$. On peut trouver un coatome $u = (1, b, 1, \dots, 1)$ supérieur ou égal à t et $y \in C(u)$.

Corollaire 10

Dans un treillis CD résultant d'un produit contracté d'ordonnés irréductibles pour $*$, S_1, S_2, \dots, S_n , tous les éléments de la forme $(x, 1, 1, \dots, 1)$ et eux seuls sont engendrés à partir d'un coatome de cette forme par les opérations C, C^2 , et d'intersection, effectuées sur des éléments $\neq 0$.

Démonstration

Soit un coatome $p = (x, 1, \dots, 1)$ où x est un coatome de S_1 . Par la propriété précédente on peut obtenir le coatome y dans S_1 à partir de x par C et C^2 . Donc dans $S_1 * S_2 \dots * S_n$, on obtient $(y, 1, 1, \dots, 1)$ à partir de p . Puisque le treillis S_1 est coatomique, on obtient tous les éléments de cette forme par intersection de coatomiques. Il est clair enfin que les opérations C, C^2 sur des éléments $\neq 0$, et l'intersection ne donnent que des éléments de cette forme.

L'ensemble des éléments obtenus, auxquels on adjoint 0 est un facteur du produit contracté. On obtient les autres facteurs à partir d'un coatome non encore investi.

IV. DÉCOMPOSITION UNIQUE ET CARTES ÉQUIVALENTES

Deux cartes C_1 et C_p sont dites équivalentes s'il existe une suite C_1, C_2, \dots, C_{p-1} telle que C_i et C_{i+1} pour $i = 1, 2, \dots, p - 1$ soient dans l'une des situations suivantes :

- 1) Les arborescences sont isomorphes et les collections liées aux sommets qui se correspondent par l'isomorphisme ont même cardinal.
- 2) L'une des arborescences est (X, \mathcal{X}) , l'autre $(X - \{A\}, \mathcal{X}')$ où $\text{card}(\text{coll}(A)) = 1$ et \mathcal{X}' est l'ordre induit sur $X - \{A\}$ à partir de \mathcal{X} .
- 3) L'une des arborescences est (X, \mathcal{X}) , l'autre $(X \cup \{E\} - \{A, B\}, \mathcal{X}'')$ où \mathcal{X} est tel que tout élément comparable à A est comparable à B , et réciproquement, $\text{card}(\text{coll}(E)) = \text{card}(\text{coll}(A)) \times \text{card}(\text{coll}(B))$, et \mathcal{X}'' est l'ordre induit à partir de \mathcal{X} en enlevant A , et remplaçant B par E .

Exemple

Plaçons aux nœuds des arborescences de C_1 et C_2 les cardinaux des collections correspondantes :

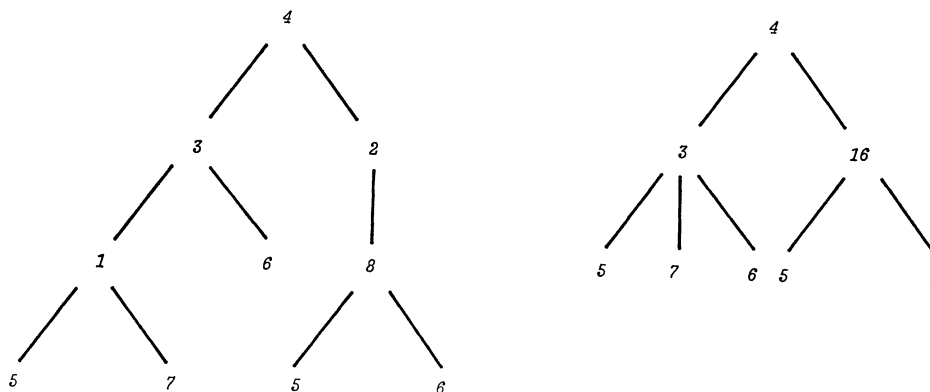


Figure 11

- 2) Supprime A où $\text{card}(\text{coll}(A)) = 1$
 3) Regroupe B et C avec $\text{card}(\text{coll}(B)) = 2$, $\text{card}(\text{coll}(C)) = 8$.

