MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 31 (1970), p. 51-63
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__31__51_0>

M.S.H. (8e année, n° 31, 1970, p. 51-55)

UN EXERCICE ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DES PROBABILITÉS

par

C. LOBRY[1]

L'exercice suivant n'a aucun caractère d'originalité. Il a simplement le mérite de mettre en évidence, dans un cas très simple, l'utilité de la notion d'espace probabilisé.

Lorsqu'on pose la question : « *Vous allez chez un ami, vous sonnez, un petit garçon vous ouvre la porte ; sachant que votre ami a deux enfants, quelle est la probabilité qu'il ait une fille ?* »

On obtient assez souvent une des deux réponses suivantes :

1) Le sexe de l'enfant inconnu est indépendant du sexe de l'enfant qui a ouvert, par conséquence, la probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2}$.

2) Nous savons qu'il y a au moins un garçon dans la famille. Il y a trois compositions équiprobables :

$$(g, f)\,; \quad (g, g)\,; \quad (f, g)$$

de paires ordonnées comportant au moins un garçon. Deux de ces paires comportant une fille, la probabilité cherchée est égale à $\frac{2}{3}$.

Ces deux raisonnements reposent en fait sur des hypothèses différentes qui n'ont pas été clairement explicitées. La nécessité de ces hypothèses apparaît lorsqu'on prend la peine de décrire complètement un espace probabilisé « adapté » à la question posée. Étudions deux modèles possibles.

Premier modèle.

Le résultat d'une observation (expérience) fait intervenir les éléments suivants :

i) La composition de la famille, soit symboliquement :

$$\{(f, f)\,; \quad (f, g)\,; \quad (g, g)\}\,;$$

1. Faculté des Sciences, Grenoble.

ii) Le sexe de « l'ouvreur », soit :

$$\{ f ;\ g \}.$$

Prenons comme ensemble d'éventualités, l'ensemble Ω des triplets :

$$((g, g), f) ;\ ((f, g), f) ;\ ((f, f), f)$$
$$((g, g), g) ;\ ((f, g), g) ;\ ((f, f), g)$$

que l'on peut représenter par la figure 1.

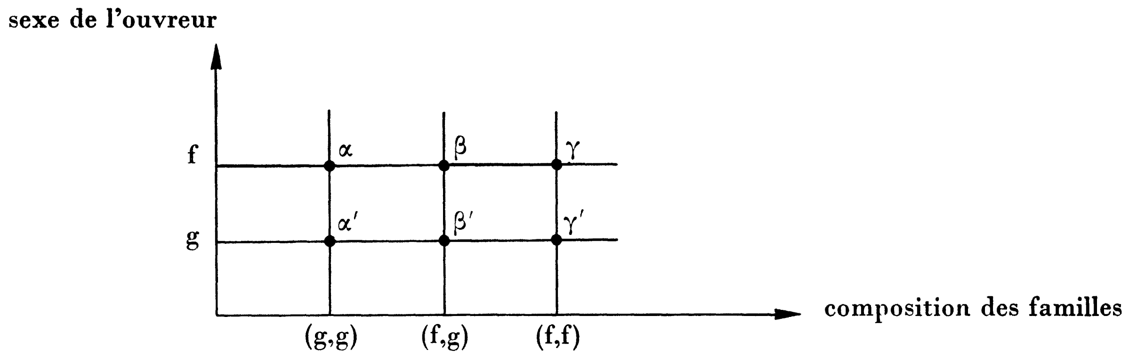

Fig. 1

Par exemple, le symbole : ((f, f), f) représente le « fait » (observation) : « il y a deux filles dans la famille, c'est une fille qui a ouvert ». Une loi de probabilité sur ω est caractérisée par les six nombres :

$$p\ (((g, g), f)) = \alpha ;\quad p\ (((f, g), f)) = \beta ;\quad p\ (((f, f), f)) = \gamma ;$$
$$p\ (((g, g), g)) = \alpha' ;\quad p\ (((f, g), g)) = \beta' ;\quad p\ (((f, f), g)) = \gamma'.$$

