MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. L. MEEK

Une nouvelle approche du scrutin transférable

Mathématiques et sciences humaines, tome 25 (1969), p. 13-23

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__25__13_0>

M.S.H. (7e année, n° 25, 1969, p. 13-23)

UNE NOUVELLE APPROCHE DU SCRUTIN TRANSFÉRABLE

par

B. L. MEEK *

Ce système de vote à représentation proportionnelle est utilisé couramment en Irlande, Scandinavie et en Australie. Dans le Royaume-Uni, il est souvent utilisé lors d'élections syndicales. Suivant ce mode de scrutin, les électeurs déposent un seul bulletin sur lequel ils ont inscrit les noms de candidats dans l'ordre de leur préférence décroissante ; ils peuvent inscrire autant de noms qu'ils veulent parmi ceux des candidats, et doivent en inscrire au moins un. Le dépouillement se fait suivant un processus de transfert de voix obtenues par un candidat.

Par exemple, A, B, C, D sont candidats et q est le quotient électoral ; le premier dépouillement donne le résultat suivant en ce qui concerne les candidats inscrits en première position sur les bulletins.

candidats	*A*	*B*	*C*	*D*
nombre de voix	a_1	b_1	c_1	d_1

si seul $c_1 > q$; *C est élu et on ventile* $c_1 - q$ *voix sur les bulletins portant C en première position. Ces* $c_1 - q$ *voix sont transférées suivant certaines règles sur le deuxième candidat de chaque bulletin de vote correspondant. C'est une chaîne de Markov, le calcul des coefficients (notés* r_i *ci-dessous) et l'étude des règles de transfert des voix fait l'objet de cet article.*

Matrice de passage du premier état au deuxième état

	A	*B*	*C*	*D*
A	*1*	*0*	$(c_1 - q)\, r_1$	*0*
B	*0*	*1*	$(c_1 - q)\, r_2$	*0*
C	*0*	*0*	q	*0*
O	*0*	*0*	$(c_1 - q)\, r_4$	*1*

État initial
a_1
b_1
b_1
1

On arrête le processus quand on atteint un état stationnaire.

N.D.L.R.

* Section de Mathématiques, Queen Elizabeth College, Londres.

ÉGALITÉ DE TRAITEMENT DES ÉLECTEURS ET TECHNIQUE A RÉTROACTION UTILISÉE POUR LE DÉPOUILLEMENT DES VOTES.

RÉSUMÉ.

Le système de scrutin multinominal transférable à un tour est examiné à la lumière de certaines conditions ; on montre, en particulier, que les méthodes actuelles de dépouillement du scrutin ne répondent pas à la condition suivant laquelle il devrait être, dans la mesure du possible, tenu compte équitablement des opinions de chaque électeur. Une méthode à rétroaction de dépouillement est décrite qui répond en fait à cette condition dans les limites générales imposées par le système de scrutin multinominal à un tour. Cette méthode de dépouillement, bien que très laborieuse si elle s'effectue à la main, serait applicable dans le cas d'élections automatisées.

1. — INTRODUCTION.

Alors que le système préférentiel connu sous le nom de scrutin multinominal transférable à un tour a été critiqué sur différents points, les avantages qu'on lui attribue et qui sont énumérés ci-dessous, ne semblent pas avoir été sérieusement contestés :

A) Le nombre de « voix perdues» (c'est-à-dire celles qui ne contribuent à l'élection d'aucun candidat) dans un scrutin est limité à un minimum.

B) Dans la mesure du possible, il est tenu compte des opinions de chaque électeur équitablement.

C) La tentation, pour un électeur, de voter de façon autre que suivant sa vraie préférence est minimale.

C'est le but de cet article et d'un prochain, d'examiner A), B) et C) du point de vue de la théorie de la décision (à l'intérieur d'une seule circonscription). Il y sera montré qu'en fait ces différents points ne sont pas vérifiés par les méthodes actuelles de scrutin à un tour transférable, mais qu'il est possible de le faire (au moins dans certaines limites) en modifiant, de façon appropriée, la méthode de dépouillement.

Le paragraphe suivant donne un aperçu du système de scrutin transférable à un tour. Ceux qui connaissent la méthode peuvent passer ce paragraphe ; le reste de l'exposé en est indépendant et là où il convient, les définitions, etc., sont répétées.

2. — LE SYSTÈME DU SCRUTIN TRANSFÉRABLE A UN TOUR.

Les règles pour la conduite d'un scrutin suivant la méthode du scrutin transférable à un tour, sont, schématiquement, les suivantes [1] :

1) L'élection a lieu afin de pourvoir un nombre (s) de sièges vacants. Les électeurs choisissent sur la liste des candidats, celui qu'ils préfèrent, et le marquent « 1 ». Ils peuvent, s'ils le désirent, indiquer d'autres noms, en les annotant par « 2 », « 3 », ... « n » ..., dans l'ordre de leurs préférences, avec $1 \leqslant n < s$ ou $1 \leqslant s < n$.

2) Quand le scrutin est clos, le total T de suffrages valables est déterminé et le quotient électoral q, soit le nombre de voix nécessaires à un candidat pour être élu, est calculé d'après la formule :

$$q = [T/(s + 1) + 1]$$

dans laquelle [ ] indique « partie entière de». (L'origine de cette formule est expliquée dans le paragraphe 3.)

1. On suppose une certaine connaissance du système de vote unique transférable. Pour une description complète, cf. E. Lakeman et J. Lambert : *Voting in Democracies* (Faber and Faber, 1955).

