

B. MONJARDET

Combinatoire et algèbre

Mathématiques et sciences humaines, tome 23 (1968), p. 37-50

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__23__37_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMBINATOIRE ET ALGÈBRE

par

B. MONJARDET

IV PLANS EN BLOCS, CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES PLANES *

INTRODUCTION.

Au paragraphe 2, nous étudions les « plans en blocs », c'est-à-dire certains « systèmes de parties » que les statisticiens ont eu à considérer pour des plans d'expériences ; au paragraphe 3 nous étudions des « configurations géométriques régulières planes » qui peuvent être considérées comme des cas particuliers de plans en blocs mais dont certaines remontent à des problèmes géométriques beaucoup plus anciens. On peut situer les plans en blocs et les configurations géométriques à l'intérieur d'une notion plus générale celle de « système d'incidence » ; nous ne faisons aucun exposé théorique de cette notion mais au paragraphe 1 nous donnons quelques définitions et exemples dans le cas, suffisant par la suite, où le système d'incidence se réduit à une correspondance entre deux ensembles finis.

1. — SYSTÈME D'INCIDENCE.

1.1. — Définitions. Notations.

Dans cet article un système d'incidence fini S sera un triplet $S = (E, F, K)$ où E et F sont deux ensembles finis et K une correspondance entre ces deux ensembles ; K est donc une partie du produit cartésien de E et F : $K \subset E \times F$.

Soient $x \in E, y \in F$; si $(x, y) \in K$, on dit que x et y sont en correspondance ou encore sont incidents ; au lieu du mot correspondance, on emploie aussi le mot relation binaire ; en particulier, si les ensembles E et F sont identiques, K est une relation binaire sur l'ensemble E . Remarquons que si certains auteurs (tel Berge) appellent alors graphe le couple $S = (E, K)$, d'autres (tel Bourbaki) appellent graphe l'ensemble K des couples en relation.

1.2. — Système réciproque.

A toute correspondance K entre E et F est associée la correspondance K' entre F et E , dite correspondance réciproque (ou duale, ou inverse) définie ainsi :

$$y \in F, x \in E, (y, x) \in K' \Leftrightarrow (x, y) \in K$$

Si $S = (E, F, K)$, on appellera système réciproque ou dual le système $S' = (F, E, K')$. Le système réciproque de S' est évidemment S .

1.3. — Tableau d'incidence.

A tout système d'incidence $S = (E, F, K)$, on associe le tableau d'incidence M_S du système.

* Les dessins ont été réalisés par C. Havas du C.M.S.

Soient $E = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$,

$F = \{y_1, \dots, y_j, \dots, y_b\}$; M_S a n lignes et b colonnes et l'élément a_{ij} , de la i^e ligne et j^e colonne, est défini par :

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (x_i, y_j) \in K,$$

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow (x_i, y_j) \notin K.$$

Le tableau d'incidence $M_{S'}$ associé au système réciproque S' de S n'est autre que le tableau « transposé » (échange des lignes et des colonnes) de M_S : $M_{S'} = (M_S)^t$.

1.4. — Exemples.

Exemple 1 : $E = \{a, b, c, d, e, f\}$; $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$; $K = \{(a, \alpha), (a, \beta), (b, \alpha), (b, \delta), (c, \alpha), (c, \gamma), (d, \gamma), (d, \delta), (e, \beta), (e, \gamma), (f, \beta), (f, \delta)\}$.

$$\begin{array}{c}
 \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \\
 \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 M_S
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \\
 \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 M_{S'}
 \end{array}$$

Exemple 2 : $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
 $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \\
 \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{array} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 M_S
 \end{array}$$

On remarque que ce tableau d'incidence est symétrique.

1.5. — Système d'incidence et système de parties.