Les éventualités : ((g g), f) : « Il y a deux garçons, une fille a ouvert » et : ((f, f), g) : « Il y a deux filles, un garçon a ouvert » sont purement conventionnelles. Il est raisonnable de leur attribuer une probabilité égale à 0, soit : $\alpha = 0$ et $\gamma' = 0$. Si de plus, on impose la répartition $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ pour les probabilités des trois compositions de sexes, ((f, f), (f, g), (g, g)) on a nécessairement :

$$\alpha' = \frac{1}{4} ;\ \beta + \beta' = \frac{1}{2} ;\ \gamma = \frac{1}{4}.$$

Le « fait » : « Un garçon a ouvert » est représenté par l'événement :

$$B = \{ ((g, g), g) ;\ ((f, g), g) \}.$$

Le « fait » : « Il y a une fille dans la famille » est représenté par l'événement :

$$A = \{ ((f, g), f) ;\ ((f, g), g) ;\ ((f, f), f) : ((f, f), g) \}.$$

La probabilité cherchée : « Probabilité pour qu'il y ait une fille dans la famille sachant qu'un garçon a ouvert » est donnée par la formule classique :

$$P\ (A/B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (B)},$$

soit ici

$$P\ (A/B) = \frac{\beta'}{\frac{1}{4} + \beta'} = p\ (\beta').$$

Lorsque β' varie entre 0 et $\frac{1}{2}$ (limites imposées par la condition $\beta + \beta' = \frac{1}{2}$) le graphe de p est le suivant :

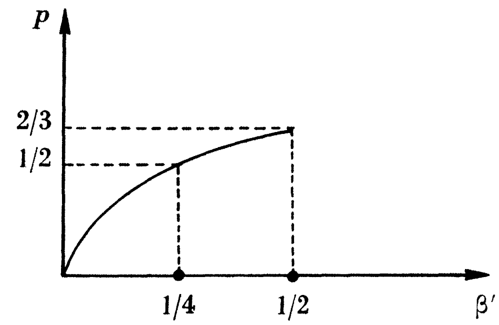

Fig. 2

Les valeurs remarquables :

$$\beta' = 0 \rightarrow p\ (\beta') = 0\ ,$$

$$\beta' = \frac{1}{4} \rightarrow p\ \beta') =) \frac{1}{2}\ ,$$

$$\beta' = \frac{1}{2} \rightarrow p\ (\beta') = \frac{2}{3}\ ,$$

correspondent respectivement aux trois hypothèses :

i) « Lorsqu'il y a un garçon et une fille c'est toujours la fille qui ouvre » :

$$\beta' = 0\ ; \qquad \beta = \frac{1}{2}\ ;$$

ii) « Lorsqu'il y a un garçon et une fille il est également probable que l'un ou l'autre ouvre » :

$$\beta' = \frac{1}{4}\ ; \qquad \beta = \frac{1}{4}\ ;$$

iii) « Lorsqu'il y a un garçon et une fille c'est toujours le garçon qui ouvre » :

$$\beta' = \frac{1}{2}\ ; \qquad \beta = 0\ .$$

Les raisonnements 1) et 2) reposent respectivement sur les hypothèses *ii*) et *iii*). L'hypothèse *i*) est tout aussi naturelle que l'hypothèse *iii*). On ne propose pourtant jamais de « raisonnement » conduisant à une probabilité nulle !

Le choix entre ces diverses hypothèses n'est naturellement pas du domaine des mathématiciens. La formalisation peut tout au plus suggérer la nature des hypothèses à faire. Prenons par exemple le modèle suivant, différent du précédent.

Deuxième modèle.

On décide de caractériser le résultat d'une observation par les trois éléments suivants :

a) le sexe de l'aîné,

b) le sexe du cadet,

c) le fait que l'ouvreur est aîné ou cadet.

La connaissance de ces trois éléments permet de déterminer le sexe de « l'ouvreur ». Comme un autre élément d'appréciation a été introduit (aîné, cadet) le modèle est plus « riche ».

