MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Esquisses mésologiques

Mathématiques et sciences humaines, tome 28 (1969), p. 7-25
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__7_0>

M.S.H. (7e année, n° 28, 1969, p. 7-25)

ESQUISSES MÉSOLOGIQUES

par

G. Th. GUILBAUD

I. — PRÉLIMINAIRES ET MOTIFS.

1. — Qu'on me pardonne mes néologismes : je demande la permission d'appeler MÉSOLOGIE, l'étude méthodique (et scientifique dans la mesure du possible) des systèmes régis par une relation qui sera décrite plus loin en détail et qui peut, le plus souvent, être présentée en français par l'emploi des prépositions « entre » et « parmi », ainsi que de l'adjectif « intermédiaire » (lequel allie judicieusement les deux racines latines : *inter*, *medium*). La langue anglaise connaît *intermediacy* et *betweenness* (entre lesquels je ne vois guère de nuances); peut-être faudrait-il risquer en français une « intermédiarité », mais c'est un peu rugueux à dire. Enfin, on m'excusera de n'avoir pas osé comme titre : esquisses entristes.

Pour écrire un petit précis de mésologie, il faudrait commencer par recueillir et systématiser au moins trois sortes de faits : linguistiques, psychologiques et mathématiques. Pour les deux premières sortes, on se contentera ici, de les évoquer, faute de compétence (mais d'ailleurs il ne s'agit que d'esquisses, comme on l'a dit).

2. — Une enquête sur les diverses langues serait certainement très efficace. En attendant qu'elle soit faite, je conseillerai à mon lecteur d'ouvrir le *Dictionnaire du Français Contemporain* (J. Dubois etc., chez Larousse) où se trouve page 433, un tableau comparatif de quelques emplois de Entre et Parmi. Puis, dans la *Systématique des Éléments de Relation* de B. Pottier (Paris, Klincksieck, 1962) d'examiner les schémas des pages 214 et suivantes. Feuilleter ensuite un dictionnaire aux mots qui commencent par ENTR-, par INTR- et INTER-. Et pour peu qu'on ait quelques notions des constructions de la mathématique contemporaine, on ne pourra manquer de se poser une foule de questions, pour lesquelles la collaboration des linguistes de métier sera souhaitable. Un point de détail, en passant, sur lequel nous avons à revenir. La définition de Littré, reprise textuellement par Robert, est telle : « entre = dans l'espace qui sépare deux ou plusieurs choses ». Deux, ou plus de deux ? S'il faut suivre Ernout et Meillet, le latin *inter* signifie proprement : à l'intérieur de deux. Ne reconnaît-on pas aussi le nombre *deux* dans l'allemand *zwischen* et l'anglais *between ?* Il conviendrait, bien entendu, d'examiner de plus près les couples : Entre-Parmi, *Between-Among*, *Zwischen-Unter*.

3. — Il y a les mots, mais il y a aussi les choses : quelles sont celles qu'on s'estime capable de déclarer « entre ».

Bien entendu d'abord les deux classes fondamentales : *Zwischenraum* et *Zwischenzeit*. Un instant, ou une durée, entre deux autres. Un point, ou un lieu, ou un endroit, entre deux ou plusieurs autres.

Pour ce qui est de l'espace on devra distinguer l'espace amorphe et celui des lieux liés par un réseau de routes : dans ce dernier cas, si A est entre X et Y, cela peut vouloir dire ou bien qu'on est obligé de passer par A, ou bien seulement qu'on *peut* passer par A, pour aller d'un point à l'autre. Pour le temps, les langages en témoignent, il est assez souvent assimilé à un espace unidimensionnel.

Dans l'organisation de notre discours spatial ou temporel, la mathématique a pris place depuis si longtemps que l'analyse s'en trouve compliquée. Aussi on fera bien de se munir de quelques autres illustrations qui ne sont spatiales que par métaphore.

L'exemple privilégié est celui des sensations de couleur : c'est un vieux problème, et bien étudié, que celui de l'organisation mésologique des couleurs. Peut-on en dire autant des timbres des sons (que les Allemands disent *Klangfarben*). Et des saveurs ? et des odeurs ?

A propos de timbres, on peut penser soit aux bruits, soit aux instruments de musique, mais aussi à la voix humaine. Ce qui fera alors penser aux langages : il y a longtemps que l'organisation d'un système de voyelles a été décrit par métaphores spatiales (triangles ou quadrilatères, lesquels ne veulent signaler que des relations qualitatives).

4. — Il n'y a pas, fort heureusement, que les sensations. Toutes sortes de représentations s'organisent comme intermédiaires les unes des autres. Les attitudes politiques ou morales ou sociales, par exemple. Ajoutons encore, à seule fin de signifier l'ampleur des enquêtes éventuelles, une autre série d'exemples :

La critique textuelle, et plus généralement encore, la critique des témoignages se préoccupe de reconstituer des filiations; mais assez souvent on ne peut pas saisir directement que A est source de B, alors qu'on peut décider que B est *intermédiaire* entre A et C.

5. — Dans l'enseignement de la mathématique la plus élémentaire, la notion d'intervalle est subordonnée à la notion d'ordre.

Dans un ensemble totalement ordonné (de deux éléments distincts on sait toujours lequel est avant l'autre), on traduit « $a < x < b$ ou $b < x < a$ » par « x est entre a et b ». Et l'on s'intéresse, par exemple, aux types d'ordre tels que : « entre deux éléments distincts il en existe toujours un troisième ». Mais la construction de la géométrie (affine) pose un problème : les points d'une ligne droite ne sont pas « naturellement » ordonnés; ils sont ordonnables, et de deux façons différentes. C'est pourquoi certaines axiomatisations de la géométrie ont tenté de placer en tête la relation d'intermédiaire, pour en faire dériver la relation d'ordre. Pasch, Peano, Hilbert, Veblen et quelques autres ont écrit sur ce thème, qui n'offre peut-être plus beaucoup d'intérêt proprement mathématique (les problèmes sont presque tous résolus) mais qui peut avoir encore quelques vertus pour l'enquête de mathématique sociale évoquée ci-dessus. On va donner ci-après quelques résultats essentiels.

II. — LES MÉDIATIONS.

La situation la plus générale à laquelle nous nous intéressons ici sera celle d'un ensemble M, (dont les éléments seront désignés par des lettres : a, b, c, ..., autant qu'il en faudra, et de relations ternaires, qu'on nommera *médiations*, de la forme :

« a est *entre* b et c ».

