

C. HEUCHENNE

**Un algorithme général pour trouver un sous-ensemble d'un certain type à distance minimum d'une partie donnée**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 30 (1970), p. 23-33

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1970\\_\\_30\\_\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__30__23_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN ALGORITHME GÉNÉRAL POUR TROUVER UN SOUS-ENSEMBLE D'UN CERTAIN TYPE À DISTANCE MINIMUM D'UNE PARTIE DONNÉE

par

C. HEUCHENNE <sup>1</sup>

## RÉSUMÉ

*Soit  $\omega$  un ensemble fini, muni d'une valuation positive  $v$ , et  $\rho, \sigma$  des sous-ensembles de  $\omega$ .*

$$d(\rho, \sigma) = \sum_{x \in \rho - \sigma} v(x) + \sum_{y \in \sigma - \rho} v(y)$$

*est une distance entre  $\rho$  et  $\sigma$ .*

*On décrit ici un algorithme fournissant les sous-ensembles  $\sigma \in \mathcal{C}$  minimisant  $d(\rho, \sigma)$ , lorsque  $\rho$  et une classe  $\mathcal{C}$  arbitraire de sous-ensembles de  $\omega$  sont donnés. L'algorithme se simplifie lorsque  $\mathcal{C}$  est croissante, ou décroissante, ou un demi-treillis.*

\*\*\*

La recherche des relations  $\sigma$  d'un certain type les plus proches d'une relation donnée  $\rho$  est à l'ordre du jour. Ainsi Zahn [6] donne une solution dans le cas où  $\rho$  est symétrique, irréflexive et satisfait une troisième condition très restrictive, les  $\sigma$  cherchés étant des équivalences ; Barbut [1] présente une méthode quand le type considéré est celui des ordres totaux. Je me propose ici de traiter le problème le plus général.

Un sous-ensemble  $\rho$  est fixé dans un ensemble fini  $\omega$  et on s'intéresse à certaines parties de  $\omega$  formant une classe  $\mathcal{C}$  non vide; le problème est de déterminer la meilleure approximation de  $\rho$  au sein de  $\mathcal{C}$ . Pour donner un sens mathématique à cette question, on doit pouvoir mesurer l'écart entre deux sous-ensembles de  $\omega$ . Dans le contexte le plus large,  $\omega$  ne possède que sa structure ensembliste; on est conduit assez naturellement à adopter comme écart de  $\rho$  et  $\sigma$  le cardinal  $|\rho \Delta \sigma|$  de leur différence symétrique  $\rho \Delta \sigma = (\rho - \sigma) \cup (\sigma - \rho)$ . C'est ce qui est fait par Zahn et Barbut, et dans d'autres domaines : distance de Hamming entre mots booléens, distance entre opinions, distance entre sociogrammes, etc.

Si l'importance de chaque élément  $x$  de  $\omega$  est mesurée par le nombre réel positif  $v(x)$ , une discrimination plus fine entre  $\rho$  et  $\sigma$  est donnée par :

$$d(\rho, \sigma) = \sum_{x \in \rho - \sigma} v(x) + \sum_{y \in \sigma - \rho} v(y);$$

---

<sup>1</sup>. Institut de Mathématique, Université de Liège.

$d$  est une distance de  $2^\omega$  induite par la valuation  $v$  ([4], pp. 68-70). Si l'on note  $v(\sigma)$  la valeur cumulée

$$\sum_{x \in \sigma} v(x) \text{ de } \sigma, \text{ on a } d(\rho, \sigma) = v(\rho \Delta \sigma);$$

le cas précédent est obtenu pour la valuation constante égale à 1 dans laquelle  $v(\sigma) = |\sigma|$ .

\*  
\*  
\*

Sans précisions sur la classe  $\mathcal{C}$ , on ne peut espérer un algorithme très efficace de recherche du  $\sigma \in \mathcal{C}$  minimisant  $d(\rho, \sigma)$ . Celui que je présente n'est, au fond, qu'une exploration systématique et bien conduite de toutes les solutions possibles.

Je noterai  $\sigma$  un élément quelconque de  $\mathcal{C}$ ,  $\subset$  l'inclusion stricte,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les éléments de  $\rho$  arrangés de telle manière que :

$$v(x_1) \leq v(x_2) \leq \dots \leq v(x_n),$$

$y_1, y_2, \dots, y_m$  les éléments de  $\omega - \rho$  ordonnés de telle façon que

$$v(y_1) \leq v(y_2) \leq \dots \leq v(y_m).$$

Cela étant, soit  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{C}$  tels que  $\rho \cap \sigma = \gamma$ ,  $\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \cap \sigma = \alpha$  et  $\sigma \supset \gamma \cup \alpha$ .

Puisque

$$\sigma - (\gamma \cup \alpha) = \{y_{k+1}, \dots, y_m\} \cap \sigma \neq \emptyset,$$

il existe  $y \in \sigma - \rho$  tel que  $v(y) \geq v(y_{k+1})$ ; on en tire :

$$d(\rho, \sigma) = v(\rho - \sigma) + v(\sigma - \rho) \geq v(\rho - \gamma) + v(\alpha) + v(y_{k+1}).$$

Les nombres  $d(\rho, \sigma)$  pour  $\sigma \in \mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  sont donc bornés inférieurement par :

$$v(\rho) - v(\gamma) + v(\alpha) + v(y_{k+1}).$$

Soit  $\mathcal{B}_k(\beta)$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{C}$  tels que  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} - \sigma = \beta$  et  $\sigma \not\supset \rho - \beta$ . Puisque

$$\rho - (\beta \cup \sigma) = \{x_{k+1}, \dots, x_n\} - \sigma \neq \emptyset,$$

il y a  $x \in \rho - \sigma$  tel que  $v(x) \geq v(x_{k+1})$ ; on en déduit :

$$d(\rho, \sigma) = v(\sigma - \rho) + v(\rho - \sigma) \geq v(\beta) + v(x_{k+1}).$$

Les distances  $d(\rho, \sigma)$  pour  $\sigma \in \mathcal{B}_k(\beta)$  sont donc bornées inférieurement par  $v(\beta) + v(x_{k+1})$ .