Un système de parties est un couple $\Sigma = (E, \mathcal{F})$ où E est un ensemble fini : $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ et \mathcal{F} un ensemble de parties distinctes de E , $\mathcal{F} = \{B_1, \dots, B_j, \dots, B_b$, avec $B_j \subset E\}$. On définit une correspondance K entre E et \mathcal{F} en posant :

$$(x_i, B_j) \in K \Leftrightarrow x_i \in B_j$$

on obtient ainsi le système d'incidence $S_\Sigma = (E, \mathcal{F}, K)$ d'où un tableau d'incidence et un système réciproque. Inversement, soit un système d'incidence $S = (E, F, K)$: nous laissons au lecteur le soin de considérer quel système de parties Σ_S , on peut associer à ce système ; le lecteur pourra aussi se demander à quelles conditions l'étude d'un système d'incidence est « équivalente » à celle d'un système de parties déduit du système d'incidence. Lorsque cette équivalence existe, on peut employer indifféremment le langage d'incidence ou le langage ensembliste ; c'est par exemple, le cas pour les configurations géométriques étudiées au paragraphe 3.

2. — SYSTÈME DE PARTIES. PLANS EN BLOCS.

2.1. — Généralités. Description cardinale.

Soit le système $S = (E, \mathcal{F})$ où E est l'ensemble $\{x_1, \dots, x_l, \dots, x_m, \dots, x_n\}$ et \mathcal{F} un ensemble de parties distinctes de $E = \{B_1, \dots, B_l, \dots, B_j, \dots, B_b\}$.

Le système réciproque est alors $S' = (F, \mathcal{G})$ avec $F = \mathcal{F}$; \mathcal{G} ensemble de parties de $F : \{\mathcal{F}_{x_1}, \dots, \mathcal{F}_{x_2}, \dots, \mathcal{F}_{x_n}\}$ avec $\mathcal{F}_x = \{B \in \mathcal{F} : x \in B\}$; on supposera toutes les parties \mathcal{F}_x distinctes.

On pose :

$$\begin{aligned} |E| &= n & |\mathcal{F}| &= b \\ |B_i| &= k_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}, & |\mathcal{F}_{x_l}| &= r_l, \quad l \in \{1, \dots, b\} \\ |B_i \cap B_j| &= \mu_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\} & |\mathcal{F}_{x_l} \cap \mathcal{F}_{x_m}| &= \lambda_{lm}, \quad l, m \in \{1, \dots, b\}. \end{aligned}$$

Les paramètres $n, b, k_i, r_l, \mu_{ij}, \lambda_{lm}$ constituent une « description cardinale » du système S (ne caractérisant pas ce système en général). Cette description pourrait d'ailleurs être prolongée en considérant d'autres paramètres tels que :

$$\mu_{ijk} = |B_i \cap B_j \cap B_k| \text{ etc..}$$

Certains de ces systèmes ont été intensivement étudiés en statistique pour des besoins de plans d'expériences ; dans ce contexte on leur a donné le nom de « plans en blocs ». En général, pour les plans en blocs on a :

$$k_i = k, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad r_l = r, \quad \forall l \in \{1, \dots, b\}$$

autrement dit chaque partie B_i , ou « bloc » contient le même nombre d'éléments (ou « variétés » en statistique) et chaque variété est contenue dans le même nombre de blocs.

A un plan en bloc $S = (E, \mathcal{F})$ correspond le plan réciproque $S' = (F, \mathcal{G})$ appelé souvent plan dual ou inverse ; les paramètres de S' sont donc :

$$n' = b, \quad b' = n, \quad k' = r, \quad r' = k, \quad \mu'_{ij} = \lambda_{ij}, \quad \lambda'_{lm} = \mu_{lm}.$$

Au plan S est associé le tableau d'incidence M_S ; au plan S' le tableau transposé $(M_S)'$.

Exemple :

Le système d'incidence défini au paragraphe 1.3 (exemple 1), constitue un plan en blocs avec :

$$n = 6, \quad b = 4, \quad k = 3, \quad r = 2, \quad \mu = 1, \quad \lambda = 0 \text{ ou } 1.$$

Que peut-on dire du plan dual ?

Pour l'exemple 2 :

$$n = b = 9, \quad k = r = 3, \quad \lambda \text{ et } \mu \in \{0, 1\}.$$

Les paramètres d'un plan en blocs sont liés par certaines relations.