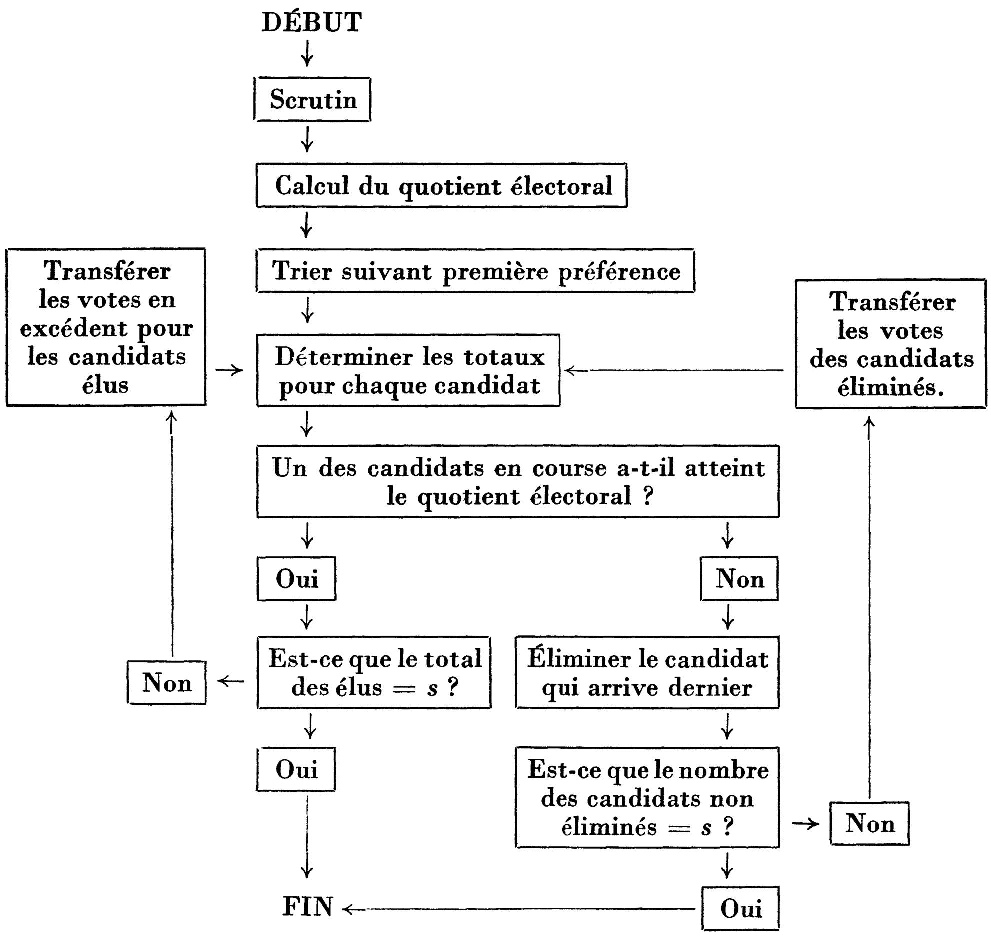
3) Les bulletins de votes sont triés suivant les préférences indiquées. Les voix reçues constituent pour chaque candidat son premier « lot ».

4) Chaque candidat qui, après avoir reçu son « lot », a atteint le quotient électoral, est déclaré élu. S'il n'existe pas de candidats dans ce cas, on applique alors la règle 6, sinon la règle 5.

5) Si le total des candidats élus égale alors s, l'élection est terminée. Autrement les voix en excédent[1], au-delà du quotient électoral, sont transférées du dernier lot reçu aux candidats encore en course (i.e. non élus et non éliminés) selon les préférences marquées suivantes (voir règles de transfert, ci-dessous). Ces voix transférées constituent le lot suivant pour chaque candidat en course ; la règle 4 est alors appliquée de nouveau.

6) Si aucun candidat n'a, après les derniers remaniements, atteint le quotient électoral, le candidat en course qui possède le plus petit nombre total de voix à ce stade est éliminé. Si le total de candidats non éliminés (i.e. élus ou en course) qui restent est maintenant s, l'élection est terminée ; autrement toutes les voix des candidats éliminés sont transférées aux candidats en course selon les préférences marquées suivantes (cf. règles de transfert) et la règle 4 est appliquée de nouveau.

Le système fondamental donné dans les règles ci-dessus peut se résumer dans le diagramme en flèches qui suit :



1. Les excédents sont transférés de chacun des candidats nouvellement déclarés élus, ceux qui ont les plus grands totaux, étant transférés les premiers. Les choses se compliquent si plus d'un candidat est élu à la fois et que le transfert de l'excédent de l'un entraîne l'élection d'autres candidats. Les règles couvrant de tels cas, ainsi que d'autres, tels que le cas de candidats à égalité de voix, sont omises ici pour des raisons de simplicité et sont sans rapport avec cet exposé.

Règles de transfert.

7) Lorsqu'il s'agit du transfert des voix, on ne tient compte que des préférences pour les candidats *en course*, celles des candidats élus ou éliminés sont négligées.

8) Si un bulletin de vote pour un candidat éliminé ne porte aucune préférence valable par la suite pour un candidat en course sa voix est mise de côté et ne prend plus aucune part à l'élection ; le total de telles voix est retenu à des fins de vérification.

9) Pour le transfert des voix enlevées à un candidat élu, on ne prend en considération que les bulletins de vote du dernier lot reçu. Ceux qui n'expriment pas de préférence valable par la suite pour un candidat en course sont gardés par le candidat élu. Si avec ces voix seules, il atteint le quotient électoral, toutes les autres voix sont transférées au candidat en course qui suit. Autrement, une proportion de ces voix, est transférée de telle façon que ce candidat conserve exactement le quotient électoral, celles qui sont choisies pour le transfert sont proportionnelles aux préférences suivantes indiquées pour chacun des candidats en course.