(On pourra dire aussi : *a sépare* b et c, ou bien encore que a est *intermédiaire*.)

L'ensemble des x intermédiaires entre b et c est une partie de M qu'on appellera l'entre-deux ou l'*intervalle*, dont b et c sont les *extrémités*. On désignera cet intervalle par la notation :

$$(b + c).$$

Pour le moment, le signe + figure ici comme simple marque de ponctuation; on aurait écrit (b, c) si cette écriture n'avait déjà son emploi mathématique, fixé par l'usage qui la réserve aux couples ordonnés. Mais on aurait aussi bien choisi (b : c) ou bien (b et c), etc.

L'écriture commode :

$$a \in (b + c)$$

souvent abrégée en :

$$a \in b + c$$

traduira donc la proposition : « a entre b et c ».

La première règle, ou axiome, est une précaution : nous poserons qu'il ne peut y avoir de médiation si les trois éléments ne sont pas distincts deux à deux.

Si l'on veut formaliser :

Axiome 0.

Quels que soient a, b et c, on a :

$$a \in b + c \quad \Rightarrow \quad a \neq b \text{ et } b \neq c \text{ et } c \neq a$$

(étant alors entendu qu'on a introduit dans la théorie, outre la médiation, une relation d'égalité : $a = b$ signifie que a et b sont, comme on dit, *confondus*; et $a \neq b$ indique que a et b sont distincts. Cette relation d'égalité satisfait aux conditions habituelles : réflexivité, symétrie et transitivité; ainsi que la substituabilité : si $a = b$, alors tout ce qu'on dit de a (dans la théorie) on peut le dire aussi bien de b).

On remarquera que, par suite de l'axiome *0*, on a :

$$a = b \Rightarrow a \notin b + c \qquad \text{et} \qquad a = c \Rightarrow a \notin b + c.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$b \notin b + c \qquad \text{et} \qquad c \notin b + c.$$

Nous avons donc, par l'axiome *0*, fait choix du langage « ouvert » : un intervalle ne comprend pas ses extrémités mais les exclut. Bien entendu, il n'était pas a priori nécessaire de faire cette convention. Il faut même avouer que la pratique mathématicienne actuelle en matière d'ordre semble préférer le langage inclusif au langage exclusif : par contre en topologie, les ouverts sont souvent préférés. On aurait pu ici, convenir d'utiliser le langage « fermé », dans lequel l'intervalle inclut ses extrémités. Pas d'autres raisons que la commodité : le seul point important est de fixer des conventions et de s'y tenir.

Les axiomes suivants, établissent les symétries de la relation de médiation.

Axiome 1.

Quels que soient x, a et b, si x sépare a et b, alors x sépare b et a.

Ce qu'on écrira :

$$(\forall a, \forall b, \forall x) : x \in a + b \Rightarrow x \in b + a$$

ou plus simplement encore :

$$(a + b) = (b + a)$$

(égalité d'ensembles ayant les mêmes éléments).

On complète par un second axiome d'antisymétrie qui va interdire, au contraire du précédent, les autres échanges de rôle.

Axiome 2.

Quels que soient a, b et c, si a sépare b et c, alors b ne sépare pas a et c.

$$(\forall a, \forall b, \forall c) : \qquad a \in b + c \Rightarrow b \notin a + c.$$

En associant les axiomes 1 et 2, on voit que :

$$a \in b + c \Rightarrow a \in c + b,$$
$$\text{et } b \notin a + c, \text{ et } b \notin c + a,$$
$$\text{et } c \notin a + b, \text{ et } c \notin b + a.$$

Si l'on a trois éléments distincts :

$$a \neq b \neq c \neq a$$

deux situations sont possibles :

— ou bien aucune relation de médiation,

— ou bien deux parmi les six.

Il sera commode de désigner ces deux cas, respectivement par les noms de TRIANGLE, et TRIO.

L'ensemble des trois éléments a, b, c constitue un triangle si :

$$(a \neq b \neq c \neq a \text{ et } a \notin b + c \text{ et } b \notin a + c, \text{ etc.})$$

un trio si :

$$(a \in b + c \text{ ou } b \in a + c \text{ ou } c \in a + b).$$

On appellera MÉDIUM un ensemble muni de relations de médiations obéissant aux trois axiomes précédents. Bien entendu ces axiomes ne suffisent pas à créer des structures intéressantes : on aura d'ailleurs remarqué qu'aucune existence n'est postulée. Pour obtenir un modèle il suffit de choisir un ensemble, fini ou infini (mais ayant plus de trois éléments), et de donner une règle qui classe les triplets en triangles et trios. Puis pour chaque trio de dire quel est l'élément intermédiaire.

Bien entendu, on aura envie d'écarter les cas triviaux : celui, par exemple, où il n'y a que des triangles et pas de trio, la relation de médiation est vide. Le plus souvent, on exigera même davantage : étant donné deux éléments distincts a et b, il existe une médiation qui les concerne; il s'agit en quelque sorte d'une exigence de connexité. Cette exigence peut d'ailleurs être formulée de plusieurs manières qui ne sont pas équivalentes.

1° On peut en effet se contenter de postuler l'existence, pour toute paire a, b, d'un troisième élément formant trio avec les deux premiers, sans préciser les rôles de chacun.

Dans ce cas, la construction d'un modèle est aisée. Toute paire doit faire partie d'un trio au moins : si l'on veut bien se contenter d'un seul trio pour chaque paire, on dispose alors, pour le cas d'un ensemble fini, des solutions connues du problème de Steiner (1852).

Les deux plus petits dispositifs sont célèbres :

— (Fano) pour sept éléments, on prendra comme trios : (1, 2, 4) (2, 3, 5) (3, 4, 6) (4, 5, 7) (5, 6, 1) (6, 7, 2) (7, 1, 3), dont la loi de formation est évidente (en arithmétique modulo 7);

— (Sarrus) pour neuf éléments : (la recette est encore plus facile si l'on dispose au préalable les éléments en carré 3×3) les trios sont, par exemple : abc, def, ghi, adg, beh, cfi, aei, bfg, cdh, afh, bdi, ceg.

Il existe de tels dispositifs comportant soit 7, 13, 19, 25, etc., soit 9, 15, 21 etc. , éléments. Mais il faut noter qu'aucun d'eux n'est réalisable comme ensemble de points dans l'espace euclidien; cette impossibilité se rattache au problème de Sylvester dont je dirai quelques mots plus loin.