L'algorithme est amorcé par la question  $\rho \in \mathcal{C}$  ? Si oui,  $\rho$  est évidemment la solution optimum puisque  $d(\rho, \rho) = 0$ . Sinon, la classe  $\mathcal{C}$  est séparée en  $\mathcal{A}_0(\rho, \emptyset)$  bornée par  $v(y_1)$  (quand  $\sigma \supset \rho$ ) et  $\mathcal{B}_0(\emptyset)$  bornée par  $v(x_1)$  (quand  $\sigma \not\supset \rho$ ). Il reste maintenant à voir comment on peut progresser à partir des deux cas  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  où  $k < m$  et  $\mathcal{B}_k(\beta)$  où  $k < n$ ; on notera que  $\mathcal{A}_m(\gamma, \alpha) = \mathcal{B}_n(\beta) = \emptyset$ .

Pour  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$ , on se demande d'abord si  $\gamma \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$  appartient à  $\mathcal{C}$ . Si oui, cet ensemble est la meilleure solution au sein de  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  car sa distance à  $\rho$ , égale à  $v(\rho - \gamma) + v(\alpha) + v(y_{k+1})$ , est min  $d(\rho, \sigma)$ . Sinon, on envisage deux possibilités exclusives pour  $\sigma \in \mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  :

$y_{k+1} \in \sigma$  ou  $y_{k+1} \notin \sigma$ . Si  $y_{k+1} \in \sigma$ ,  $\{y_1, \dots, y_{k+1}\} \cap \sigma$  est  $\alpha \cup \{y_{k+1}\}$ ; puisque  $\sigma \supset \gamma \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$  et que  $\gamma \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\} \in \mathcal{C}$ , on sait en outre que  $\sigma \supset \gamma \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$ ; par conséquent  $\sigma \in \mathcal{A}_{k+1}(\gamma, \alpha \cup \{y_{k+1}\})$ , classe bornée par :

$$v(\rho - \gamma) + v(\alpha) + v(y_{k+1}) + v(y_{k+2}).$$

Si  $y_{k+1} \notin \sigma$ ,  $\{y_1, \dots, y_{k+1}\} \cap \sigma$  est  $\alpha$ ; d'où  $\sigma \in \mathcal{A}_{k+1}(\gamma, \alpha)$ , classe bornée par :

$$v(\rho - \gamma) + v(\alpha) + v(y_{k+2}).$$

$\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  est ainsi partagée en deux sous-classes  $\mathcal{A}_{k+1}(\gamma, \alpha \cup \{y_{k+1}\})$  et  $\mathcal{A}_{k+1}(\gamma, \alpha)$  dont les bornes inférieures améliorent celles de  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$ .

Pour  $\mathcal{B}_k(\beta)$ , on pose préliminairement la question  $\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}) \in \mathcal{C}$ ? Quand la réponse est affirmative, cet ensemble est optimum au sein de  $\mathcal{B}_k(\beta)$  car sa distance à  $\rho$  réalise la borne inférieure  $v(\beta) + v(x_{k+1})$  de cette classe. Sinon, on considère trois propriétés exclusives pour  $\sigma \in \mathcal{B}_k(\beta)$  :

$$\sigma \supset \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}), \quad \sigma \not\supset \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}) \text{ et } x_{k+1} \in \sigma, \quad \sigma \not\supset \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}) \text{ et } x_{k+1} \notin \sigma.$$

Dans le premier cas,  $x_{k+1} \in \sigma$  puisque  $\sigma \not\supset \rho - \beta$ ; comme  $\rho \cap \sigma \subset \rho - \beta$ , il vient  $\rho \cap \sigma = \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$ , puis  $\sigma \in \mathcal{A}_0(\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}), \emptyset)$ , classe bornée par  $v(\beta) + v(x_{k+1}) + v(y_1)$ . Dans le second cas,  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\} - \sigma$  est encore  $\beta$ ; par conséquent,  $\sigma \in \mathcal{B}_{k+1}(\beta)$ , classe bornée par  $v(\beta) + v(x_{k+2})$ . Dans le troisième cas,  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\} - \sigma$  est  $\beta \cup \{x_{k+1}\}$ ; donc  $\sigma \in \mathcal{B}_{k+1}(\beta \cup \{x_{k+1}\})$ , classe bornée par :

$$v(\beta) + v(x_{k+1}) + v(x_{k+2}).$$

$\mathcal{B}_k(\beta)$  est ainsi séparée en trois sous-classes  $\mathcal{A}_0(\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}), \emptyset)$ ,  $\mathcal{B}_{k+1}(\beta)$  et  $\mathcal{B}_{k+1}(\beta \cup \{x_{k+1}\})$  dont les bornes inférieures améliorent celle de  $\mathcal{B}_k(\beta)$ .

De proche en proche,  $\mathcal{C}$  est partagée en classes de plus en plus petites; pour chacune d'elles, on connaît une borne inférieure de  $d(\rho, \sigma)$ . Le principe de la méthode S.E.P. ([5], X.B) est de *traiter à tout moment, parmi les cas encore libres, celui qui possède la borne la plus basse*. Si, dans la classe examinée, la réponse à la question «  $\sigma_0 \in \mathcal{C}$  ? » est affirmative ( $\sigma_0$  est  $\gamma \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$  dans  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  et  $\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$  dans  $\mathcal{B}_k(\beta)$ ), le sous-ensemble  $\sigma_0$  minimise  $d(\rho, \sigma)$  car il réalise la borne inférieure de son cas, laquelle ne dépasse aucune autre borne inférieure à ce moment.

\* \* \*

Pour mettre en évidence le principe de l'algorithme, je traite l'exemple ridiculement simple de

$$\omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4\} \quad \text{et} \quad \rho = \{x_1, \dots, x_6\}$$