Exercice 20 :

Montrer que dans un plan en blocs, avec k et r constants, on a :

$$nr = bk \tag{1}$$

$$\sum_{j \neq i_0} \mu_{i_0 j} = k(r - 1), \quad \text{pour tout } i_0 \in \{1, \dots, b\} \tag{2}$$

$$\sum_{m \neq l_0} \lambda_{l_0 m} = r(k - 1), \quad \text{pour tout } l_0 \in \{1, \dots, n\} \tag{3}$$

En déduire les relations :

$$\sum_{i < j \in \{1, \dots, b\}} \mu_{ij} = n \binom{b}{2} \quad (4)$$

$$\sum_{l < m \in \{1, \dots, n\}} \lambda_{lm} = b \binom{k}{2} \quad (5)$$

2.2. — Plans en blocs incomplets équilibrés.

Les premiers plans en blocs étudiés, dans les années quarante, avaient une particularité supplémentaire : le paramètre λ_{lm} était une constante λ . De tels plans ont été appelés plans en blocs incomplets équilibrés (P.B.I.E.), ou encore, par certains auteurs, (b, n, r, k, λ) -configuration. La relation (3) de l'exercice 20 devient alors :

$$r(k-1) = \lambda(n-1).$$

D'autre part de λ constant, on déduit facilement $b \geq n$ (dualement, si μ est constant, on a : $n \geq b$).

Si $b = n$, le plan est dit symétrique ; on a alors d'après (1), $r = k$; on montre aussi que μ est alors constant et donc égal à λ ; un tel plan est identique à son plan dual. En particulier, si $\mu = \lambda = 1$, le système obtenu n'est autre qu'un plan projectif d'ordre $k-1$ (vérifier cette assertion).

Exercice 21 :

Soit un P.B.I.E. symétrique de paramètre n, r, λ ; montrer que le système obtenu en supprimant un bloc et les éléments qu'il contient est encore un P.B.I.E. (calculer les paramètres du système). Ce plan est dit plan résiduel du plan symétrique initial ; en particulier, le résiduel d'un plan projectif n'est autre que le plan affine correspondant.

Exemple :

La G P (2, K_3) est un P.B.I.E. symétrique avec $n = b = 13$; $k = r = 4$; $\lambda = \mu = 1$.

La G A (2, K_3) associée est un P.B.I.E. avec $n = 9, b = 12, k = 3, r = 4, \lambda = 1, \mu \in \{1, 0\}$.

Le système d'incidence de l'exemple 1 (1.3) n'est autre que la G A (2, K_2).

Remarque :

Le plan en blocs dual d'un plan équilibré est un plan avec $\mu = C^te$; de tels plans ont été appelés plans liés (P.B.I.L.).

2.3. — Plans en blocs incomplets partiellement équilibrés.

Les besoins des statisticiens ont amené à définir des plans en blocs plus généraux que les précédents ; ce sont les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (P.B.I.P.E.), introduits en 1939, mais étudiés surtout à partir des années cinquante ; pour ces plans le paramètre λ n'est plus constant.

Soit (E, \mathcal{F}) un plan en blocs où le paramètre λ n'est pas constant ; λ prend m valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_m$; on peut définir sur l'ensemble E , m relations binaires $(R_1, \dots, R_i, \dots, R_m)$ en posant :

$$(x, y) \in R_i \Leftrightarrow \lambda_{xy} = |\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y| = \lambda_i$$

R_i est dite i^e relation d'association et si $(x, y) \in R_i$, on dit que x et y sont i^e associés. Il est clair que les relations R_i sont symétriques et qu'avec la relation d'égalité elles partitionnent l'ensemble $E \times E$ des couples de variétés :

$$E \times E = R_1 \cup \dots \cup R_i \cup \dots \cup R_m \cup \{(x, x), x \in E\} \quad (1)$$

$$R_i \cap R_j = \emptyset, R_i \text{ symétrique.}$$

Le plan en bloc sera dit partiellement équilibré si les relations R_i vérifient les conditions supplémentaires suivantes :

$$\forall x \in E, \forall i \in \{ 1, \dots, m \}, | R_i(x) | \quad (2)$$

nombre des éléments i^e associés à x , est une constante n_i ne dépendant que de la relation R_i .

$$\forall (x, y) \in R_i, \forall i \in \{ 1, \dots, m \} \quad | R_j(x) \cap R_k(y) | \quad (3)$$

nombre d'éléments j^e associés de x et k^e associés de y , est une constante p_i^{jk} ne dépendant que de i, j, k .