Représentons comme précédemment les éventualités sur un diagramme :

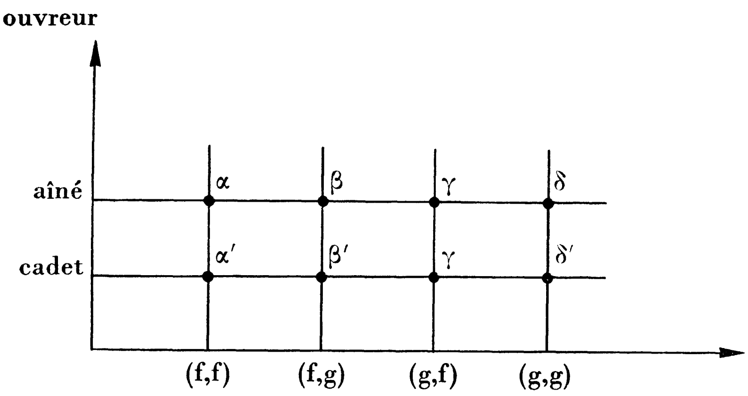

Fig. 3

Par exemple le triplet : ((f, g), aîné) représente le fait : « L'aîné est une fille ; le cadet est un garçon ; l'ouvreur est l'aîné ». Si on impose la répartition (1/4 ; 1/4 ; 1/4 ; 1/4) pour les probabilités des quatre compositions possibles (en tenant compte de l'ordre des naissances) d'une famille de deux enfants on aura, compte tenu de la position des coefficients sur la figure ci-dessus :

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = \frac{1}{4}.$$

Un calcul de probabilité conditionnelle analogue au précédent, montre que la probabilité cherchée est égale à :

$$p\,(\beta, \gamma') = \frac{\beta + \gamma'}{\frac{1}{4} + \beta + \gamma'}.$$

Si par exemple, on suppose en outre que dans une famille donnée, la probabilité pour que l'aîné ouvre, ne dépend pas du sexe des enfants, on traduit cette hypothèse par :

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

On a alors :

$$\beta + \gamma' = \beta + \frac{1}{4} - \gamma = \frac{1}{4}.$$

Soit :

$$p(\beta, \gamma') = \frac{1}{2}.$$

Une telle hypothèse ne pouvait évidemment pas être formulée dans le modèle précédent !

Cet exemple montre comment la formalisation d'un problème de probabilités en termes de « $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ » fait apparaître la nécessité d'hypothèses qui n'étaient pas faites initialement. On voit de plus que ces hypothèses ne sont pas forcément des hypothèses de bon sens et peuvent nécessiter, même dans des problèmes les plus simples, une étude statistique préalable. Enfin, on voit comment dans le « raisonnement » 2) on a implicitement confondu les événements :

« Un garçon ouvre »,

« Il y a un garçon au moins dans la famille »,

événements qui ne sont confondus (à un ensemble de probabilité nulle près) que si : « Lorsqu'il y a un garçon c'est un garçon qui ouvre ».

M.S.H. (8e année, n° 31, 1970, p. 57-63)

APPLICATIONS PRATIQUES DES LOIS DE PROBABILITÉ (8)

par

B. LECLERC[1]

LOI DE POISSON	*HISTOIRE*
LOIS GAMMA (LOI EXPONENTIELLE)	*DISTRIBUTION DES ACCIDENTS*

SOLTERER, J., "A sequence of historical random events: Do Jesuits die in three's ?", *J. of the Amer. Stat. Ass.*, 36, 1941, pp. 477-484.

C'est, d'après l'auteur, une impression (certains disent: superstition) bien établie parmi les membres de la compagnie de Jésus selon laquelle on observerait fréquemment des séries de trois décès particulièrement rapprochés dans la compagnie : les jésuites mourraient « par trois ».

Cette impression a été étudiée par le Révérend E. C. Phillips, S. J., sur les 597 décès survenus dans les états de New York et du Maryland durant les années 1900 à 1939 incluses. Il a conclu qu'elle était bien justifiée par les faits.