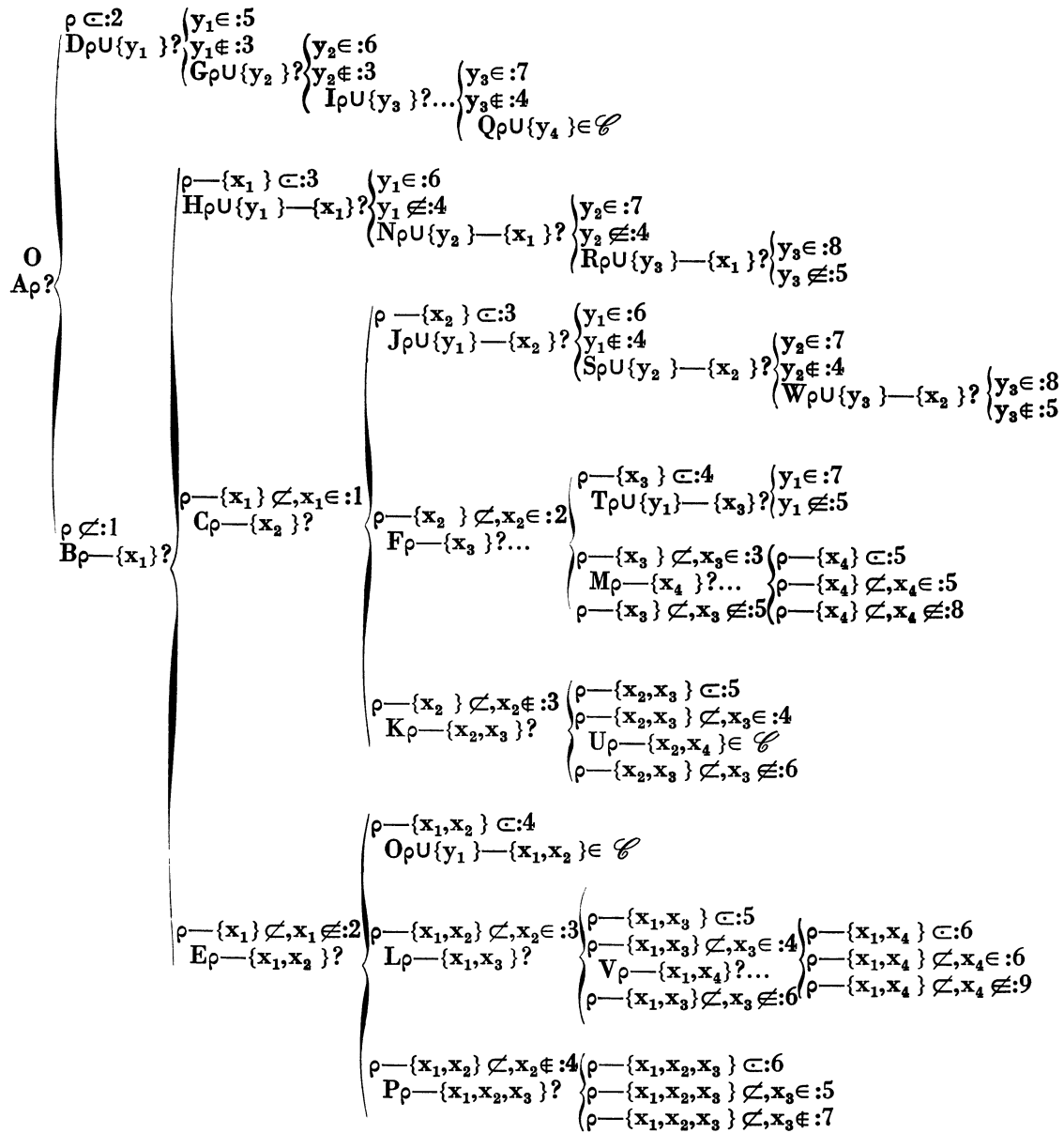
avec  $\mathcal{C} = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, \dots, x_6, y_1, y_2\}, \{x_1, \dots, x_6, y_4\}, \{x_1, x_3, x_5, x_6\}, \{x_1, x_5, x_6\}, \{x_2, x_4, y_1, y_3\}, \{x_3, x_4, x_5, x_6, y_1\}, \{x_5, x_6, y_1, y_4\}\}$

et la valuation :

$$x : x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4$$

$$v(x) : 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4$$

Pour alléger le tableau, on a écrit «  $\sigma_0$  ? » pour «  $\sigma_0 \in \mathcal{C}$  ? non », «  $\sigma_0 \not\subset, x_{k+1} \in$  » pour «  $\sigma_0 \not\subset \sigma$  et  $x_{k+1} \in \sigma$  », «  $y_{k+1} \in$  » pour «  $y_{k+1} \in \sigma$  », etc. A, B, C, ..., indique l'ordre temporel de traitement des cas.



$\{x_1, \dots, x_8, y_4\}$ ,  $\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$  et  $\{x_3, x_4, x_5, x_6, y_1\}$  sont les trois éléments de  $\mathcal{C}$  à distance minimum 4 de  $\rho$  ; si l'on ne désirait qu'une solution, on aurait pu s'arrêter dès le stade O.

Cette illustration, pourtant élémentaire, montre que la procédure est très lourde. En fait, elle est encore fictive parce que, pratiquement, la classe  $\mathcal{C}$  n'est jamais donnée par énumération de ses éléments, mais bien par une propriété caractéristique ; le test «  $\sigma_0 \in \mathcal{C} ?$  », à effectuer à chaque stade de l'algorithme, peut être lui-même tout un programme. D'autre part, si la famille  $\mathcal{C}$  ne se compose que d'éléments fort éloignés de  $\rho$ , il faudra parcourir tous les sous-ensembles intermédiaires avant d'aboutir ; au pire, si le seul élément de  $\mathcal{C}$  était  $\omega - \rho$ , l'algorithme conduirait à examiner les  $2^{|\omega|}$  parties de  $\omega$ . Ajoutons encore que le procédé est d'autant plus efficace que les valeurs de  $v$  sont largement distribuées ; le cas de la valuation uniforme pour laquelle les bornes ne progressent que de 0 et 1 est évidemment le plus mauvais.

En conclusion, on n'utilisera cet algorithme que si l'on ne dispose pas d'une méthode spécifique à la classe  $\mathcal{C}$  donnée. Si cette dernière est assez vaste, il est probable qu'il existe beaucoup de  $\sigma \in \mathcal{C}$  qui ne diffèrent de  $\rho$  que de peu d'éléments ; on peut espérer alors obtenir la solution à bref délai, pourvu que le contrôle «  $\sigma_0 \in \mathcal{C} ?$  » soit facile.

Pour la suite, il est utile de noter que les classes  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  sont engendrées en dernier ressort par  $\mathcal{A}_0(\gamma, \emptyset)$  laquelle résulte elle-même de la séparation de  $\mathcal{B}_k(\beta)$  avec  $\gamma = \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$ .

\*  
\* \*  
\*

La procédure proposée ne devient vraiment intéressante que lorsque  $\mathcal{C}$  jouit de certaines propriétés ; le reste de l'exposé est consacré aux améliorations qui apparaissent alors.