(Les conditions précédentes ne sont pas indépendantes et peuvent donc être réduites ; par exemple (2) est conséquence des autres.)

Lorsque les conditions précédentes sont vérifiées on dit qu'on a un P.B.I.P.E. à m classes associées ; on appelle *schéma d'association à m classes* la donnée de m relations R_i vérifiant les conditions (1) à (3). On va considérer uniquement le cas particulier où $m = 2$.

Remarque 1 : Deux plans en blocs différents peuvent avoir le même schéma d'association.

Remarque 2 : Par dualité, pour un plan en bloc avec le paramètre μ non constant, on pourrait définir un schéma d'association sur l'ensemble des blocs.

Remarque 3 : On peut représenter matriciellement le schéma d'association par une matrice carrée L à n lignes et n colonnes ; les n lignes et colonnes représentent les éléments de E , et à l'intersection de la ligne x et de la colonne y , on écrit la valeur de λ_{xy} . On a d'ailleurs, si M_S et $M_{S'}$ sont les matrices d'incidence du plan et du plan réciproque, $L = M_S \cdot M_{S'}$. (A quoi est égal $M_{S'} \cdot M_S$?)

2.4. — Plans en blocs incomplets partiellement équilibrés, à deux classes associées.

Soit $S = (E, \mathcal{F})$ un tel plan ; le schéma d'association est donné par deux relations symétriques R_1 et R_2 telles que :

$$E \times E = R_1 \cup R_2 \cup \{ (x, x) \}, R_1 \cap R_2 = \emptyset \quad (1)$$

(il suffit donc de se donner une relation symétrique, l'autre s'en déduisant immédiatement).

$$\forall x \in E, | R_1(x) | = n_1, | R_2(x) | = n_2 \quad (2)$$

avec :

$$n_1 + n_2 = n - 1$$

$$\forall (x, y) \in R_1 \quad (3)$$

$$| R_1(x) \cap R_1(y) | = p_{11}^1 \quad | R_2(x) \cap R_2(y) | = p_{22}^1$$

$$| R_1(x) \cap R_2(y) | = | R_2(x) \cap R_1(y) | = p_{12}^1 = p_{21}^1$$

et de même si $(x, y) \in R_2$.

D'autre part si x et y sont premiers associés $((x, y) \in R_1)$ on a $\lambda_{xy} = \lambda_1$; si x et y sont seconds associés $((x, y) \in R_2)$, $\lambda_{xy} = \lambda_2$.

On écrit généralement les paramètres p sous forme matricielle : d'où les matrices d'association.

$$P^1 = \begin{pmatrix} p_{11}^1 & p_{12}^1 \\ p_{21}^1 & p_{22}^1 \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{12}^2 \\ p_{21}^2 & p_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Une classification de ces P.B.I.P.E., à deux classes associées a été donnée en 1952 par Bose et Shimamoto qui distinguent quatre types de tels plans. Le type le plus étudié est celui « divisible en groupes » (D G), dans ce cas les éléments de E peuvent être rangés dans un tableau de côtés s et m ; un élément est premier associé avec les $s - 1$ autres éléments de sa ligne, deuxième associé avec les $s(m - 1)$ autres éléments ; autrement dit la relation R_1 est une équivalence dont les classes sont les lignes du tableau.