Règles du Sénat.

La principale variante des règles ci-dessus est la méthode connue sous le nom de « Règles du Sénat ». Dans ce cas, chaque vote, au stade 2 ci-dessus, est considéré comme partie d'un total (habituellement 100 ou 1 000) de voix fractionnaires, chaque bulletin ayant le même ordre de préférences. La règle 9 est alors appliquée en transférant la même proportion de chaque groupe de voix fractionnaires au lot intéressé.

3. — LE VOTE PERDU.

Un des traits caractéristiques d'une élection à vote unique transférable est le « quotient ». S'il existe s places vacantes à remplir, le quotient q est *le plus petit* nombre suivant lequel, si s candidats obtiennent q voix chacun, il n'est pas possible pour un autre candidat d'obtenir autant que q voix.

Ainsi donc, si le total des votants est T,

$$\mathrm{T} - s\,q < q,$$

mais

$$\mathrm{T} - s\,(q - 1) \geqslant q - 1$$

d'où

$$q = [1 + \mathrm{T}/(s + 1)]$$

dans lequel les crochets indiquent « partie entière de ».

Les candidats pourvus de plus de q voix sont élus, et le surplus de leurs voix est transféré dans l'ordre des préférences inscrites ; s'il n'y a pas de candidats dans ce cas, le candidat qui vient le dernier est éliminé et toutes ses voix sont transférées de la même manière. L'application répétée de ces règles assure qu'à la fin du comptage s candidats ont au moins q voix chacun et ainsi le nombre total de voix perdues W satisfait

$$W < \mathrm{T}/(s + 1).$$

Étant donné s et T, il est clair, d'après la définition de q, que la condition (A) est satisfaite à condition que les préférences suivantes, lors de chaque transfert, soient toujours données. Il est possible que l'inégalité ci-dessus, et de là, la condition (A), soient violées si W est augmenté par l'addition des voix qui ne sont pas transférables parce qu'il n'a pas été indiqué de préférence suivante. Dans cet article, nous supposerons que ce cas ne se produit pas ; il sera montré, dans un prochain article, qu'il est encore possible de remplir la condition (A), dans de tels cas, en modifiant la définition de q.

4. — ÉGALITÉ DE TRAITEMENT.

La discussion de la condition (A) montre que, en général, il y aura des voix perdues, sauf dans les cas négligeables où $\mathrm{T} < s$. Il n'est donc pas possible, dans le système du scrutin transférable à un tour, de garantir que l'on tiendra compte de toutes les voix également (par exemple, bulletins dont la première préférence va à un candidat encore en course), bien que l'on tienne compte de toutes indirectement en calculant le quotient[1].

Tout en acceptant cette restriction évidente, on a essayé d'éliminer certaines sources possibles d'inégalité de traitement en modifiant, de différentes façons, les règles de dépouillement.

De telles sources comprennent :

(i) Le choix des voix à transférer du total pour un candidat qui a dépassé le quotient ;

(ii) Erreurs introduites en faisant des approximations globales sur des fractions de totaux à transférer — en particulier dans des élections où les électeurs sont peu nombreux ;

(iii) Calcul de la proportion à transférer d'un candidat élu, en prenant pour base le dernier groupe de voix transférées à son compte, au lieu de prendre le total de ses voix.

Le moyen habituel de surmonter les difficultés (i) et (ii) est d'utiliser la variante de scrutin transférable à un tour, connue sous le nom de« Règles du Sénat» *(Senate Rules)*. Chaque voix est divisée en k parties (habituellement $k = 100$ ou 1 000) et chaque partie est traitée en tant que voix séparée (de valeur $1/k$) avec le même ordre de préférence. La difficulté (i) est surmontée en transférant la proportion correspondante de chaque voix divisée, tandis que la méthode réduit nettement les erreurs comprises dans (ii) à cause du facteur $1/k$: si $k = 10^n$ ceci aboutit simplement à n places décimales. Il suffit d'augmenter la valeur de k jusqu'à ce que les erreurs soient trop infimes pour affecter le résultat de l'élection[2]. La méthode revient à transférer toutes les voix avec une valeur convenablement réduite, et c'est cette interprétation que nous utiliserons dorénavant.

La difficulté (iii) est légèrement plus technique et demande plus d'explications. Supposons qu'à un stade quelconque, un candidat ait obtenu x ($< q$) voix. Par suite du transfert provenant d'un autre candidat (élu ou éliminé), il acquiert maintenant y voix de plus, avec $y > q - x$. Il est maintenant élu, et son surplus est $x + y - q = z$ par exemple. Il semblerait que ces voix $x + y$ dussent maintenant être transférées, avec une valeur réduite par le facteur $z/(x + y)$.

Il est cependant d'usage courant de ne transférer que les voix y, avec une valeur réduite par le facteur z/y. L'adoption de ce procédé s'explique par une raison simplement pratique, celle de vouloir réduire, dans un dépouillement manuel, la revérification des votes, autant que cela est possible. Cependant ni ceci ni l'argument probabiliste suivant lequel« il est peu vraisemblable que la différence affecte le résultat» n'ont particulièrement d'intérêt du point de vue de la théorie de la décision même si cette dernière déclaration est fondée. Cependant nous reparlerons du problème pratique du dépouillement dans le paragraphe 9.