Si  $\mathcal{C}$  est décroissante, les éléments de  $\mathcal{C}$  qui minimisent  $d(\rho, \sigma)$  sont les parties de  $\rho$  qui maximisent  $v(\sigma)$  ; inversement, si, quels que soient le sous-ensemble  $\rho$  de  $\omega$  et la valuation positive  $v$ , la solution est contenue dans  $\rho$ ,  $\mathcal{C}$  est décroissante.

Soit  $\sigma_0 \in \mathcal{C}$  une partie de  $\rho$  qui maximise  $v(\sigma)$  ; un tel sous-ensemble existe puisque  $\mathcal{C}$  est non vide et décroissante. Si  $\sigma \in \mathcal{C}$ , on a  $d(\rho, \sigma) \geq d(\rho, \sigma_0)$  ; en effet,

$$v(\rho) + v(\sigma) - 2v(\rho \cap \sigma) \geq v(\rho) - v(\rho \cap \sigma) \geq \min_{\alpha \subset \rho, \alpha \in \mathcal{C}} (v(\rho) - v(\alpha)) = v(\rho) - \max_{\alpha \subset \rho, \alpha \in \mathcal{C}} v(\alpha) = v(\rho) - v(\sigma_0).$$

Réciproquement, si  $\mathcal{C}$  n'est pas décroissante, on peut trouver  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  tels que  $\sigma_1 \in \mathcal{C}$ ,  $\sigma_2 \notin \mathcal{C}$  et  $\sigma_2 \subset \sigma_1$ . Prenons  $v(x) = 1$  si  $x \in \omega - \sigma_2$ ,  $v(x) = |\sigma_1 - \sigma_2| + 1$  si  $x \in \sigma_2$  ; il en résulte  $d(\sigma_2, \sigma_1) = v(\sigma_1 - \sigma_2) = |\sigma_1 - \sigma_2|$ . Or, si  $\sigma \in \mathcal{C}$  est inclus dans  $\sigma_2$ ,  $\sigma \subset \sigma_2$  et il existe  $x \in \sigma_2 - \sigma$  qui donne  $d(\sigma_2, \sigma) = v(\sigma_2 - \sigma) \geq v(x) = |\sigma_1 - \sigma_2| + 1$  ; un  $\sigma \in \mathcal{C}$  et contenu dans  $\sigma_2$  ne peut donc provoquer le minimum de  $d(\sigma_2, \sigma)$ .

Du point de vue algorithmique, la décroissance de  $\mathcal{C}$  vide toutes les classes  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$  car, avant de partager  $\mathcal{B}_k(\beta)$ , on a constaté que  $\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}) \notin \mathcal{C}$  ; la classe  $\mathcal{A}_0(\gamma, \emptyset) = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma \supset \gamma\}$ , où  $\gamma = \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$ , est donc vide. Le schéma de séparation se présente alors comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \emptyset \\ \rho \dots \mathcal{B}_0(\emptyset):v(x_1) \\ \rho - \{x_1\} ? \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_2(\emptyset):v(x_3) \quad \mathcal{B}_3(\emptyset):v(x_4) \\ \rho - \{x_3\} ? \quad \mathcal{B}_3(\{x_3\}):v(x_3) + v(x_4) \\ \mathcal{B}_1(\emptyset):v(x_2) \\ \rho - \{x_2\} ? \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_2(\{x_2\}):v(x_2) + v(x_3) \quad \mathcal{B}_3(\{x_2\}):v(x_2) + v(x_4) \\ \rho - \{x_2, x_3\} ? \quad \mathcal{B}_3(\{x_2, x_3\}):v(x_2) + v(x_3) + v(x_4) \\ \mathcal{B}_1(\{x_1\}):v(x_1) + v(x_2) \\ \rho - \{x_1, x_2\} ? \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_2(\{x_1\}):v(x_1) + v(x_3) \quad \mathcal{B}_3(\{x_1\}):v(x_1) + v(x_4) \\ \rho - \{x_1, x_3\} ? \quad \mathcal{B}_3(\{x_1, x_3\}):v(x_1) + v(x_3) + v(x_4) \\ \mathcal{B}_2(\{x_1, x_2\}):v(x_1) + v(x_2) + v(x_3) \\ \rho - \{x_1, x_2, x_3\} ? \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_3(\{x_1, x_2\}): \\ v(x_1) + v(x_2) + v(x_4) \\ \mathcal{B}_3(\{x_1, x_2, x_3\}): \\ v(x_1) + v(x_2) + v(x_3) + v(x_4) \end{array} \right.$$

Quand la famille  $\mathcal{C}_\alpha = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma \supset \alpha\}$  est non vide, on peut considérer l'ensemble

$$\bar{\alpha} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{C}_\alpha} \sigma.$$

Pourvu que  $\bar{\alpha}$  existe, on a les propriétés classiques :  $\alpha \subset \bar{\alpha}$  ;  $\beta \subset \alpha$  entraîne l'existence de  $\bar{\beta}$  et l'inclusion  $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$  ;  $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}$  ;  $\bar{\alpha} = \alpha$  pour  $\alpha \in \mathcal{C}$ . Si  $\omega \in \mathcal{C}$  et seulement alors, l'opérateur est partout défini et devient une fermeture ([4], p. 35) ou une saturation gonflante ([3], p. 419).

*Lemme* : si  $\sigma \in \mathcal{C}$ ,  $\rho\sigma = \rho\overline{\rho\sigma}$  et  $d(\rho, \sigma) \geq d(\rho, \overline{\rho\sigma})$ .

On a  $\sigma = \bar{\sigma} \supset \overline{\rho\sigma}$  ; donc  $v(\sigma) \geq v(\overline{\rho\sigma})$  d'une part,  $\rho\sigma \supset \rho\overline{\rho\sigma}$  d'autre part. L'inclusion de  $\rho\sigma$  dans  $\rho$  et  $\overline{\rho\sigma}$  donne  $\rho\sigma \subset \rho\overline{\rho\sigma}$ , d'où  $\rho\sigma = \rho\overline{\rho\sigma}$ . Enfin :

$$v(\rho) + v(\sigma) - 2v(\rho\sigma) \geq v(\rho) + v(\overline{\rho\sigma}) - 2v(\rho\overline{\rho\sigma}).$$

Si  $\mathcal{C}$  est un  $\cap$ -demi-treillis, les éléments de  $\mathcal{C}$  qui minimisent  $d(\rho, \sigma)$  sont les  $\bar{\alpha}$  où  $\alpha$  est une partie de  $\rho$  qui maximise  $2v(\alpha) - v(\bar{\alpha})$  ; inversement, si, quels que soient le sous-ensemble  $\rho$  et la valuation positive  $v$  de  $\omega$ , la solution est un  $\bar{\alpha}$  où  $\alpha \subset \rho$ ,  $\mathcal{C}$  est un  $\cap$ -demi-treillis.