Propriété 11

$T(C_1) \cong T(C_2)$ si et seulement si C_1 et C_2 sont équivalentes.

Démonstration

Il est clair que si C_1 et C_2 sont équivalentes, $T(C_1) \cong T(C_2)$. Démontrons la réciproque : soit $T(C_1) \cong T(C_2)$.

La propriété est vraie si $T(C_1) \cong 2^1$.

Supposons-la vraie si $T(C_1)$ n'a pas plus de n éléments et montrons-la pour $n + 1$. Tout d'abord il peut ne pas exister de treillis de catalogues de $n + 1$ éléments. Le problème est alors résolu.

Sinon, deux cas se présentent :

— $T(C_1)$ est le résultat d'un produit contracté.

$T(C_1)$ ne peut provenir d'un produit direct. On peut donc décomposer $T(C_1)$ de manière unique en ensembles ordonnés irréductibles pour $*$ et $.$ qui sont des treillis de catalogues.

$$\begin{aligned} T(C_1) &\cong T(D_1) * T(D_2) \dots * T(D_m) \\ T(C_2) &\cong T(E_1) * T(E_2) \dots * T(E_m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'ou\ C_1 &= M^1 N^1 \dots P^1 D_1 D_2 \dots D_m \\ C_2 &= M'^1 N'^1 \dots Q'^1 E_1 E_2 \dots E_m. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence les cartes D_1, D_2, \dots, D_m sont équivalentes aux cartes $E_1 \dots E_m$ pour une permutation convenable.

Donc C_1 et C_2 sont équivalentes.

— $T(C_1)$ est le résultat d'un produit direct. Puisque c'est un treillis de catalogues, on peut l'écrire $T(C_1) \cong (T(D))^m$ où $T(D)$ est irréductible pour le produit direct.

$$\begin{aligned} \text{On peut écrire } C_1 &= M^x N^y \dots P^z F_1 F_2 \dots F_n \\ C_2 &= M'^{x'} N'^{y'} \dots Q'^{z'} G_1 G_2 \dots G_n \\ \text{où } x \times y \dots \times z &= x' \times y' \dots \times z' = m. \end{aligned}$$

Or $P^1 F_1 F_2 \dots F_n$ et $Q'^1 G_1 \dots G_n$ sont équivalentes. Donc C_1 et C_2 sont équivalentes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRIAL, BAS, BEAUME, HENNERON, MORIN, VIGLIANO, *Projet Socrate*, Doc. interne, Institut de Mathématiques Appliquées, Université de Grenoble, août 1970.
 [2] BARBUT M., MONJARDET B., *Ordre et classification : Algèbre et combinatoire 1*. Paris, Hachette, 1970.
 [3] CHANG C. C., JONSSON B., TARSKI A., "Refinement properties for relational structures", *Fund. Math.*, 55, 1964, pp. 249-281.
 [4] HAYS D. G., KAY M., KOZAK A. S., TAFT T. D., *A file of Russian text on magnetic tape*, Memorandum RM 5509-RADC, octobre 1967, Rand Corporation, Santa Monica, Calif.
 [5] KAY M., ZIEHE T., *The catalog : A flexible data structure for magnetic tape*, Memorandum RM 4645 PR, octobre 1965, Rand Corporation, Santa Monica, Calif.

- [6] KUNTZMANN J., "Extension aux relations de certaines notions algébriques", *C.R. Acad. Sci., Fr.*, 267 (2), 1968, pp. 77-78.
- [7] PAIR C., QUERE A., "Définition et études de bilangages réguliers", *Information and Control* 13, 1968, pp. 565-593.
- [8] TREHEL M., "Étude des treillis de catalogues", *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, n° 4, 1967, pp. 39-49.