Plus important ici est l'argument suivant :« dans le scrutin transférable à un tour, une voix ne compte que pour un candidat à la fois, et devrait compter comme première préférence là où cela est possible». Si l'argument était accepté, il s'ensuivrait aussi naturellement que les difficultés (i) et (ii) seraient mises hors de jeu et les« Règles du Sénat» deviendraient superflues. On utilise en fait quelquefois la première partie de cette déclaration comme « preuve » que le vote unique transférable remplit la condition (B). Mais même sans les« Règles du Sénat», la déclaration est fausse ; de quelque manière que soient choisies les voix en excédent pour le transfert, *c'est l'existence des voix qui ne sont pas transférées qui fait l'excédent des voix transférées*. Un vote ne compte pas seulement directement pour un seul candidat ; il peut affecter indirectement l'évolution du dépouillement, le réseau des transferts, et en dernier lieu, l'élection ou la non élection d'autres candidats[3]. Ceci explique pourquoi le scrutin transférable à un tour ne remplit pas la condition (B). Dans le cas particulier décrit ci-dessus, le candidat est élu non seulement à cause de l'addition de nouvelles voix y, mais à cause de l'existence des voix précédentes x ; d'où, pour que la condition (B) soit remplie, il faudrait que les voix $x + y$ soient transférées avec la valeur réduite appropriée.

---

1. C'est là néanmoins plus qu'on ne peut en dire des systèmes de vote habituellement utilisés, tels que le système à majorité simple.

2. Ceci ne peut, bien sûr, résoudre le cas de l'égalité exacte dans lequel on ne peut éviter de faire appel à une autre méthode de détermination — ne serait-ce que celle de pile ou face.

3. Maintenir, dans le contexte d'un système *transférable*, qu'une voix ne devrait pas, là ou cela est possible, être transférée, paraît contradictoire, surtout en raison des puissants arguments présentés par les partisans du scrutin unique non-transférable, dans lequel un électeur doit choisir un seul candidat parmi une liste de plusieurs, bien qu'on doive en élire plusieurs. Cf. Lakeman et Lambert, *op. cit.*

Cependant, il y a une difficulté, une quatrième, qui ne semble pas avoir été reconnue jusqu'à présent :

(iv) Quand on détermine à quel candidat une voix doit être transférée, *les candidats élus aussi bien que ceux qui sont éliminés sont ignorés.*

Supposons que, de y voix à transférer, $y/2$ aille au candidat A, et $y/2$ au candidat B. Supposons encore que A soit déjà élu ; dans le vote unique transférable les voix $y/2$, qui lui seraient autrement revenues, sont transférées au candidat qui vient ensuite sur la liste, puisqu'il n'en a pas besoin. Supposons que, dans chaque cas, celui-ci soit le candidat non élu C. Le résultat net est que B et C obtiennent chacun $y/2$ voix. L'injustice est évidente ; les voix en faveur de A, qui ont permis à $y/2$ voix de passer à C, n'ont eu mot à dire en ce qui concerne leur destination. De plus, C obtient ces voix avec la même valeur que celle avec laquelle B reçoit les siennes. Si ces voix ont été, à l'origine, des voix de première préférence pour D, qui est maintenant éliminé, ceux qui ont voté D, A, C... votent maintenant, en fait, totalement pour leur troisième choix, même si leur second choix est satisfait, tandis que ceux qui ont voté D, B... votent à valeur équivalente pour leur deuxième choix.

Dans le paragraphe 7, nous décrirons un mécanisme de dépouillement qui surmonte toutes ces difficultés.

5. — COMMENT TIRER LE MEILLEUR PARTI DE SON VOTE.

Tout système qui comprend des voix perdues comprend au moins une certaine tentation pour un électeur de voter sans suivre sa préférence. Une telle façon de voter peut aller du vote selon son deuxième choix pour éviter d'aboutir à une voix perdue au vote « sophistiqué » qui transforme l'existence de voix perdues en un avantage personnel. Un exemple dans le scrutin transférable à un tour joue comme suit :

$$(T = 239, s = 2, q = 80) :$$

Non sophistiqués.

Préférences :	C, A, B...	C, B, A...	B, A...	A, B...
Votes :	120	80	31	8

C et A élus.

Sophistiqués.

Préférences :	C, A, B...	D, B, A...	E, B, A...	B, A...	A, B...
Votes :	120	50	30	31	8

C et B élus.

L'exemple est plus compliqué qu'il n'a besoin de l'être pour montrer que les partisans de C et B peuvent arriver à leur but sans avoir à changer les positions de B et A sur leur liste de préférences.

Le problème ici, n'est pas tellement que le vote sophistiqué soit possible dans le scrutin unique transférable, mais bien de savoir si l'avantage qu'on peut en tirer est maintenu à son minimum, et si la tentation de voter différemment, pour un électeur qui veut voter selon ses convictions, est aussi réduite au minimum. L'argument (C) en faveur du vote unique transférable repose normalement sur le second point : du fait que les voix perdues sont maintenues à un minimum, l'électeur est conscient du fait que sa voix a moins de chances d'être perdue, et de plus, il est difficile pour un électeur d'être sûr (à tort ou à raison), que sa voix sera perdue car les voix perdues sont celles qui vont aux candidats suivants, qui sont non élus mais non éliminés — c'est-à-dire, aux candidats non élus *les plus forts et non les plus faibles.*