L'auteur se propose de montrer que ce phénomène (l'impression de regroupements par trois) est une conséquence de la distribution poissonnienne, « au hasard », des décès. Il ne s'agit donc pas d'une superstition, mais d'un caractère commun à bien des séries historiques, qui est d'ailleurs reconnu par maint proverbe en différentes langues (comme le « jamais deux sans trois » français).

Modèle.

L'auteur cite d'abord les travaux du Révérend J. T. O'Callahan, S. J., qui a étudié les distributions des intervalles de temps séparant le premier du dernier décès dans des groupes de deux, trois, quatre et onze décès consécutifs, et a montré qu'elles s'ajustaient bien à des lois de Pearson de type III (lois gamma). Cet ajustement est montré dans une figure incluse dans l'article.

Le modèle poissonnien est défini ensuite : si ν est le nombre moyen de décès par unité de temps, la probabilité de n décès dans un intervalle d'une unité de temps est P_n,

$$P_n = \frac{\nu^n}{n\,!} e^{-\nu}.$$

1. Centre de Mathématique Sociale, EPHE, VIe section.

Les nombres de décès dans deux intervalles disjoints sont indépendants. La distribution des intervalles de temps entre deux décès successifs suit alors la loi exponentielle, de densité :

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

où λ est l'intervalle moyen.

Estimation.

ν et λ sont estimés par les données empiriques correspondantes. L'auteur fait trois ajustements pour P_n, correspondant à des unités de temps de deux semaines, un mois, deux mois.
Test du χ^2 dans deux cas.

Nombre de décès par intervalle de temps d'un mois. On trouve $\chi^2 = 3{,}59$ pour quatre degrés de liberté. L'ajustement est donc bon.

Distribution des intervalles de temps entre deux décès successifs. $\chi^2 = 2{,}60$ pour 19 degrés de liberté : ajustement très bon.

L'auteur examine ensuite le problème des décès par trois. Il divise les intervalles entre décès successifs en « courts » et en « longs », prenant l'intervalle moyen comme séparation de ces deux classes. La probabilité qu'un intervalle soit court est estimée à 0,64. A partir de là, l'auteur calcule les probabilités de diverses suites d'intervalles courts et longs (suite de variables de Bernoulli indépendantes). Finalement, il y a 377 intervalles courts observés (nombre théorique : 375) et 258 groupes de deux intervalles courts successifs (nombre théorique : 240).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

PHILLIPS, R. E. C., S. J., "Does death come in groups of three ?", *Bulletin of the American Association of Jesuit Scientists* (Eastern Section), Loyola College, Baltimore, Md, 17, n° 3, May 1940, pp. 196-199.

O'CALLAHAN, J. T., S. J., "Deaths of jesuits in groupe of three : The general grouping of random historical events", *Bulletin of the American Association of Jesuit Scientists*, 18, n° 1, October 1940, p. 52.

MISES, R. VON, *Probability, Statistics and Truth*, London, Hodge, 1939.

LOI BINOMINALE — *GÉNÉTIQUE*

COTTERMAN, C. W. et SNYDER, L. L., "Tests of simple mendelian inheritance in randomly collected data of one and two generations", *J. of the Amer. Stat. Ass.*, 34, 1939, pp. 511-523.

Modèle.

Le caractère de déficience dans le goût de la phényl-thiourea est supposé dépendre d'un gène unique. Si p est la proportion dans la population humaine étudiée de gènes de non-déficience ($p < 1$) et $q = 1 - p$ celle des gènes de déficience, on fait l'hypothèse d'équilibre suivante : p^2 est la proportion d'individus possédant deux gènes de non-déficience, $2\,p\,q$ celle de ceux possédant un gène de chaque sorte, q^2 celle de ceux ayant deux gènes de déficience. Seuls, ces derniers sont non-goûteurs, le gène étant supposé récessif. Les individus des deux premières classes sont donc indiscernables pour l'observateur. L'un des deux gènes de l'enfant est identique à l'un des deux gènes, pris au hasard équiprobable, du père, l'autre gène de l'enfant étant, de la même façon, identique à l'un de ceux de la mère. (Ce modèle éprouvé et bien connu, est enseigné dans les classes terminales.)