2° Mais on peut aussi vouloir préciser le rôle de chaque élément du trio. Cela peut être fait de plusieurs façons.

Ou bien, pour chaque paire : a et b ($a \neq b$), on exigera qu'il existe au moins un intermédiaire (axiome 3) :

$$\forall a, \forall b \neq a, \quad \exists x : x \in a + b;$$

ou bien, quels que soient a et b ($a \neq b$) on réclamera l'existence d'un « prolongement » (axiome 4) :

$$\forall a, \forall b \neq a, \quad \exists y : a \in b + y.$$

Il pourra être commode d'avoir (à côté du terme « intervalle » désignant l'ensemble des x de l'axiome 3) un terme pour désigner l'ensemble des y de l'axiome 4; nous choisirons le mot de RAYON.

Un rayon (issu de a) sera donc l'ensemble des y tel que : $a \in y + b$.

L'axiome 4 exprime qu'aucun rayon n'est vide, comme l'axiome 3 dit qu'aucun intervalle n'est vide.

3° Dans la plupart des usages, on requiert les deux axiomes 3 et 4. Dans ce cas, toute paire entraine l'existence de trois éléments (un intervalle, deux rayons). Le plus petit dispositif satisfaisant comporte alors cinq éléments (c'est le « pentagone » de Neper qui servait aux navigateurs d'autrefois comme aide-mémoire de trigonométrie sphérique) :

1 entre 2 et 5, et entre 3 et 4
2 entre 1 et 3, et entre 4 et 5
3 entre 2 et 4, et entre 1 et 5
4 entre 3 et 5, et entre 1 et 2
5 entre 1 et 4, et entre 2 et 3.

4° On peut aussi postuler l'existence de triangles, et même d'au moins un triangle pour chaque paire (axiome 5) :

$$\forall a, \forall b \neq a, \exists t : t \notin a + b, a \notin b + t, b \notin a + t.$$

5. — En dehors des axiomes de symétrie (axiomes 0, 1 et 2) et des axiomes d'existence (à choisir selon ce qui vient d'être dit), on introduira des axiomes de transitivité lesquels traitent le cas de plusieurs trios ayant des éléments communs.

Quels axiomes choisir ? Il y a une réponse toute simple. C'est celle qui consiste à étudier d'abord les Médiums sans triangle (ceux qui veulent, disent : les Média) : c'est-à-dire des ensembles tels que trois éléments distincts constituent toujours un trio, l'un d'eux étant nécessairement intermédiaire entre les deux autres. Je propose d'appeler GAMME une pareille structure que certains préféreront décrire comme « unidimensionnelle ».

Un ensemble totalement ordonné fournit un modèle de gamme : on dira que x est entre a et b si $a < x < b$ ou bien si $b < x < a$. On obtient évidemment la même gamme pour les deux ordres opposés. Inversement, on peut se demander quelles gammes fournissent des structures d'ordre; il est clair qu'il faut poser ici des axiomes de transitivité tel que, par exemple :

$$a \in b + c \quad \text{et} \quad b \in c + d \Rightarrow a \in c + d \quad \text{et} \quad b \in a + d.$$

Pour énumérer systématiquement toutes les réquisitions de transitivité, on peut procéder comme suit.

Pour trois éléments quelconques pris dans une gamme, on peut, dès qu'on a vérifié qu'ils sont bien distincts, dire lequel des trois est entre les deux autres.

Prenons alors quatre éléments distincts : a, b, c et d, Il y a quatre questions à poser, et pour chacune, a priori, trois réponses possibles.

Questions	Réponse (l'intermédiaire)
a, b, c	a, ou b, ou c
a, b, d	a, ou b, ou d
a, c, d	a, ou c, ou d
b, c, d	b, ou c, ou d

Numérotons les propositions de 1 à 12 :

a	*b*	*c*	*d*
1	2	3	—
4	5	—	6
7	—	8	9
—	X	Z	O

(par exemple : 5 signifie « b est entre a et d »).

Les douze relations ne sont pas indépendantes; il est un peu compliqué d'exprimer la dépendance requise au moyen d'implications (comme ci-dessus on a écrit que : 1 et X $\Rightarrow$ 5 et 7.

Il est plus commode de dire :

— incompatibilité de deux relations dans la même ligne du tableau (c'est l'axiome 2);
— incompatibilité des trois relations d'une même colonne;
— on ne peut choisir une seule relation dans une colonne : il en faut toujours deux ou zéro.

Mais tout cela est assez banal. Aussi préférons-nous poursuivre d'une façon différente.

Deux raisons au moins pour cela : d'abord c'est une illusion fort répandue de croire à l'universalité des gammes; combien de gens qui ne sont pas daltoniens s'imaginent, par exemple, pouvoir classer les couleurs en série ordonnée (invoquant parfois le mythe de l'arc-en-ciel). Ensuite, il importe de savoir que les relations dans une gamme, s'il en existe, ne sont pas complètement indépendantes des médiations de l'environnement (les choses se passent ici comme en géométrie affine classique, où la géométrie dans l'espace à trois dimensions est moins libre que celle du plan, comme le savait déjà Desargues).

Avant de nous préoccuper des Gammes, nous étudierons donc au contraire les Médiums (ou Média) qui comportent des triangles.

III. — L'AXIOME P.

P comme palette (en tant qu'opposée à : Gamme), mais aussi P comme Pasch (1882) et comme Peano (1889). C'est en effet à Peano, dans les corrections qu'il propose au travail de Pasch, que nous emprunterons notre énoncé.

1. — Pour aller de l'avant, il est bon de penser toujours (et d'en parler quelquefois) au modèle géométrique traditionnel : l'ensemble des points d'un plan (ou de l'espace) peut être organisé en Médium; il suffit de traduire la relation : a entre b et c, comme : le point a appartient au segment de droite bc. Nos précédents axiomes sont vérifiés. Mais il y a plus : car dans l'espace la relation « entre » n'est plus

seulement « entre deux ». Prenons trois points a, b et c formant un triangle : comment définir l'*intérieur* du triangle ? On voit qu'il suffit de prendre un point m entre a et b, puis entre c et m un point x; c'est-à-dire les intérieurs de tous les intervalles qui séparent c d'un point quelconque du côté (ab). Et bien évidemment les trois côtés peuvent jouer le même rôle. Dégageons-nous alors de l'imagerie géométrique (pour pouvoir nous demander, par exemple, si la logique des couleurs est ou non la même que celle de l'espace).