Cependant, il n'est pas vrai que l'avantage gagné en votant « sophistiqué » soit maintenu à un minimum. Pour qu'un vote sophistiqué réussisse, il faut bien sûr, avoir suffisamment d'information sur la façon dont les autres vont vraisemblablement voter, et il est possible de tirer parti des points décrits dans le paragraphe 4. (Le mécanisme de dépouillement « rétroactif », en répondant à la condition (B), élimine ceci, bien que le type plus fondamental de vote sophistiqué, comme ci-dessus, ne puisse être évité). Voici un exemple : ($T = 3\,599$, $s = 3$, $q = 900$) :

Première préférence :	A	B	C	D	E	F
Votes :	1 020	890	880	589	200	20

Dans le cas non sophistiqué, ci-dessus, l'excédent 120 de A se divise en 60 pour B, 20 pour C, 40 pour D, et A, B, C sont élus. Ceci comprend 170 électeurs dont les préférences sont A, D, C... Le vote sophistiqué pour ceux-ci est F, A, D, C... *afin d'empêcher A d'être élu au premier dépouillement*, si l'on sait que ceux qui ont voté pour E et F préfèrent C ou D à B ; il en est ainsi parce que F est éliminé, les 170 votes sophistiqués retournent à A, mais le surplus de 120 est maintenant entièrement tiré de ce groupe. Par l'élimination identique de E, B sera exclu, et A, C et D élus.

Qu'un vote sophistiqué du deuxième type soit possible dans le scrutin unique transférable semble être un résultat nouveau, bien que celui du premier type soit évidemment inhérent au système, et, comme cela est bien connu, puisse se trouver également dans d'autres systèmes de vote. Black[1], dans sa discussion sur le scrutin unique transférable, n'en parle pas ; il parle cependant de la possibilité d'une « minorité organisée faussant l'emploi du système », mais seulement dans le cas d'un candidat possédant tout juste le quotient d'après les premières préférences et qui est classé dernier par le reste des électeurs. Les partisans du scrutin unique transférable revendiqueraient que, si un candidat peut obtenir le quotient, ceci, *ipso facto*, lui donne le droit d'être élu, en particulier si ces votes sont des votes de première préférence, et il est certainement difficile de comprendre ce que Black entend par « fausser » dans ce contexte.

6. — AUTRES CONSIDÉRATIONS.

A ce stade nous mentionnerons quelques autres aspects du scrutin unique transférable, surtout pour limiter l'objet de cet article. Une discussion complète des points soulevés dans ce paragraphe fera l'objet d'un article ultérieur plus général.

Les conditions (A), (B), (C) discutées jusqu'à présent ont été choisies parce qu'elles semblent caractéristiques du scrutin unique transférable parmi les systèmes du type circonscription, dans les élections parlementaires. Cependant, on pourrait appliquer d'autres conditions, notamment celles que mentionne Arrow dans son ouvrage classique sur le sujet[2]. Comme les élections ou scrutin multinominal à un tour doivent pourvoir des sièges multiples, les préférences entre candidats classés par les électeurs ne représentent pas, telles qu'elles sont, un classement d'alternatives *indépendantes*, et l'analyse d'Arrow ne peut donc s'appliquer directement. Néanmoins, à un certain stade du dépouillement, le mode de scrutin revient à élire un seul candidat à un seul siège restant ; à ce stade on ne peut ignorer les conséquences du théorème.

Si l'on se sert des alternatives telles qu'elles sont, bien qu'elles ne soient pas indépendantes, il est clair que le scrutin multinominal à un tour remplit les conditions 1, 4 et 5, d'Arrow. La condition 3, indépendance vis-à-vis des alternatives non pertinentes n'est cependant pas remplie, comme le met en lumière le premier exemple du paragraphe 5. On montre de même, par le deuxième exemple de ce paragraphe, que la condition 2 : Association positive des valeurs sociales et individuelles, n'est pas remplie non plus.

Cependant, en théorie de la décision, l'argument le plus puissant contre ce mode de scrutin est différent, même s'il y a un rapport quelconque entre eux. Il s'agit du fait qu'un candidat peut être le deuxième choix de chaque électeur — c'est-à-dire : tous les électeurs veulent qu'il soit élu — sans pour cela être élu. Il ne nous semble pas qu'il soit possible de surmonter ceci à l'intérieur d'un système qui serait typiquement un système de scrutin « unique » transférable ; sans aucun doute, la méthode de dépouillement par rétroaction décrite dans la suite ne le fait pas. Il faudrait d'autres procédés de scrutin transférables généraux.

1. Duncan Black : *Theory of committees and Elections* (2nd edition, Cambridge, 1963, p. 80-83).
2. K. Arrow : *Social Choice and Individual Values* (2nd edition, Wiley, 1962).

Pratiquement toute autre discussion du scrutin multinominal transférable, aussi bien pour que contre, semble avoir été basée sur des considérations de politique et non de « théorie de la décision». Par exemple Black (*op. cit.*) discute effectivement ce système de ce qu'il appelle le point de vue « statique» mais, bien qu'il exprime un certain trouble au sujet de « l'hétérogénéité» comprise dans le mode de scrutin (principalement certaines voix comptent comme premières préférences, d'autres comme secondes préférences ou comme préférences suivantes), il n'approfondit pas le problème, et conclut : « En dépit de ces inconvénients, le vote unique transférable a de la valeur... Il n'est pas difficile de voir pourquoi beaucoup de gens, *le considérant purement comme un système statique*, l'apprécient» (italiques de Black). La phrase en italique sert à introduire d'autres arguments « dynamiques» contre le scrutin multinominal à un tour transférable[1]. Black ne discute pas les conditions mentionnées ici, bien que le mot « hétérogénéité» contienne en germe, l'idée d'injustice ; en fait, comme le montre le paragraphe 4, l'hétérogénéité de ce mode de scrutin est plus apparente que réelle, et la méthode rétroactive en élimine ce qui s'y trouve, le principe du transfert étant admis. Black ne mentionne pas non plus, ce qui est surprenant, le problème du « second choix de chacun», bien que ceci soit en rapport étroit avec ses doutes en ce qui concerne une « minorité organisée» (voir fin du paragraphe 5).