Soit  $\alpha$  une partie de  $\rho$  qui maximise  $2v(\alpha) - v(\bar{\alpha})$  ;  $\bar{\alpha}$  appartient à  $\mathcal{C}$  en tant qu'intersection finie d'éléments de  $\mathcal{C}$ . Un tel sous-ensemble  $\alpha$  existe puisque  $\emptyset \in \{\beta : \beta \subset \rho \text{ et } \mathcal{C}_\beta \neq \emptyset\}$ .

Si  $\sigma \in \mathcal{C}$ , on a :

$$d(\rho, \sigma) \geq d(\rho, \overline{\rho\sigma}) \geq d(\rho, \bar{\alpha}).$$

En effet, comme  $\rho\bar{\alpha}$  est une partie de  $\rho$ ,

$$2v(\rho\bar{\alpha}) - v(\overline{\rho\bar{\alpha}}) \leq 2v(\alpha) - v(\bar{\alpha}) ;$$

on en déduit :

$$2v(\rho\bar{\alpha}) \leq 2v(\alpha) + v(\overline{\rho\bar{\alpha}}) - v(\bar{\alpha}) = 2v(\alpha)$$

puisque  $\alpha \subset \rho\bar{\alpha} \subset \bar{\alpha}$  donne  $\overline{\rho\bar{\alpha}} = \bar{\alpha}$  ; le tout exige  $\rho\bar{\alpha} = \alpha$ . Il en résulte :

$$d(\rho, \overline{\rho\sigma}) = v(\rho) + v(\overline{\rho\sigma}) - 2v(\rho\sigma) \geq v(\rho) + v(\bar{\alpha}) - 2v(\alpha) = d(\rho, \bar{\alpha}).$$

Réciproquement, si  $\mathcal{C}$  n'est pas un  $\cap$ -demi-treillis, on peut trouver  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{C}$  tels que  $\sigma_1\sigma_2 \notin \mathcal{C}$ . Prenons  $\rho = \sigma_1\sigma_2$ ,

$$v(x) = 1 \quad \text{si } x \in \omega - \rho, \quad v(x) = |\sigma_1 - \rho| + 1 \quad \text{si } x \in \rho ;$$

il s'ensuit que

$$d(\rho, \sigma_1) = v(\sigma_1 - \rho) = |\sigma_1 - \rho|.$$

Or, si  $\alpha \subset \rho$ ,

$$\bar{\alpha} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{C}_\alpha} \sigma \subset \sigma_1\sigma_2 = \rho ;$$

comme  $\rho \notin \mathcal{C}$ , en supposant  $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$ ,  $\bar{\alpha} \subset \rho$  et il existe  $x \in \rho - \bar{\alpha}$  qui donne :

$$d(\rho, \bar{\alpha}) = v(\rho - \bar{\alpha}) \geq v(x) = |\sigma_1 - \rho| + 1.$$

Un  $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$  avec  $\alpha \subset \rho$  ne peut donc provoquer le minimum de  $d(\rho, \sigma)$ .

*Remarques* : 1) Un  $\sigma \in \mathcal{C}$  et inclus dans  $\bar{\rho}$  n'est pas nécessairement de la forme  $\bar{\alpha}$  avec  $\alpha \subset \rho$  ;  $\alpha \subset \rho$  n'entraîne pas généralement  $\alpha = \rho\bar{\alpha}$ . Pour le voir, prenons la classe  $\mathcal{C}$  des relations transitives de  $E$  et  $\omega = 2^{E \times E}$  ;

$\rho$  est :



$\bar{\rho}$  est :



$\sigma$  égal à :



contredit la première proposition ;

$\alpha$  égal à :



met la seconde en défaut.

2) Une classe  $\mathcal{C}$  décroissante est un  $\cap$ -demi-treillis ; les résultats donnés à propos des classes décroissantes sont des cas particuliers de ceux relatifs aux  $\cap$ -demi-treillis, obtenus en prenant  $\bar{\alpha} = \alpha$ .

3) Dans les réciproques des deux énoncés, il est indispensable de demander « pour toute valuation  $v$  ». Voici l'exemple d'une classe  $\mathcal{C}$  qui n'est pas un  $\cap$ -demi-treillis (donc n'est pas décroissante) et qui cependant, pour un certain  $v$ , est telle que le  $\sigma \in \mathcal{C}$  à distance minimum d'une partie quelconque  $\rho$  est toujours inclus dans  $\rho$  (donc de la forme  $\bar{\alpha}$  où  $\alpha \subset \rho$ ).

$$\omega = \{a, b, c\}, v(a) = 1, v(b) = v(c) = 2, \mathcal{C} = 2^\omega - \{\{a\}\};$$

$\mathcal{C}$  n'est pas un  $\cap$ -demi-treillis puisque  $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$ . Le  $\sigma \in \mathcal{C}$  à distance minimum de  $\rho \neq \{a\}$  est  $\rho$  lui-même ; le  $\sigma \in \mathcal{C}$  à distance minimum de  $\{a\}$  est  $\emptyset$ .

Au point de vue algorithmique, le fait que  $\mathcal{C}$  soit un  $\cap$ -demi-treillis supprime l'examen des  $\mathcal{A}_k(\gamma, \alpha)$ . Pour cela, une classe  $\mathcal{B}_k(\beta)$  sera partagée en  $\mathcal{B}_{k+1}(\beta)$ ,  $\mathcal{B}_{k+1}(\beta \cup \{x_{k+1}\})$  et  $\mathcal{A}_k(\beta) = \{\sigma \in \mathcal{C} : \rho \cap \sigma = \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})\}$  qui ne diffère de  $\mathcal{A}_0(\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}), \emptyset)$  que par l'admission éventuelle de l'égalité  $\sigma = \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$ . Si  $\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$  n'existe pas,  $\mathcal{A}_k(\beta)$  est vide ; sinon  $d(\rho, \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}))$  borne  $\mathcal{A}_k(\beta)$  puisque  $d(\rho, \sigma) \geq d(\rho, \rho \cap \sigma) = d(\rho, \rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\}))$  pour  $\sigma \in \mathcal{A}_k(\beta)$ . Si cette quantité n'est pas supérieure aux bornes inférieures des autres classes,  $\rho - (\beta \cup \{x_{k+1}\})$  est une solution ; mais on notera que cette partie n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{A}_k(\beta)$  et, par conséquent, peut être répétée ailleurs.