2. — Soit un Médium M quelconque. Supposons qu'il contienne cinq éléments vérifiant les deux relations :

$$x \in (a + y) \qquad \text{et} \qquad y \in (b + c)$$

(x est entre a et un autre élément y, lui-même situé entre b et c) et supposons de plus que a, b et c constituent un triangle (un triangle est un système « libre », c'est-à-dire sans aucune médiation : aucun des trois points n'est entre les deux autres, et les trois sont distincts). L'axiome P énoncera alors qu'il *existe* un élément u entre a et b tel que x soit entre u et c. (Le lecteur pourra s'aider d'une figure qu'il dessinera). Il est assez naturel, et commode, d'introduire ici une nouvelle notation :

$$x \in (a + (b + c))$$

pour signifier nos hypothèses :

$$(\exists\ y) : x \in (a + y) \qquad \text{et} \qquad y \in (b + c).$$

Cela revient à désigner par l'écriture $(a + (b + c))$ l'ensemble de tous les éléments des intervalles séparant a d'un élément quelconque de l'intervalle $(b + c)$.

Avec cette notation, l'axiome P prend la forme, lorsque a, b, c forment un triangle :

$$x \in (a + (b + c)) \Rightarrow x \in (c + (a + b))$$

ou encore :

(P) Pour tout triangle (a, b, c) on a : $(a + (b + c)) \subset (c + (a + b))$

Comme la relation : « être triangle » est symétrique pour les trois éléments, on peut de nouveau appliquer l'axiome P :

$$(c + (a + b)) \subset (b + (c + a))$$

et encore :

$$(b + (c + a)) \subset (a + (b + c))$$

En rassemblant les trois inclusions et en arguant la transitivité, il vient comme première conséquence de l'axiome :

$$(a + (b + c)) = (b + (c + a)) = (c + (a + b))$$

D'autre part, selon l'axiome 1 :

$$(b + c) = (c + b)$$

Finalement, on a donc la commutativité et l'associativité qui permettront d'introduire la nouvelle écriture :

$$a + b + c$$

pour désigner l'intérieur du triangle (a, b, c).

Désormais tout Médium sera censé obéir à l'axiome P. Dans l'utilisation répétée de cet axiome, il pourra être commode de servir de diagrammes tels que :

$$x \in a + y \qquad\qquad a — x — y$$

$$x \in (a + (b + c)) \qquad\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & b \arrow[d, dash] \\ a \arrow[r, dash] & x \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[d, dash] \\ & & c \end{tikzcd}$$

Axiome P :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & b \arrow[d, dash] \\ a \arrow[r, dash] & x \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[d, dash] \\ & & c \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] a \arrow[r, dash] & \cdot \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & b \\ & x \arrow[d, dash] & \\ & c & \end{tikzcd}$$

3. — Il n'y a que le premier pas qui coûte : étant passé de l'entre-deux $(a + b)$ à l'entre-trois $(a + b + c)$, il peut être tentant de généraliser. Moyennant quelques précautions ce n'est pas difficile.

Posons :

$$x \in (a + t),\ t \in (b + u) \text{ et } u \in (c + d)$$

que l'on pourra abréger en :

$$x \in (a + (b + (c + d)))$$

et figurer par le schéma :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & & b \arrow[d, dash] & \\ & a \arrow[r, dash] & x \arrow[r, dash] & t \arrow[d, dash] & \\ & & c \arrow[r, dash] & u \arrow[r, dash] & d \end{tikzcd}$$

L'axiome P peut-il s'appliquer aux deux médiations suivantes :

$$t \in b + u \quad \text{et} \quad u \in c + d \ ?$$

Oui, si (b, c, d) est un triangle.

Supposons-le. Alors l'axiome P affirme l'existence d'un élément s :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] b \arrow[r, dash] & s \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & c \\ & t \arrow[d, dash] & \\ & d & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{array}{l} s \in (b + c) \\ t \in (s + d) \end{array}$$

On a donc :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & s \arrow[d, dash] \\ a \arrow[r, dash] & x \arrow[r, dash] & t \arrow[d, dash] \\ & & d \end{tikzcd}$$

On peut encore appliquer l'axiome P, *à condition que* (a, s, d) soit un triangle. Supposons-le encore. Il vient donc :

$$\begin{array}{ccccc} a & — & r & — & s \\ & & | & & \\ & & x & & \\ & & | & & \\ & & d & & \end{array}$$

Récapitulons. On a prouvé l'existence de r et de s tels que :

$$s \in (b + c) \qquad r \in (a + s) \qquad \text{et} \qquad x \in (r + d)$$

$$\begin{array}{ccccccc} a & — & s & — & c & & \\ & & | & & & & \\ & & r & — & x & — & d \\ & & | & & & & \\ & & a & & & & \end{array}$$

Avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes, nous avons donc montré, par application de l'axiome P, que si :

$$x \in (a + (b + (c + d)))$$

alors :

$$x \in (d + (a + (b + c)))$$

Mais il ne faut pas oublier les conditions : (b, c, d) et (a, s, d) sont des triangles.

Comment être sûr de réaliser ces conditions ? Voici *une* réponse. Si le triplet (b, c, d) n'était pas un triangle, ce serait un trio, à moins que deux des éléments ne soient confondus.

On exigera donc d'abord que, pour les quatre points donnés, tous les quatre soient distincts et ensuite qu'il n'existe pas de trio formés par trois d'entre eux.

Comment, de plus, interdire à coup sûr que (a, s, d) puisse être un trio ? Si (a, s, d) était un trio, on aurait donc l'une des trois situations suivantes :

$$\text{ou bien } s \in (a + d) \qquad \text{ou bien } d \in (a + s) \qquad \text{ou bien } a \in (d + s).$$

Comme d'autre part $s \in (b + c)$, il vient finalement deux types de situations à interdire, soit que :

$$a \in (b + c + d) \qquad \text{ou} \qquad d \in (a + b + c)$$

soit que :

$$(a + d) \qquad \text{et} \qquad (b + c)$$

aient un élément s en commun.

Finalement, on assujettira les quatre éléments a, b, c et d aux conditions suivantes (suffisantes pour assurer l'applicabilité répétée de l'axiome P) :

— ils sont deux à deux distincts;

— trois à trois ils forment des triangles, et non des trios (c'est-à-dire aucun n'est entre les deux autres);

— aucun n'est intérieur au triangle des trois autres;

— deux intervalles tels que $(a + b)$ et $(c + d)$ sont disjoints (il y a trois paires de tels intervalles).