7. — LE PROCESSUS DE LA RÉTROACTION.

Une autre critique souvent faite au scrutin multinominal transférable à un tour est que les règles en sont trop compliquées, et ne découlent pas de principes qui puissent être exposés simplement. Comme on l'a montré plus haut, ceci n'est pas surprenant ; dans bien des cas, les règles ne sont guère plus que des règles établies empiriquement pour leur avantage pratique plutôt que pour leur valeur théorique.

Le processus rétroactif, cependant, découle de deux principes simples :

Principe 1 : Si un candidat est éliminé, tous les bulletins de vote sont traités *comme si ce candidat ne s'était pas présenté*[2].

Principe 2 : Si un candidat a obtenu le quotient, il conserve une proportion fixe de chaque voix reçue et transmet le reste au candidat non éliminé venant ensuite sur chaque bulletin *(qu'il soit élu ou non)*, la proportion étant telle que le total qu'il conserve soit égal au quotient.

Le principe 1 est celui qui conduit au mécanisme de la rétroaction. Car, à supposer qu'un électeur ait inscrit sur son bulletin de vote, A, B, C... et que A soit éliminé, le bulletin de vote, d'après le Principe 1, est dorénavant traité comme si on y lisait B, C... On suppose que si A ne s'était pas présenté du tout, l'électeur aurait inscrit les candidats dans le même ordre qu'avant et B aurait été sa première préférence[3]. Mais supposons qu'à un comptage précédent, B ait atteint le quotient. Ce bulletin de vote doit maintenant, être traité comme première préférence *d'origine* pour B ; autrement dit, une proportion identique de cette voix doit être *conservée par B* aussi bien que par les autres, suivant le Principe 2, le reste passant à C (au lieu d'avoir la voix *entière* passant à C comme précédemment). Cependant, ceci veut dire que le total conservé par B est maintenant plus grand que le quotient. Aussi la proportion des voix que doit conserver B doit être recalculée, et en fait baissera — en d'autres mots : il nous faut repartir au début, A étant maintenant éliminé. C'est ce qu'on appelle le processus de la rétroaction.

Il faut noter que la proportion des voix de B qui doit être transférée augmente par suite de cet accroissement de support ; les partisans de B jouent un rôle dans le transfert de l'excédent supplémentaire, puisque c'est de leur existence que provient le surplus. Toutes les voix en faveur de B sont maintenant traitées également, elles sont divisées proportionnellement, de façon à lui laisser exactement le quotient.

Nous considérerons maintenant l'effet du Principe 2. Il se peut que le transfert des voix de B amène un autre candidat, D, à être élu. Toutes les voix nouvelles et anciennes en faveur de D doivent maintenant être réparties, laissant D avec le quotient et transférant le reste au candidat suivant non éliminé. Il se peut que quelques bulletins de vote aient B, autre candidat élu, comme choix suivant.

---

1. On pourra trouver le cas « contre» dans Lakeman et Lambert, *op. cit.*
2. La ressemblance de ce principe avec la condition d'Arrow sur l'indépendance des alternatives non-pertinentes est évidente. Cependant, cette condition *n'est pas* remplie par le scrutin unique transférable, même avec la méthode de dépouillement rétroactif.
3. Cette hypothèse d'apparence innocente, n'est pas aussi inoffensive qu'elle le paraît. En discuter est hors du sujet dans cet article ; ceci sera compris, nous l'espérons, dans l'article ultérieur auquel il est fait allusion dans le paragraphe 6.

Auparavant seuls les candidats« en course» (les non éliminés *et non élus*) pouvaient recevoir des transferts. Maintenant ces voix sont considérées comme support additionnel pour B ; il acquiert la proportion qui lui est attribuée par D, *conserve la proportion qu'il garde de tout ce qu'il reçoit*, et transfère le reste — cette fois au *troisième* candidat inscrit (non éliminé). Auparavant, le troisième candidat aurait reçu la *totalité* de la proportion transférée par D (voir (iv), paragraphe 4).

On peut voir que B, une fois de plus, aura plus que le quotient s'il ne réduit pas de nouveau la proportion qu'il conserve. Cependant il se peut que la proportion accrue transférée aille en partie à D, qui devra donc réduire la proportion que *lui-même* conserve. Ceci se reportera sur B, et il est clair que nous avons une régression infinie. Cependant, il est également clair que les proportions à transférer ne vont pas s'accroître indéfiniment, étant donné qu'il n'y a qu'un surplus total limité à obtenir de B et D, qui doivent tous deux conserver un quotient. Le problème est en fait le problème mathématique de déterminer les proportions à conserver par chacun pour que tous deux conservent le quotient, en tenant compte de la taille du support mutuel. Si p_B est la proportion que transfère B, et p_D la proportion que transfère D, ceux qui ont voté à la fois B et D, peu importe dans quel ordre, ont leurs voix transférées à leur troisième préférence à la valeur $p_B\, p_D$. B conserve dans la proportion $(1 - p_B)$ les voix des électeurs qui l'ont mis en tête alors que D les reçoit dans la proportion $p_B\,(1 - p_D)$; de même D conserve dans la proportion $(1 - p_D)$ les voix de ceux qui l'ont mis en tête alors que B les reçoit dans la proportion $(1 - p_B)$.