Exercice 23 :

Montrer que dans le cas précédent on a comme paramètres du schéma d'association :

$$n = s \cdot m, \quad n_1 = s - 1, \quad n_2 = s(m - 1),$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} s - 2 & 0 \\ 0 & s(m - 1) \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & s - 1 \\ s - 1 & s(m - 1) \end{pmatrix}$$

Si $b \geq n - m + r$, le plan est dit S.R.D.G. (« semi-régulier divisible en groupes »). On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que $b = n - m + r$ est $\mu = \text{cte} = k + \lambda_1 - r$; le plan est alors lié (P.B.I.L.-S.R.D.G.), et son dual est un plan équilibré.

Exemples :

— Le système d'incidence S' de l'exemple 1 (1.3), dual de la $GA(2, K_2)$, est un P.B.I.L., S.R.D.G. avec :

$$n = 6, b = 4, k = 3, r = 2, \mu = 1, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, n_1 = 1, n_2 = 4, s = 2, m = 3$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les classes de la relation d'équivalence R_1 sont, en lignes, $\begin{matrix} a & c \\ b & d \\ e & f \end{matrix}$.

La matrice L de la remarque 3 est :

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e & f \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

— Si l'on considère le plan dual de la $GA(2, K_3)$, on aura de même un P.B.I.L., S.R.D.G. avec :

$$n = 12, b = 9, k = 4, r = 3, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, n_1 = 2, n_2 = 9, s = 3, m = 4, \mu = 1.$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Les classes de R_1 sont : $\begin{matrix} 1, 2, 7 \\ 6, 4, 3 \\ 9, 8, 5 \\ 10, 12, 11 \end{matrix}$ (Cf. III 3)

— Le système d'incidence S de l'exemple 2 (1,3) est un P.I.B.P.E., S.R.D.G. avec :

$$n = b = 9, k = r = 3, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \mu \in \{0,1\}, n_1 = 2, n_2 = 6, s = m = 3.$$

$$P^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les classes de la relation d'équivalence sont, en ligne : $\begin{matrix} a & b & g \\ c & d & f \\ h & i & e \end{matrix}$

2.5. — P.B.I.P.E. à deux classes associées et graphe fortement régulier.

On a remarqué au paragraphe précédent que dans le cas d'un P.B.I.P.E. à deux classes associées, le schéma d'association est parfaitement défini par la donnée d'une seule relation binaire R symétrique ; cette relation doit vérifier entre autres :

$$1) \forall x \in E, \quad |R(x)| = n_1$$

$$2) \forall (x, y) \in R, \quad |R(x) \cap R(y)| = p_{11}^1$$

$$\forall (x, y) \in R, \quad |R(x) \cap R(y)| = p_{11}^2$$

Une relation (ou graphe) R vérifiant 1) est dite régulière ; elle est dite fortement régulière si elle vérifie en outre 2).

Inversement, soit un graphe fortement régulier, donc vérifiant 1) et 2); on montre que les paramètres $p_{21}^1, p_{22}^1, p_{21}^2$ et p_{22}^2 sont alors constants (vérifier que $p_{21}^1 = n_1 - p_{11}^1 - 1 = p_{12}^1$; $p_{22}^1 = n - 2n_1 + p_{11}^1$; $p_{12}^2 = n_1 - p_{11}^2 = p_{21}^2$; $p_{22}^2 = n - 2n_1 + p_{11}^2 - 2$); donc ce graphe définit un schéma d'association à deux classes associées en posant :

$$(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow (x, y) \in R \qquad (x, y) \in R_2 \Leftrightarrow (x, y) \notin R$$

Il y a donc équivalence entre ces deux notions.

2. — CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES PLANES.

3.1. — Définitions.

Une configuration géométrique plane G (ou « système de droites ») est un système d'incidence $G = (P, D, I)$ où P est un ensemble d'éléments dits points, D un ensemble d'éléments dits droites, I une correspondance entre P et D dite relation d'incidence ; les conditions suivantes étant vérifiées :

1. Une droite est incidente à au moins deux points.
2. Deux points sont incidents à au plus une droite.
(2 est équivalent à 2' : deux droites sont incidentes à au plus un point.)

Dans ces conditions, on montre facilement qu'on peut identifier une droite à l'ensemble des points auxquels elle est incidente et la relation d'incidence à la relation d'appartenance. Ces deux langages, géométrique et ensembliste, s'emploient d'ailleurs indifféremment en pratique.