Pour résumer ces hypothèses, nous dirons que les autre éléments constituent une famille *libre.*

Ceci posé, ce qu'on a prouvé à l'aide de l'axiome P, s'exprime en disant : si a, b, c et d forment une famille libre, alors :

$$(a + (b + (c + d))) \subset (d + (a + (b + c))).$$

Mais l'hypothèse faisant jouer le même rôle aux quatre lettres, on peut réitérer et l'on a :

$$(d + (a + (b + c))) \subset (c + (d + (a + b)))$$

et :

$$(c + (d + (a + b))) \subset (b + (c + (d + a)))$$

enfin :

$$(b + (c + (d + a))) \subset (a + (b + (c + d)))$$

En rassemblant les quatre inclusions (relations transitives), on voit que :

$$(a + (b + (c + d))) = (b + (c + (d + a))) = (c + (d + (a + b))) = (d + (a + (b + c))).$$

On voit apparaître, comme dans le cas des triplets, des propriétés formelles d'associativité et commutativité, qui nous conduisent à la notation : $(a + b + c + d)$ sans autres parenthèses (et l'ordre est indifférent).

A titre d'exercice, le lecteur pourra montrer, par exemple, que :

$$((a + b) + (c + d)) = (a + b + c + d)$$

ce qui signifie que :

$$x \in (a + b), \qquad y \in (c + d) \qquad \text{et} \qquad w \in (x + b)$$

impliquent l'existence de u et v tels que : $x \in (a + u)$, $u \in (b + v)$, $v \in (c + d)$. Ainsi que la réciproque; et l'on vérifiera une fois encore, que l'hypothèse de liberté, telle qu'elle a été énoncée, est suffisante pour assurer l'applicabilité de l'axiome P.

Ainsi, à partir de l'opération : $a + b$ qui fait correspondre un ensemble à toute paire d'éléments on construira, par récurrence, les opérations :

$$a + b + c, \qquad a + b + c + d,$$

et ainsi de suite, qui font correspondre une partie de M à tout ensemble fini d'éléments.

L'axiome 1 signifiait que :

$$a + b = b + a.$$

L'axiome P permet de démontrer :

$$a + (b + c) = c + (a + b).$$

On en a déduit la commutativité et l'associativité généralisées.

Mais il faut noter que l'opération notée + n'est pas partout définie : dans les démonstrations qui ont été présentées ci-dessus, on a constamment utilisé la condition de *liberté*, qu'il faut maintenant examiner de plus près.

IV. — SIMPLEXES.

1. — On vient d'apercevoir, dans ce qui précède, comment à partir de la relation de médiation : « a entre b et c », ou« $a \in b + c$ », on pourrait définir, par récurrence, des ensembles :

$(a + b)$ ou intervalle,
$(a + b + c)$ ou intérieur d'un triangle,
$(a + b + c + d)$, et ainsi de suite.

Ce sont de tels ensembles que nous appellerons simplexes; on mettra même au premier rang, les ensembles d'un seul élément : (a).

Il s'agit donc d'une application qui fait correspondre une partie du médium à certains ensembles finis. Cet ensemble fini pourra être nommé le squelette du simplexe. Nous écrirons le squelette : S, et le simplexe : $(+ S)$.

Ou bien comme ci-dessus en explicitant les éléments du squelette : a, b, c..., le simplexe sera $(a + b + c + \ldots)$. Le rang sera le cardinal du squelette. Mais un squelette n'est pas un ensemble fini quelconque; il faut qu'il soit« libre ». Or, comme on l'a vu, la définition précise de la liberté fait intervenir la définition des simplexes : il s'agit donc d'une récurrence un peu compliquée. Essayons de diviser les difficultés.

2. — Fixons d'abord le but à atteindre, c'est-à-dire les propositions à démontrer :

1° Si l'ensemble S est libre toutes ses parties sont libres (sauf la partie vide bien sûr);

2° S est libre, si et seulement si il est fini et si S_1 et S_2 étant deux parties disjointes : $S_1 \cup S_2 \subset S$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, les simplexes $(+ S_1)$ et $(+ S_2)$ sont disjoints.

3° Avec les notations précédentes : si l'on désigne par x_1 (resp. x_2) un élément quelconque de $(+ S_1)$ (resp. de $(+ S_2)$), alors le simplexe $(x_1 + x_2)$ est une partie du simplexe $(+ S)$.

4° Si x est un élément quelconque du simplexe $(+ S)$ et si $S_1 \cup S_2$ désigne une partition du squelette S, il existe deux éléments x_1 et x_2 appartenant respectivement à $(+ S_1)$ et à $(+ S_2)$ et tels que x appartient au simplexe $(x_1 + x_2)$.

Remarquons encore ceci : au lieu de se borner aux partitions de S en deux classes, on pourrait énoncer 3° et 4° pour une partition quelconque de S. Le lecteur courageux le fera, sans trop de peine.

3. — Soit alors un médium M, c'est-à-dire un ensemble dans lequel aura été défini une relation de médiation, satisfaisant aux axiomes O, 1 et P (on n'aura pas besoin de l'axiome 2). Posons qu'un ensemble constitué par un seul élément x est un ensemble libre, et que le simplexe correspondant ne possède qu'un seul élément, à savoir x lui-même. Un ensemble à deux éléments est libre selon 2° si et seulement si les deux éléments sont disjoints.

On voit alors sans peine que les quatre propositions ci-dessus sont vérifiées lorsque le cardinal de l'ensemble S dont il est question est égal à 1 ou à 2.

Supposons alors, c'est l'*hypothèse* de la récurrence, que l'on ait vérifié ces quatre propositions pour : cardinal $< n$.

Soit alors S un ensemble de cardinal n. La proposition 2° permet de savoir s'il est libre ou non.

Lemme 1.

Soit un ensemble fini S. S'il est libre, si $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en est une partition, et si $x_i \in (+ S_i)$, alors x_1, x_2 et x_3 forment un triangle.

En effet : d'abord on ne peut avoir $x_i = x_j$ puisque selon la proposition 2° ci-dessus, $(+ S_i)$ et $(+ S_j)$ sont disjoints, le cardinal de $S_i \cup S_j$ étant inférieur à n.