I. — DONNÉES SUR DEUX GÉNÉRATIONS

Sur 800 familles, avec en tout 2 043 enfants, constituant un échantillon au hasard de la population, on observe la proportion d'enfants goûteurs pour chacune des trois classes : deux parents goûteurs, un seul parent goûteur, deux parents non-goûteurs.

Estimation.

q est estimé par $\sqrt{B}$, où B est la proportion de non-goûteurs dans la population totale ($N =$ 4 886 personnes).

Test.

La proportion de non-goûteurs parmi les enfants ayant un seul parent goûteur doit être alors Z

$$Z = \frac{q}{1+q},$$

d'où l'estimateur Z^* de Z

$$Z^* = \frac{\sqrt{B}}{1+\sqrt{B}}.$$

La variance de cet estimateur est V (Z^*).

$$V(Z^*) = \frac{(1-2\,Z)\,(1-Z^2)}{4\,N}$$

On trouve ainsi $Z^* = 0{,}3536$ avec l'écart-type 0,0024, cependant que la valeur observée est 0,3653 à quoi correspond un écart type égal à 0,0175 (loi binomiale).

La proportion de non-goûteurs issus de parents tous deux goûteurs doit être Z^2, pour laquelle on a l'estimateur :

$$(Z^2)^* = \frac{B}{(1+\sqrt{B})^2},$$

avec :

$$V((Z^2)^*) = Z^2 \frac{(1 - 2Z)(1 - Z)^2}{N}$$

On trouve $(Z^2)^* = 0{,}1247$ avec l'écart-type 0,0017. La valeur observée est 0,1228 avec l'écart-type 0,0101. Les déviations ne sont donc pas significatives et le modèle sera retenu. Il y avait cinq enfants goûteurs issus de parents tous deux non-goûteurs, ce qui pourrait contredire le modèle, mais est en fait négligeable, imputable à diverses causes (mutations, adoptions ou illégitimités, erreurs d'observations, etc.).

II. — DONNÉES SUR UNE SEULE GÉNÉRATION

On considère 214 fratries de s enfants, s égal à 2, 3 ou 4. Pour chaque fratrie, on observe le nombre r d'enfants goûteurs.

Les auteurs testent d'abord l'hypothèse (contraire au modèle général) selon laquelle la répartition du caractère de goûteur est indépendante de la relation de fraternité, la probabilité qu'un individu soit goûteur étant A, quelle que soit la famille dont il est issu. Ils font trois ajustements : pour chaque valeur de s, ils ajustent la distribution de r à la loi binomiale $\mathscr{B}(s, A_s)$, où A_s est la proportion totale de goûteurs dans les fratries de s enfants. Le test du χ^2 au seuil 1% conduit les trois fois au rejet de l'hypothèse.

Estimation.

Revenant au modèle principal, les auteurs calculent pour chaque valeur de s la distribution théorique de r. Chaque fois, q est estimé par $\sqrt{B}$, où B est la proportion de non-goûteurs dans l'ensemble des enfants appartenant à une fratrie de taille s. Si F_{sr} est la proportion de fratries avec r goûteurs parmi celles de s enfants, on a :

$$F_{sr} = 4 \binom{s}{r} \left(\frac{3}{4}\right)^r \left(\frac{1}{4}\right)^{s-r} p^2 q^2 + 4 \binom{s}{r} \left(\frac{1}{2}\right)^s p\, q^3 \qquad , 0 < r < s$$

$$F_s0 = 4^{1-s} p^2 q^2 + 2^{2-s} p\, q^3 + q^4$$

$$F_{ss} = p^4 + 4\, p^3 q + (2 + 3^s\, 4^{1-s})\, p^2 q^2 + 2^{2-s} p\, q^3.$$

Test.