Les formules suivantes sont établies pour les proportions à transférer dans le cas où 1, 2, 3 ou 4 candidats sont élus :

Un candidat.

$$t_1\,(1 - p_1) = q.$$

C'est la même formule que précédemment, mais t_1 comprend maintenant toutes les voix de première référence pour ce candidat, y compris celles qui proviennent de candidats éliminés qui d'après le Principe 1, sont maintenant ignorés. La proportion t_1 est recalculée chaque fois que t_1 est accru par suite de l'élimination d'un candidat.

Deux candidats.

Le premier candidat élu à t_1 voix de première préférence, dont t_{12} ont choisi le second candidat élu comme préférence suivante. D'où $p_1\, t_{12}$ de ces voix passent à ce candidat. Pareillement : $p_2\, t_{21}$ proviennent du second candidat. Ainsi :

$$(t_1 + p_2\, t_{21})\,(1 - p_1) = q$$

et

$$(t_2 + p_1\, t_{12})\,(1 - p_2) = q.$$

Trois candidats.

Les voix reçues par le candidat 1 sont maintenant : sa première préférence t_1, seconde préférence $p_2\, t_{21}$ provenant du candidat 2 et $p_3\, t_{31}$ provenant du candidat 3, et, troisièmement préférence $p_2\,(p_3\, t_{321})$ provenant du candidat 3 (premier), 2 (second), et $p_3\,(p_2\, t_{321})$ provenant du candidat 2 (premier), 3 (second). On a ainsi :

$$[t_1 + p_2\, t_{21} + p_3\, t_{31} + p_2\, p_3\,(t_{321} + t_{231})]\,(1 - p_1) = q$$

et les deux formules obtenues par permutation cyclique des indices.

Quatre candidats.

La première formule est maintenant :

$$[t_1 + \Sigma\, p_i\, t_{i1} + \Sigma'\, p_i\, p_j\, t_{ij1} + p_2\, p_3\, p_4\, \Sigma''\, t_{(234)1}]\,(1 - p_1) = q$$

dans laquelle Σ indique l'addition sur $i = 2, 3, 4$; Σ' l'addition sur $i, j = 2, 3, 4$ pour $i \neq j$; Σ'' l'addition sur toutes les permutations de (234). Il y a trois formules semblables.

L'extension de ces formules à tout nombre de candidats se fait sans difficulté. A noter que :

(i) Les formules pour n candidats peuvent être réduites aux formules s'appliquant à $n - 1$ candidats en éliminant l'équation même et en mettant $p_n = 0$ dans les autres.

(ii) La rétroaction n'est pas nécessaire lors de l'élimination d'un candidat si aucun des totaux ou sous-totaux dans les formules utilisées à ce stade ne sont changés par suite de cette élimination.

8. — CALCUL DES PROPORTIONS.

On peut voir que l'une des difficultés propre au système de la rétroaction provient de la nécessité de calculer les proportions à transférer. Cependant, grâce à un procédé itératif simple, ceci peut se faire jusqu'au degré d'exactitude voulu. Prenons, comme exemple, le plus simple, le cas de deux candidats élus : l'application à un plus grand nombre de candidats se fait sans difficulté.

Les équations à résoudre, comme dans le paragraphe 7, sont :

$$(t_1 + p_2\, t_{21})\,(1 - p_1) = q \qquad (1)$$

$$(t_2 + p_1\, t_{12})\,(1 - p_2) = q \qquad (2).$$

Dans ces équations, seuls les p_i sont inconnus. Supposons que nous prenions une valeur imaginaire de p_2 qui soit trop basse ; $(1 - p_1)$ sera alors trop grand dans l'équation (1), c'est-à-dire que p_1 sera aussi trop petit. Si nous substituons ceci dans l'équation (2), nous aurons pareillement une nouvelle valeur de p qui sera encore trop basse.

Le total des voix pour les deux candidats est $t_1 + t_2$; pour que tous deux soient élus, il faut que $t_1 + t_2 > 2\,q$. Supposons que cette stricte inégalité s'applique : dans un cas non trivial t_{12}, t_{21} sont tous deux différents de zéro. De plus, de t_1 et t_2, il y en a au moins un qui est plus grand que q ; soit $t_1 > q$. Si nous mettons $p_2 = 0$ dans (1), nous pouvons résoudre p_1, en donnant une valeur pour $p_1 > 0$. Ce p_1 est la proportion à transférer si le candidat 1 était le seul candidat élu ; ainsi *avec cette valeur* on aura $t_2 + p_1\, t_{12} \leqslant q$, sinon le candidat n'aura pas, à ce stade, atteint le quotient. Si l'inégalité s'applique, le candidat 2 n'atteint que tout juste le quotient, ainsi, d'après (2), $p_2 = 0$; et les équations sont ainsi résolues.

Si la stricte inégalité s'applique, nous obtenons une valeur de $p_2 > 0$, ce qui est insuffisant. Substituons de nouveau dans (1) et nous obtenons une *augmentation* du coefficient de $(1 - p_1)$, d'où une *augmentation de* p_1 ; la nouvelle valeur de p_1 est ainsi augmentée, mais elle est encore trop basse. Si l'on substitue cette nouvelle valeur dans (2), on obtient de même une valeur de p_2 augmentée mais trop basse. Ainsi le processus itératif donne des suites monotones croissantes des valeurs de p_1, p_2 qui tendent vers des limites qui sont les solutions des équations. Lorsque l'itération conduit à des valeurs successives égales à la précision requise près, celles-ci sont prises pour solution approchée. Il se peut que les valeurs approchées soient légèrement inférieures aux valeurs exactes, mais cela est nécessaire, car autrement une trop grande partie du support allant au candidat en question serait transférée et il lui resterait moins que le quotient. (Arrondir les calculs est donc recommandé.) On peut facilement démontrer le procédé dans le cas restrictif où $t_1 + t_2 = 2\,q$.