Ensuite, selon la proposition 3° : $x_2 + x_3 \subset (+ S_2 \cup S_3)$, or S_1 d'une part et $S_2 \cup S_3$ sont disjoints, selon la proposition 2°, donc $x_1 \mathbin{\&} (x_2 + x_3)$; et de même pour les deux analogues.

Lemme 2.

Pour un ensemble libre S de cardinal n, choisissons une partition :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

2

Désignons par T l'ensemble des x tels qu'il existe u et v :

$$x \in (u + v), \qquad u \in (+ S_1), \qquad v \in (+ S_2 \cup S_3)$$

et par T′ l'ensemble des x tels qu'il existe p et q :

$$x \in (p + q), \qquad p \in (+ S_2), \qquad q \in (+ S_3 \cup S_1).$$

Alors on a :

$$T = T'.$$

En effet, soit x un élément de T :

$$x \in (u + v), \qquad \text{et} \qquad v \in (+ S_2 \cup S_3).$$

Alors selon l'hypothèse de la récurrence, la proposition 4° permet d'affirmer l'existence de $p \in (+ S_2)$ et $r \in (+ S_3)$ tels que $v \in (p + r)$. On a donc la situation :

$$\begin{array}{ccccc} p & — & v & — & r \\ & & | & & \\ & & x & & \\ & & | & & \\ & & u & & \end{array}$$

D'autre part, d'après le lemme 1, p, r, et u forment un triangle. Donc l'Axiome P s'applique ici.

Il existe :

$$q \in (r + u) \qquad \text{et} \qquad x \in (p + q).$$

Mais :

$$q \in (r + u), \qquad r \in (+ S_3) \qquad \text{et} \qquad u \in (+S_1)$$

impliquent — selon la proposition 3°, valable d'après l'hypothèse de récurrence — que l'on a :

$$q \in (+ S_3 \cup S_1).$$

Ce qui montre que : $x \in T'$. On a donc :

$$x \in T \Rightarrow x \in T'.$$

Le lemme est donc établi. C'est-à-dire : $T \subset T'$.

En continuant la permutation circulaire :

$$T \subset T' \subset T'' \subset T,$$

d'où :

$$T = T' = T''.$$

Corollaire du Lemme 2.

Pour toute partition $S = S_1 \cup S_2$, on construit l'ensemble des x tels qu'il existe x_1 et x_2 avec $x \in (x_1 + x_2)$, $x_1 \in (+ S_1)$ et $x_2 \in (+ S_2)$; cet ensemble qu'on notera $(S_1 + S_2)$ est le même, quelle que soit la partition.

Soient en effet deux partitions distinctes :

$$S_1' \cup S_2' = S_1'' \cup S_2''.$$

Déterminons :

$$S'_1 \cap S''_1 \qquad S'_1 \cap S''_2$$
$$S'_2 \cap S''_1 \qquad S'_2 \cap S''_2$$

De ces quatre ensembles, on voit aisément qu'il ne peut y en avoir deux qui soient vides. Si l'un est vide, mettons que ce soit :

$$S'_1 \cap S''_1 = \varnothing.$$

Posons alors :

$$S_1 = S'_1 \cap S''_2, \qquad S_2 = S'_2 \cap S''_2, \qquad S_3 = S''_1 \cap S'_2.$$

On se trouve alors dans les conditions du lemme, et de plus :

$$S_2 \cup S_3 = S'_2, \qquad S_1 = S'_1, \qquad S_1 \cup S_2 = S''_2, \qquad S_3 = S''_1.$$

Donc, selon le lemme :

$$(S'_1 + S'_2) = (S''_1 + S''_2).$$

Si aucun des quatre ensembles n'est vide, on les nommera S_1, S_2, S_3, S_4 et on notera qu'ils sont les classes d'une partition :

$$(S'_1 + S'_2) = (S_1 \cup S_2 + S_3 \cup S_4),$$

selon le lemme :

$$= (S_1 \cup S_2 \cup S_3 + S_4) = S_1 + (S_2 \cup S_3 \cup S_4)$$

et en réitérant :

$$= (S_1 \cup S_3 + S_2 \cup S_4) = (S'' + S''_2).$$

On peut alors pour tout squelette S de cardinal n, d'abord vérifier s'il est libre (proposition 2° : on est ramené à des cardinaux inférieurs à n), puis *définir* le simplexe $(+\, S)$ comme l'ensemble des x vérifiant $x \in (x_1 + x_2)$ avec $x_1 \in (+\, S_1)$ et $x_2 \in (+\, S_2)$. On a désigné par S_1 et S_2 les deux classes d'une partition de S.

Or selon le corollaire du lemme 2, cet ensemble $(+\, S)$ est le même, quelle que soit la partition : $S = S_1 \cup S_2$, ce qui vérifie les propositions 3° et 4° pour le cardinal n.

On peut donc énoncer :

Théorème.

Dans tout ensemble où l'on a établi une relation de médiation satisfaisant aux axiomes O, 1 et P on peut définir :

1° La classe des parties libres;

2° L'application qui à toute partie libre S fait correspondre un simplexe $(+\, S)$;

3° Pour toute partition de S :

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_i \cup \ldots \cup S_k$$

et tout élément x de $(+\, S)$ on peut choisir un élément x_i dans chacune des classes S_i de la partition, de telle sorte que x appartienne au simplexe :

$$(x_1 + x_2 \ldots + x_i + \ldots).$$

V. — L'AXIOME L.

A la fin de la section II ci-dessus, on a posé la question des axiomes propres à la structure de gamme et on a donné (p. 11) une réponse provisoire : il s'agissait en somme de dire ce qui se passe quand deux trios ont deux éléments communs.

Or, si un Médium accepte l'axiome 1, il n'est pas nécessaire de préciser les détails : c'est là un phénomène remarquable qu'il faut connaître.

Nous postulerons seulement : axiome L, si deux trios distincts : a, b, c et a, b, d ont deux éléments communs, alors : b, c, d, et a, c, d sont eux aussi des trios.

En d'autres termes, quand on prend quatre points distincts on peut avoir seulement :

— soit quatre triangles;
— soit un trio et trois triangles;
— soit quatre trios.

Avec les axiomes 0, 1, 2, 4, 5, P et L on peut alors démontrer :

— la proposition de l'axiome 3;
— l'unicité de l'élément dont P affirme l'existence;
— les diverses propositions énoncées page 12 ci-dessus,
et bien d'autres encore.