Les trois ajustements sont bons et le modèle peut être accepté : pour s égal à 2, 3 et 4, on trouve respectivement une quantité-test ayant la probabilité 0,7, 0,8 et 0,6 d'être dépassée par la variable du χ^2 correspondante.

Cette seconde étude a cependant un défaut : elle ne permet pas de déterminer quel caractère est dominant. Une étude partielle analogue à la précédente, mais faite en renversant l'hypothèse de dominance (le caractère de goûteur pris comme récessif) donne un ajustement encore acceptable, quoique moins bon.

On peut donc seulement mettre ainsi en évidence le rôle de l'hérédité dans la répartition des caractères.

RICHARDSON, L. F., "The distribution of wars in time", *Statistics of deadly quarrels.* Pittsburgh, Boxwood Press et Chicago, Quadrangle books, 1960.

Modèle.

L'époque étudiée est divisée en N périodes de temps égales. On fait l'hypothèse que dans chaque période, il y a le même grand nombre k d'occasions de déclenchement d'une guerre, et la même petite probabilité p de déclenchement à chaque occasion. La distribution du nombre x de déclenchements de guerre par période suit alors la loi de Poisson de paramètre λ, où $\lambda = k\,p$. Si $n\,(x)$ est le nombre d'années où il y a eu x déclenchements, on a à peu près :

$$n\,(x) = N\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x\,!}$$

Estimation.

λ est estimé par m, moyenne observée du nombre de déclenchements de guerre par période.

Tests.

1) Test du χ^2 classique ;

2) Pour tester la constance de λ, on considère la variable :

$$g = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=N}(x_i - m)^2$$

Où x_1, ..., x_i, ..., x_N est la suite des nombres de déclenchements observés. Cette variable suit, pour m suffisamment grand ($m < 10$) une loi du χ^2 à $N - 1$ degrés de liberté, dans l'hypothèse de la constance de λ.

Applications.

a) Nombre de déclenchements de guerre par an dans le monde entre 1820 et 1929, pour les conflits de grandeur 3,5 à 4,5 (c'est-à-dire ayant fait un nombre de victimes de l'ordre de 10 000).

Pas de test, mais une table permettant de comparer nombres théoriques et nombres observés.

b) Données de Quincy Wright. Déclenchements de guerre par an entre 1500 et 1931 (peut-être restreintes à l'Europe). On trouve $\chi^2 = 2{,}4$ pour 2 degrés de liberté. L'ajustement est donc suffisamment bon.

c) Cessations par an de conflits de grandeur 3,5 à 4,5 entre 1820 et 1929. Pas de test, mais un tableau.

d) Pour montrer une autre application de ce modèle, l'auteur recense les nombres d'une table de logarithmes se terminant par 111. Chaque nombre a 7 chiffres, il y a 500 nombres par page, 100 pages en tout. La distribution du nombre d'occurences par page a pour moyenne 0,55. Là encore, pas de test, mais un tableau. Tous ces ajustements semblent bons.

e) Reprise des données de Q. Wright pour l'étude de la constance de λ. Les 432 années sont successivement divisées en périodes de 216, 144, 108, 72, 54, 27, 9, 3 et 1 an. Le test 2) n'est pas significatif pour les valeurs extrêmes (2 périodes de 216 ans, 144 périodes de 3 ans, 432 périodes de 1 an), mais l'est pour toutes les autres.

J. E. Moyal a examiné ce fait et a avancé deux hypothèses pour l'expliquer : dans la première, le nombre des déclenchements de guerre dans une période serait légèrement corrélé avec celui de la période précédente. Il trouve, en effet, une corrélation positive, significative seulement pour certaines valeurs des intervalles de temps (5 ans ou 15 ans). Dans la seconde hypothèse, λ fluctuerait lentement, avec une période d'environ deux siècles.

f) Test 2) appliqué aux données de *a*). La période 1820 à 1949 est divisée en deux sous-périodes de 65 ans chacune. On a d'abord retiré les conflits survenus dans certaines régions, peu connues en 1820. Le test est fait pour les guerres de grandeur 2,5 à 3,5, puis 3,5 à 4,5, enfin 4,5 à 5,5 (environ 1 000, 10 000, 100 000 victimes) et n'est jamais significatif, même en rajoutant les conflits omis précédemment.