Il est clair que le succès de cette procédure itérative dépend du fait que toutes les quantités — coefficients de $(1 - p_i)$ dans chaque équation — sont non-négatives, clair aussi qu'elle sera efficace pour tout nombre d'équations pourvu qu'elles soient résolues dans l'ordre d'élection, cette condition étant nécessaire pour éviter les valeurs négatives de p_i. Puisque le procédé de comptage ne peut qu'augmenter les totaux de support pour les candidats élus, il est clair aussi que le p_1 pour ces candidats ne peut que croître au fur et à mesure du dépouillement[1] ; ainsi donc il n'y a aucun risque à prendre comme valeurs initiales de p_i celles qui ont été obtenues à un stade précédent, en posant initialement $p_1 = 0$ pour les candidats nouvellement élus seulement. (Comme on l'a mentionné plus haut, les équations se réduisent alors à celles du stade précédent et ainsi les approximations précédentes doivent former de bonnes valeurs initiales.)

1. Il n'est pas difficile de voir que la condition (2) d'Arrow de l'association positive des valeurs sociales et individuelles, est satisfaite dans le cas d'alternatives non indépendantes par la méthode du dépouillement rétroactif.

On peut montrer par une analyse de premier ordre assez simple que le taux de convergence du processus itératif a de fortes chances d'être satisfaisant lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : à savoir que les vraies p_i sont petites, et que les totaux croisés t_{ij}, etc., sont aussi élevés que possible. Même le cas où ces conditions sont remplies ne devrait causer aucune difficulté, puisqu'on peut détecter d'avance l'occurence d'une convergence lente et en tenir compte, tandis qu'à un stade plus avancé du dépouillement, quelques-unes au moins des valeurs p_i ont des chances de croître suffisamment pour accélérer la convergence jusqu'à ce qu'on arrive à un degré satisfaisant.

9. — CONCLUSION.

Il est évident, même sans que nous l'ayons vraiment démontré par un exemple précis, que le procédé de la rétroaction est une méthode beaucoup plus laborieuse d'arriver à un résultat qu'aucune autre utilisée à présent ; dans une élection à grande échelle, avec des milliers de bulletins de vote à examiner, ce serait vraiment un procédé très long. Cependant, même les méthodes actuelles de scrutin multinominal à un tour avec transfert sont suffisamment longues pour que l'utilisation de machines à calculer dans le dépouillement[1] vaille la peine d'être essayé, et, dans ce cas, la méthode de la rétroaction ne présente aucun problème.

On peut objecter que les résultats réels de n'importe quelle élection seraient différents si rarement, que cette complication supplémentaire est superflue. C'est là une question qui prête à discussion ou mieux, pourrait conduire à d'autres recherches, tandis que la question de savoir quel taux de probabilité pourrait être considéré comme tolérable est encore un autre sujet de discussion. La méthode a été mise à l'épreuve dans deux cas, une fois en utilisant des chiffres obtenus quasi au hasard, et une fois dans une élection réelle, faite selon ce mode de scrutin. Dans les deux cas, il y a eu des différences dans les candidats élus[2]. Etant donné que les partisans du scrutin multinominal à un tour avec transfert mettent un tel accent sur le critère de l'égalité de traitement (condition (B)), il semblerait que, dans les élections automatisées, la méthode de la rétroaction vaille la peine d'être utilisée.

En résumé, la méthode de la rétroaction répond à la condition « égalité de traitement », sous réserve des restrictions imposées par la structure de base du vote unique transférable, c'est-à-dire : minimum théorique de votes perdus, et élimination de candidats. Il y a une autre restriction qui n'a pas encore été discutée, celle que s'imposent les électeurs eux-mêmes s'ils tirent parti de la possibilité qu'offre ce mode de scrutin de classer quelques-uns seulement au lieu de tous, les candidats par ordre de préférence. Les implications de ce fait ainsi qu'une extension de la méthode de rétroaction pour en tenir compte, seront traités dans un article ultérieur[3].

21 février 1968.

1. Pour une étude générale sur la praticabilité, voir P. Dean et B. L. Meek : *The automation of voting systems* (Data and Control Systems ; Part I : Analysis, January 1967, p. 16 ; Part II : Implementation, February 1967, p. 22), et B. L. Meek : *Electronic Voting by 1975 ?* (Data Systems, July 1967, p. 12). — Les données du second article se rapportent au Royaume-Uni. Pour une description de l'usage actuel des ordinateurs dans des élections par scrutin unique transférable aux États-Unis, voir W. L. Pragnell : Computers and Conventions (*The living church*, 20th August 1967, p. 12).

2. Pour des raisons évidentes, le travail sur l'élection réelle ne peut être publié.

3. Ces articles sont le résultat d'un problème soumis par Miss Enid Lakeman, Director of Electoral Reform Society, London, que l'auteur remercie ici pour les encouragements prodigués au cours de son travail. L'auteur remercie aussi le professeur W. B. Bonnor, Mr. Robert Cassen, Mr. Peter Dean, Mr. Michael Steed et le professeur Gordon Tullock, pour leurs fructueuses suggestions et Mme F. Smelling, pour sa traduction.