On donnera ici seulement quelques échantillons.

1. — *La figure de Ceva.*

L'axiome P peut s'énoncer ainsi :

si a, b et c forment un triangle,
si $x \in a + y$,
et si $y \in b + c$,
alors il existe un élément : $u \in a + b$, tel que $x \in u + c$.

Comme dans l'hypothèse b et c jouent le même rôle (axiome 1) on peut les permuter dans la conclusion et l'on a :

il existe un élément $v \in a + c$, tel que $x \in b + v$.

On a donc une configuration de sept points : a, b, c, y, u, v, x et six trios dont l'existence est assurée, à savoir :

a, x, y	b, y, c
c, x, u	a, u, b
b, x, v	a, v, c

On sait d'autre part, c'est l'hypothèse, que a, b, c est un triangle.

Les trois éléments d'un trio sont toujours distincts, par définition. Mais il est facile de voir que les sept points sont tous distincts : si par exemple, on avait $x = b$, cela signifierait que a, b, y est un trio. Mais comme b, c, y est un trio, on a deux trios ayant deux éléments communs, on peut appliquer l'axiome L et a, b, c serait un trio, ce qui n'est pas.

Avec sept points, on peut former trente-cinq triplets : on a des informations pour sept d'entre eux. Que dire des vingt-huit autres ?

Énumérons les trente-cinq triplets.

1 :	a	b	c					Triangle
2 :	a	b		x				
3 :	a	b			y			
4 :	a	b				u		Trio
5 :	a	b					v	
6 :	a		c	x				
7 :	a		c		y			
8 :	a		c			u		
9 :	a		c				v	Trio
10 :	a			x	y			Trio
11 :	a			x		u		
12 :	a			x			v	
13 :	a				y	u		
14 :	a				y		v	
15 :	a					u	v	
16 :		b	c	x				
17 :		b	c		y			Trio
18 :		b	c			u		
19 :		b	c				v	
20 :		b		x	y			
21 :		b		x		u		
22 :		b		x			v	Trio
23 :		b			y	u		
24 :		b			y		v	
25 :		b				u	v	
26 :			c	x	y			
27 :			c	x		u		Trio
28 :			c	x			v	
29 :			c		y	u		
30 :			c		y		v	
31 :			c			u	v	
32 :				x	y	u		
33 :				x	y		v	
34 :				x		u	v	
35 :					y	u	v	

Associons les triplets quatre par quatre de la manière que fait comprendre l'exemple suivant :

1 :	a	b	c	
3 :	a	b		y
7 :	a		c	y
17 :		b	c	y

On est dans le cas de l'axiome L.

Or 1 est triangle, 17 trio, donc 3 et 7 sont triangles.

De même, par l'association : 1, 4, 8, 18, on voit que 8 et 18 sont triangles. Et 1, 5, 9, 19 montrent la même chose pour 9 et 19. On a donc : 1, 3, 5, 7, 8, 18, 19 sont triangles.

En continuant le jeu combinatoire, on arrive à conclure qu'il n'y a pas d'autres trios que les six annoncés.

Ajoutons enfin, pour compléter encore l'axiome P, que l'axiome L permet de démontrer facilement que les points u et v, dont il est question ci-dessus, sont uniques.

2. — *Le problème de Sylvester.*

Les axiomes P et L prescrivent certains agencements de triangles et de trios : il en résulte, comme on vient de le voir pour la configuration de Ceva, qu'il ne peut y avoir trop de trios. Revenons alors sur ce qui a été dit de façon sommaire plus haut (p. 0).

En comparant Fano et Ceva, on voit que Fano est incompatible avec l'axiome L.

Mais il y a plus. Pour obtenir, avec un nombre fini de points, une configuration telle que toute paire appartienne à un trio, il n'y a pas (toujours en vertu de l'axiome L), d'autre solution que celle où tout triplet est un trio.

Prenons quatre points : a, b, c, d. Si toute paire appartient à un trio, il y a au moins quatre trios, soit, par exemple : abc, abd et acd. Donc bcd est un trio.

Avec cinq points : a, b, c, d, e il faut au moins quatre trios dont trois ont une paire commune, par exemple : abc, abd, abe et cde. Il en résulte encore que tout triplet est un trio.

Il est instructif de continuer l'analyse combinatoire, mais fastidieux.

On rencontre au passage les configurations de Steiner. On se contentera ici de donner quelques indications sur une démonstration générale.

On peut d'abord, au moyen des axiomes P et L, établir un lemme.

Lemme.

Soit un ensemble S d'éléments d'un médium, tel que toute paire appartient à un trio (au moins). Choisissons quatre éléments : a, b, c, d tels que bcd soit un trio, abc, abd, acd soient des triangles. S'il existe un élément x étranger à S, tel que :

1° $x \in b + d$, $\quad c \in b + x$;

2° a x t est un triangle si t appartient à S alors il existe un x' ayant les mêmes propriétés pour un autre trio b', c', d' et tel que $x' \in a + x$.

En réitérant l'application de ce lemme (facile à démontrer) on voit que S doit contenir une infinité d'éléments.

Pour établir l'existence de x nécessaire au fonctionnement du lemme, on s'appuiera sur les axiomes 4 et 5. Il en résulte finalement : dans un médium satisfaisant aux axiomes P et L, il ne peut y avoir d'ensemble fini où toute paire fait partie d'un trio.

C'est la propriété conjecturée en 1882 par Sylvester, dans le modèle constitué par la géométrie euclidienne.

3. — *Le théorème de Pasch.*

Lorsqu'on a voulu définir les simplexes, à partir de l'axiome P (ci-dessus p. 12), on a rencontré la condition de liberté. Quatre points a, b, c, d sont *liés* dans les deux cas signifiés par les schémas suivants :

```
        a —   -- b                          b
            |                               |
            c                        a —       — c
   (I)      |                               |          (II)
            d                               d
```

c'est-à-dire deux trios ayant un élément commun. Mais il y a un troisième cas de figure :

$$\begin{array}{ccccc} a & — & b & — & : \\ & & & & | \\ & & & & c \\ & & & & | \\ & & & & d \end{array}$$

(III)

En géométrie usuelle, Pasch avait remarqué que (III) implique (II), et il avait fait de cette proposition un axiome, plus tard utilisé par Hilbert. Or on peut montrer que cette proposition :

$$\text{(III)} \Rightarrow \text{(II)}$$

est une conséquence de P et L. (L'inverse n'étant pas vrai.)