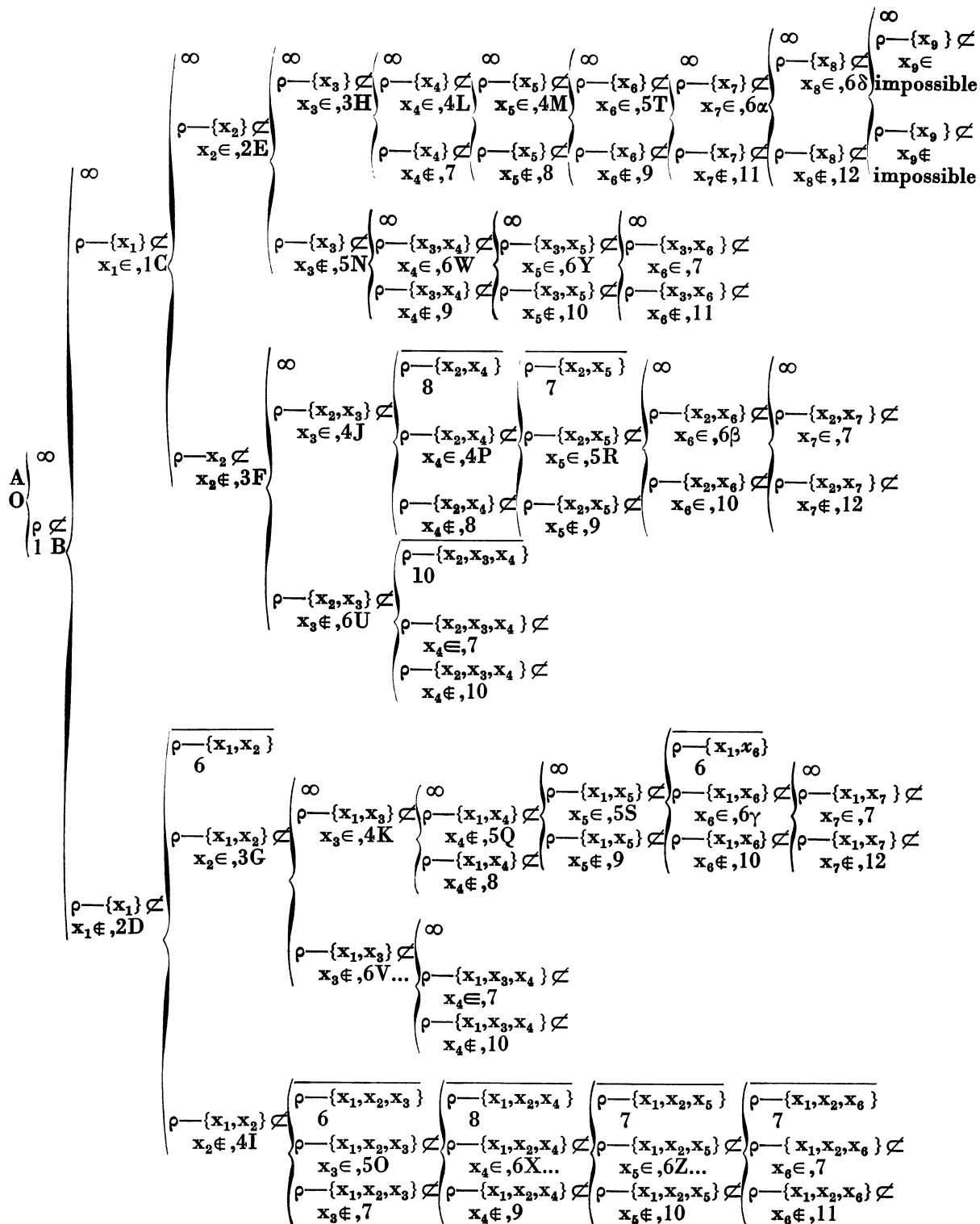
\* \* \*

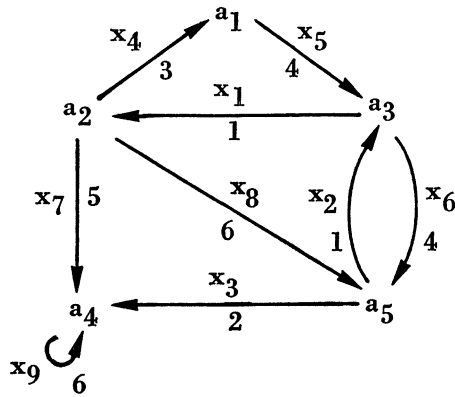
Le problème étudié ici apparaît souvent à propos des relations binaires (ou graphes orientés) d'un ensemble  $E$ , considérées comme parties de  $\omega = E \times E$ . Dans ce contexte, des classes  $\mathcal{C}$  décroissantes sont constituées des relations acycliques, des relations sans circuits, des couplages, des relations antisymétriques, etc. La relation du type demandé à distance minimum de  $\rho$  est alors la sous-relation de  $\rho$  de valeur totale maximum ; ceci justifie les divers procédés connus pour chercher une forêt maximum ([5], VII, A, 2, c), un sous-graphe sans circuits maximum [2], un couplage maximum ([5], IX, D, 1, b) au sein d'un graphe donné ; le cas où  $\mathcal{C}$  est la classe des relations antisymétriques est trop trivial pour nécessiter la description d'un algorithme.