Cependant, il semble qu'il y ait une tendance à l'augmentation du nombre de grands conflits et à la diminution du nombre des petits. S. A. Richardson a testé ce fait sur un tableau croisé à quatre cases et a trouvé $\chi^2 = 7{,}4$ pour 1 degré de liberté, résultat très significatif. Il a suggéré que les conditions du monde actuel favorisent l'extension d'un conflit local.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Chamber, *Mathematical Tables*, 1916.
Encyclopaedia Britannica, 14th ed., 1929.
Grey, V., *Twenty-five years 1, 92*, London, Hodder and Stoughton, 1925.
Kendall, M. G., *The advanced theory of statistics*, London, Griffin, 1943.
Kendall, M. G., *J. of the Roy. Stat. Soc.*, 108, 1945, pp. 93-141.
Lotka, A. J., *Elements of physical biology*, New York, Dover, 1955.
Mannheim, H., *War and crime*, London, Watts, 1941.
Moyal, J. E., *J. of the Roy. Stat. Soc.*, 112, 1949, p. 446.
Pearson, K., *Tables for statisticians*, Cambridge University Press, 1914.
Poincaré, H., *Science and method*, London, Nelson, non dated.
Richardson, L. F., *Nature*, 19, May 1945.
Richardson, L. F., *J. of the Roy. Stat. Soc.*, 107, 1945, pp. 242-250.
Rutherford, Chadwick and Ellis, *Radiations from radioactive substance*, Cambridge University Press, 1930.
Wright, Q., *A study of war*, University of Chicago Press, 1942.

FISHER, R. A., "The negative binomial distribution", *Annals of Eugenics*, 11, 1941-42, pp. 182-187.
Modèle.

La probabilité de x, entier positif ou nul, est, pour la distribution binominale négative :

$$p(x) = q^{-k'} \frac{(k + x - 1)!}{x!\,(k-1)!} \left(\frac{p}{q}\right)^x$$

avec $p > 0$, $q = 1 - p$, $k > 0$. Les factorielles sont généralisées par la fonction gamma pour k non entier.

Estimation.

Méthode des moments : la moyenne et la variance théorique μ'_1 et μ_2 sont :

$$\mu'_1 = p\,k \qquad \mu_2 = p\,q\,k$$

d'où les estimateurs $\hat{p}$ et $\hat{k}$ de p et k :

$$\hat{p} = \frac{s^2 - m}{m} \qquad \hat{k} = \frac{m^2}{s^2 - m}$$

où m et s^2 sont la moyenne et la variance observées.

L'auteur examine l'efficacité de ces estimateurs. Ils ne sont pas efficaces, mais très près de l'être pour $p < \frac{1}{9}$ ou $k > 18$, ou enfin pour :

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)(k + 2) > 20.$$

En dehors de ce domaine, on peut utiliser la méthode du maximum de vraisemblance étudiée par Haldane (1941).

Test du χ^2.

Application à deux distributions de nombres de tiques trouvées sur des moutons, données fournies par A. Milne, King's College, Newcastle-on-Tyne.

Les paramètres k et p sont d'abord estimés par la méthode des moments, sans test de l'ajustement obtenu.

Pour la seconde distribution qui correspond à une infestation du bétail très supérieure à celle de la première, l'efficacité est faible. L'auteur fait un ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance et obtient une quantité-test proche de l'espérance mathématique de la variable du χ^2 correspondante. Cet ajustement est donc bon.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

HALDANE, J.B.S., " The fitting of binomial distributions ", *Annals of Eugenics*, 11, p. 179, 1941.
JEFFREYS, H., *Theory of probability*, Oxford, Clarendon Press, p. 260.