Voici une esquisse de démonstration. o, a, b étant un triangle, supposons : $p \in o + a$ et $q \in o + b$. On va montrer qu'il existe : $u \in b + p$ tel que a, q, u soit un trio.

En vertu de l'axiome 4, on peut trouver h tel que : $o \in q + h$.

Comme on a : $p \in o + a$ et $o \in q + h$, il en résulte : $p \in q + h + a$ et il existe : $s \in a + q$ tel que $p \in h + s$.

On vérifie que : $s \in a + b + h$, et qu'il existe par conséquent : $t \in a + b$ tel que : $s \in h + t$. On en déduit : $s \in a + b + p$, d'où enfin l'existence de : $u \in b + p$ tel que : $s \in a + u$.

Comme : $s \in a + q$ et $s \in a + u$, on voit que a, q, u est un trio. En échangeant les rôles de a et b, on aura un trio b, p, v. Si on avait $u \neq v$, on en déduirait que a, b, p serait trio, ce qui est impossible.

Remarque sur l'énoncé de Pasch.

Pour l'énoncé de Peano, on a trouvé un algorithme commode :

$$x \in (a + b) + c \Rightarrow x \in a + (b + c).$$

On peut essayer la même chose ici.

Les hypothèses sont : $p \in o + a$ et $q \in o + b$.

On peut essayer d'écrire : $o \in (p — a)$ en notant $(p — a)$ ce qu'on a appelé rayon. Alors Pasch s'écrit :

$$a + (b — c) \subset (a + b) — c$$
$$a — (c — b) \subset (a + b) — c.$$

Mais on remarque tout de suite que le sens du signe d'inclusion ne peut être modifié. En comparant à la page 13 ci-dessus, on comprendra pourquoi l'axiome de Pasch est moins fort que celui de Peano.

4. — *Transitivités.*

Quelques indications sur la preuve de si : $p \in x + q$ et si $q \in p + y$, alors : $p \in x + y$.

Par l'axiome 5, il existe un point S tel que pqs soit triangle. On montre alors que pxs, pys, qxs et qys sont des triangles.

Ensuite par l'axiome 4, on peut choisir t tel que : $s \in p + t$. Facile de voir que t est distinct de tous les points déjà mentionnés et que xqt est un triangle. L'axiome P fournit alors :

$$u \in q + t, \; q \in p + y.$$

On a donc :

$$v \in p + t \quad \text{et} \quad u \in v + y$$

Comme vxy est un triangle on obtient derechef :

$$w \in x + y \quad \text{et} \quad s \in w + v.$$

On a alors deux trios : vsp et vsw. Si l'on avait $p \neq w$, pws serait trio. Ce n'est pas possible. Donc $p = w$ et par suite p est entre x et y comme il fallait démontrer.

5. — *Géométrie ?*

Peut-on atteindre la géométrie affine classique ? Si l'on a au moins trois dimensions (c'est-à-dire s'il existe des systèmes libres de cardinal quatre) on peut se dispenser de l'axiome de Desargues.

Mais il reste l'axiome d'Euclide dont on va dire quelques mots maintenant.

VI. — L'AXIOME E.

L'idée la plus commune, et peut-être la plus naïve, d'ANGLE, considère l'ensemble des points situés *entre* deux demi-droites issues d'un même sommet. Mais il faut préciser ce qu'on entend par « entre » et aussi ce qu'on entend par « demi-droites ». On va montrer ainsi que cette notion d'angle est mésologique.

On a défini les rayons : étant donné deux points distincts o et a, on considère l'ensemble des x tels que : $o \in a + x$.

On peut noter le rayon par (o — a) et écrire : $x \in (o - a)$.

Cet ensemble n'est jamais vide, selon l'axiome 4.

Si l'on a un troisième point b, formant un triangle oab, on définira de même le rayon (o — b).

Reste à savoir comment comprendre « entre les deux rayons ». Or il y a deux façons de voir, toutes deux également utiles.

1° On peut imaginer le balayage de l'angle par un rayon mobile. Cela conduit à prendre un point : $t \in a + b$, puis à envisager l'ensemble des rayons : (o — t). C'est-à-dire l'ensemble des points tel que : $o \in (u + t)$ ou bien : $u \in (o - t)$.

Ainsi à partir du triangle oab, on définit : E = ensemble des u tels qu'il existe un t avec : $t \in a + b$, $o \in u + t$.

On peut écrire : $E = o - (a + b)$.

2° Mais on peut aussi penser à prendre un point x sur le rayon (o — a) et un point y sur le rayon (o — b) et enfin l'ensemble des points de l'intervalle $(x + y)$. D'où un deuxième ensemble : F = ensemble des z tels qu'il existe x et y avec : $o \in a + x$, $o \in b + y$, $z \in x + y$. Ce qu'on peut noter : $F = (o - a) + (a - b)$.

Quelles relations peut-on affirmer entre E et F ?

Si l'on se borne aux axiomes déjà énoncés, on peut montrer que F est inclus dans E : $(o - a) + (o - b) \subset o - (a + b)$.

Mais c'est un privilège de la géométrie euclidienne que d'avoir l'inclusion inverse, et donc l'égalité.

On peut même montrer que l'on peut remplacer l'un quelconque des énoncés traditionnels du Postulat d'Euclide par : E : $(o - a) + (o - b) \supset o - (a + b)$.

La signification intuitive est claire : une configuration non-euclidienne est formée d'un angle (ensemble de rayons) et d'une droite (ou Gamme) toute entière contenue dans ledit angle.

Dans un médium donné, on pourra donc chercher à repérer les angles et droites non euclidiennes, s'il y en a.

Si l'on a affaire à un médium non euclidien, on pourra toujours recourir à l'artifice de Klein.

Modèles de Klein.

Prenons une géométrie (plane pour simplifier) affine sur un corps ordonné et de type euclidien. Et découpons y un domaine ouvert convexe K. Tout ce qui est hors de K n'existe plus : on obtient ainsi un modèle de géométrie affine non euclidienne. Si la frontière de K comporte des segments rectilignes, notre géométrie réduite présentera des angles euclidiens.

Enfin, on sait construire toutes les géométries affines de type euclidien : à partir d'un vectoriel sur un corps *ordonné*. Et l'on connaît tous les corps ordonnés ainsi que leurs relations avec celui des réels.

L'exploration est achevée.