Comme exemples de  $\cap$ -demi-treillis, on peut citer les classes des relations symétriques, des relations transitives, des équivalences, des ordres. Trouver une relation symétrique à distance minimum de  $\rho$  ne pose aucun problème ; pour la classe des relations transitives,  $\bar{\alpha}$  est la fermeture transitive



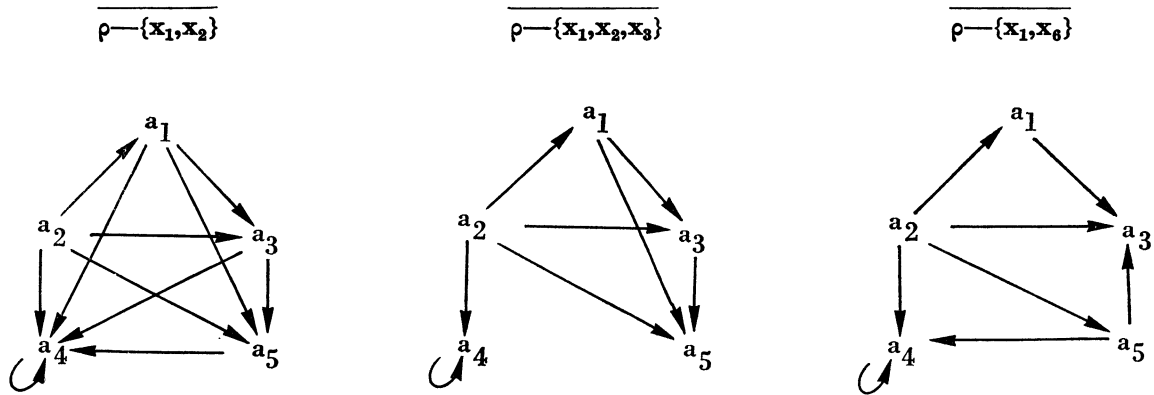
de  $\alpha$  ; pour la classe des équivalences,  $\bar{\alpha}$  est la fermeture réflexivo-symétrico-transitive. Pour la classe  $\mathcal{C}$  des ordres,  $\mathcal{C}_\alpha = \{\sigma : \sigma \text{ est un ordre et } \sigma \supset \alpha\}$  est non vide si et seulement si  $\alpha$  ne possède d'autres circuits que des boucles ; dans ce cas favorable,  $\bar{\alpha}$  est la fermeture transitive de  $\alpha$  ([5], V, C, 1, a). À titre d'illustration, recherchons l'ordre à distance minimum du graphe  $\rho$  valué suivant.





Les couples en dehors de  $\rho$  recevront la valeur 1. A, B, ..., Z,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  indique l'ordre temporel des stades. Aux conventions de l'algorithme général, il faut ajouter la notation  $\infty$  pour désigner la non existence de  $\sigma_0$ , plus petit ordre contenant  $\sigma_0$ , quand  $\sigma_0$  possède un circuit au moins.

On trouve trois ordres à distance minimum 6 de  $\rho$  :



Si l'on ne cherchait pas toutes les solutions, on pourrait s'arrêter après le traitement du stade T, quand on a constaté que toutes les bornes restantes étaient  $\geq 6$ .

\*  
\*  
\*

Les algorithmes et résultats précédents peuvent être dualisés. Ainsi, soient  $\mathcal{C}_k(\delta, \beta)$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{C}$  tels que  $\sigma - \rho = \delta$ ,  $\{x_1, \dots, x_k\} - \sigma = \beta$ ,  $\sigma \subset (\rho - \beta) \cup \delta$ , et  $\mathcal{D}_k(\alpha)$  l'ensemble des  $\sigma \in \mathcal{C}$  tels que  $\alpha = \{y_1, \dots, y_k\} \cap \sigma$ ,  $\sigma \not\subset \rho \cup \alpha$ ; semblablement à ce qui a été fait ci-dessus, on a des bornes inférieures respectives  $v(\delta) + v(\beta) + v(x_{k+1})$  et  $v(\alpha) + v(y_{k+1})$  des distances  $d(\rho, \sigma)$  pour  $\sigma \in \mathcal{C}_k(\delta, \beta)$  ou  $\mathcal{D}_k(\alpha)$ . Si  $(\delta \cup \rho) - (\beta \cup \{x_{k+1}\}) \in \mathcal{C}$ , cette partie est optimum au sein de  $\mathcal{C}_k(\delta, \beta)$ ; sinon, la classe  $\mathcal{C}_k(\delta, \beta)$  se sépare en deux sous-classes  $\mathcal{C}_{k+1}(\delta, \beta)$  et  $\mathcal{C}_{k+1}(\delta, \beta \cup \{x_{k+1}\})$  selon que  $x_{k+1} \in \sigma$  ou non. Si  $\rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\} \in \mathcal{C}$ , cette partie est optimum au sein de  $\mathcal{D}_k(\alpha)$ ; sinon, la classe  $\mathcal{D}_k(\alpha)$  se partage en trois sous-classes  $\mathcal{C}_0(\alpha \cup \{y_{k+1}\}, \emptyset)$  si  $\sigma \subset \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$ ,  $\mathcal{D}_{k+1}(\alpha \cup \{y_{k+1}\})$  si  $\sigma \not\subset \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$  et  $y_{k+1} \in \sigma$ ,  $\mathcal{D}_{k+1}(\alpha)$  si  $\sigma \not\subset \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}$  et  $y_{k+1} \notin \sigma$ . La méthode S.E.P. s'applique encore et se schématise comme suit.

$$\begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho, \mathcal{C}_0(\emptyset, \emptyset):v(x_1) \\ \rho - \{x_1\} \in \mathcal{C} ? \text{ non} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_1 \in \sigma, \mathcal{C}_1(\emptyset, \emptyset):v(x_2) \\ \rho - \{x_2\} \in \mathcal{C} ? \text{ non} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_2 \in \sigma, \mathcal{C}_2(\emptyset, \emptyset):v(x_3) \\ x_2 \notin \sigma, \mathcal{C}_2(\emptyset, \{x_2\}):v(x_2) + v(x_3) \end{array} \\ \\ \left. \begin{array}{l} x_1 \notin \sigma, \mathcal{C}_1(\emptyset, \{x_1\}):v(x_1) + v(x_2) \\ \rho - \{x_1, x_2\} \in \mathcal{C} ? \text{ non} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_2 \in \sigma, \mathcal{C}_2(\emptyset, \{x_1\}):v(x_1) + v(x_3) \\ x_2 \notin \sigma, \mathcal{C}_2(\emptyset, \{x_1, x_2\}):v(x_1) + v(x_2) + v(x_3) \end{array} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_1\}, \mathcal{C}_0(\{y_1\}, \emptyset):v(y_1) + v(x_1) \\ \rho \cup \{y_1\} - \{x_1\} \in \mathcal{C} ? \text{ non} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_1 \in \sigma, \mathcal{C}_1(\{y_1\}, \emptyset):v(y_1) + v(x_2) \\ x_1 \notin \sigma, \mathcal{C}_1(\{y_1\}, \{x_1\}):v(y_1) + v(x_1) + v(x_2) \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_1, y_2\}, \mathcal{C}_0(\{y_1, y_2\}, \emptyset): \\ v(y_1) + v(y_2) + v(x_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_1, y_2\} \text{ et } y_2 \in \sigma, \mathcal{D}_2(\{y_1, y_2\}): \\ v(y_1) + v(y_2) + v(y_3) \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_1, y_2\} \text{ et } y_2 \notin \sigma, \mathcal{D}_2(\{y_1\}): \\ v(y_1) + v(y_3) \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_1\} \text{ et } y_1 \in \sigma, \mathcal{D}_1(\emptyset):v(y_2) \\ \rho \cup \{y_2\} \in \mathcal{C} ? \text{ non} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \sigma \subset \rho \cup \{y_2\}, \mathcal{C}_0(\{y_2\}, \emptyset):v(y_2) + v(x_1) \\ \sigma \subset \rho \cup \{y_2\} \text{ et } y_2 \in \sigma, \mathcal{D}_2(\{y_2\}):v(y_2) + v(y_3) \\ \sigma \subset \rho \cup \{y_2\} \text{ et } y_2 \notin \sigma, \mathcal{D}_2(\emptyset):v(y_3) \end{array} \right\}
\end{array}
\end{array}$$

Bien que les classes soient différentes, les questions posées et les bornes inférieures sont les mêmes que dans l'algorithme primal.

$\alpha^*$  est défini par :

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}'_\alpha} \sigma$$

quand  $\mathcal{C}'_\alpha = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma \subset \alpha\}$  est non vide. Pourvu que  $\alpha^*$  existe, on a :  $\alpha \supset \alpha^*$  ;  $\beta \supset \alpha$  implique l'existence de  $\beta^*$  et l'inclusion  $\beta^* \supset \alpha^*$  ;  $\alpha^{**} = \alpha^*$  ;  $\alpha^* = \alpha$  lorsque  $\alpha \in \mathcal{C}$ . Si  $\emptyset \in \mathcal{C}$  et seulement alors, cet opérateur est partout défini et devient une saturation contractante ([3], p. 419). Les énoncés suivants ont une preuve identique à leur duale, donnée précédemment.

*Lemme* : si  $\sigma \in \mathcal{C}$ ,  $\rho \cup \sigma = \rho \cup (\rho \cup \sigma)^*$  et  $d(\rho, \sigma) \geq d(\rho, (\rho \cup \sigma)^*)$ .

Si  $\mathcal{C}$  est un U-demi-treillis, les éléments  $\sigma$  de  $\mathcal{C}$  qui minimisent  $d(\rho, \sigma)$  sont les  $\alpha^*$  où  $\alpha$  est un sur-ensemble de  $\rho$  qui minimise  $2v(\alpha) - v(\alpha^*)$  ; inversement, si, quels que soient  $\rho$  et  $v$ , la solution est un  $\alpha^*$  où  $\alpha \supset \rho$ ,  $\mathcal{C}$  est un U-demi-treillis.

L'algorithme dual s'adapte au cas où  $\mathcal{C}$  est un U-demi-treillis en partageant une classe  $\mathcal{D}_k(\alpha)$  en  $\mathcal{D}_{k+1}(\alpha \cup \{y_{k+1}\})$ ,  $\mathcal{D}_{k+1}(\alpha)$  et  $\mathcal{C}_k(\alpha) = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma - \rho = \alpha \cup \{y_{k+1}\}\}$ . Si  $(\rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\})^*$  n'existe pas,  $\mathcal{C}_k(\alpha)$  est vide ; sinon, d'après le lemme,  $d(\rho, (\rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\})^*)$  est une borne inférieure des distances à  $\rho$  des éléments de  $\mathcal{C}_k(\alpha)$  ; en conséquence, le traitement des classes  $\mathcal{C}_k(\delta, \beta)$  disparaît.

$$\mathcal{D}_k(\alpha):v(\alpha) + v(y_{k+1}) \left\{ \begin{array}{l} \infty \text{ ou } d(\rho, (\rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\})^*) \\ \sigma \subset \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\} \text{ et } y_{k+1} \in \sigma: v(\alpha) + v(y_{k+1}) + v(y_{k+2}) \\ \sigma \subset \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\} \text{ et } y_{k+1} \notin \sigma: v(\alpha) + v(y_{k+2}) \end{array} \right.$$

Si  $\mathcal{C}$  est croissante, les éléments de  $\mathcal{C}$  qui minimisent  $d(\rho, \sigma)$  sont les sur-ensembles de  $\rho$  qui minimisent  $v(\sigma)$  ; réciproquement si, quels que soient le sous-ensemble  $\rho$  et la valuation positive  $v$  de  $\omega$ , la solution inclut  $\rho$ ,  $\mathcal{C}$  est croissante.

Dans l'algorithme dual, les classes  $\mathcal{C}_k(\delta, \beta)$  disparaissent puisque

$$\mathcal{C}_0(\alpha \cup \{y_{k+1}\}, \emptyset) = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma \subseteq \rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\}\}$$

est vide quand on a contrôlé que  $\rho \cup \alpha \cup \{y_{k+1}\} \in \mathcal{C}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT M. — « Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée », *Math. et sc. hum.*, n° 17, p. 47, 1966.
- [2] DURAND B. — « A propos du problème du nombre minimum d'arcs à enlever pour supprimer les circuits d'un graphe », *Math. et sc. hum.*, n° 20, p. 61, 1967.
- [3] HEUCHENNE C. — « Étude comparée des topologies, proximités et uniformités par relations binaires », *Bull. Soc. sc.*, Liège, nos 7-8, 1966.
- [4] DUBREIL-JACOTIN M. L., LESIEUR L., CROISOT R. — *Leçons sur la théorie des treillis*, Paris, Gauthier-Villars, 1953.
- [5] ROY B. — *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Paris, Dunod, 1969 (premier tome), 1970 (second tome).
- [6] ZAHN C. T. — « Approximating symmetric relations by equivalence relations », *S.I.A.M. journal on applied math.*, vol. 12, n° 4, 1964.