Les droites de la configuration G forment donc un ensemble \mathcal{F} de parties de P ; posons $|P| = n$, $|\mathcal{F}| = b$; dans les notations introduites au paragraphe 2.1, les conditions 1 et 2 s'écrivent :

1. $k_i \geq 2, \forall i \in \{1, \dots, b\}$
2. $\lambda_{lm} \leq 1, \forall l \neq m, \in \{1, \dots, n\}$
- (2' s'écrit : $\mu_{ij} \leq 1, \forall i \neq j \in \{1, \dots, b\}$).

Remarquons que le système d'incidence dual G' est une configuration géométrique plane si et seulement si on a la condition 1' : $r_l \geq 2, \forall l \in \{1, \dots, n\}$.

Ces configurations géométriques sont extrêmement nombreuses ; on va se limiter à certaines. Une configuration géométrique est dite *régulière* si :

- Chaque droite contient le même nombre de points : k ,
- Par chaque point passe le même nombre de droites : r .

La famille de droites d'une configuration régulière est donc un plan en bloc, avec λ et μ égaux à 0 ou 1.

Exemples :

Une configuration régulière intervient dans la démonstration du théorème de Desargues : la configuration de Desargues, comprenant dix points, dix droites est telle que par chaque point passent trois droites et que chaque droite contienne trois points (cf. M.S.H., n° 21, page 44 ou couverture de cette revue).

Une autre configuration régulière célèbre est celle de Pappus (dite aussi de Pascal) pour laquelle $n = b = 9, k = r = 3$. Une troisième, celle de Fano : $n = b = 7, k = r = 3$.

Le lecteur pourra s'essayer à dessiner les configurations de Pappus et de Fano, ainsi que celle avec $n = 8, b = 12, k = 2, r = 3$.

Exercice 24 :

Soit une configuration régulière de n points avec $k = 3$ et $\lambda = 1$. Calculer b et r en fonction de n . En déduire que n doit être de la forme $n = 6t + 1$ ou $6t + 3$. Etudier les cas $t = 0$ ou 1.

Un tel système d'incidence s'appelle un système de Steiner ; en 1847 Kirkman montrait que les conditions nécessaires ci-dessus sont aussi suffisantes pour l'existence d'un tel système. Pour $n = 3, 7$ ou 9 , il existe des solutions uniques (aux isomorphismes près) ; pour $n = 13$, il existe deux solutions, pour $n = 15$, 80 solutions (1925).

Remarque :

Dans M.S.H., n° 22, M. Barbut étudie le treillis « géométrique » des partitions d'un ensemble E à n éléments ; l'ensemble des points et droites (c'est-à-dire des partitions à $n - 1$ et $n - 2$ classes) de ce treillis, constitue une configuration géométrique plane que le lecteur pourra étudier ; il est clair que cette configuration n'est pas régulière.

3.2. — Plans partiels.

Un plan partiel G (ou géométrie partielle) est une configuration géométrique régulière telle que par tout point n'appartenant pas à une droite d , il passe t autres droites coupant d .

Soit k le nombre de points d'une droite de G , r le nombre de droites passant par un point de G , on dira aussi que G est un (k, r, t) plan (ou (k, r, t) géométrie) ; on remarque que le dual G' de G est un (r, k, t) plan.

La donnée des paramètres k, r, t permet de déterminer le nombre n de points et le nombre b de droites d'un (k, r, t) plan.

Exercice 25 :

Montrer les relations :

$$n = k + \frac{k(k-1)(r-1)}{t} \qquad b = r + \frac{r(k-1)(r-1)}{t}$$

Soit a un point du (k, r, t) plan ; le nombre de points alignés avec le point a est $n_2 = r(k-1)$.
(Pourquoi ?)

Le nombre de points non alignés avec a est donc :

$$n_1 = n - n_2 = \frac{(k-1)(r-1)(k-t)}{t}$$

On peut calculer d'autres paramètres du plan partiel. Soient a et b deux points non alignés, on pose :

P_{11}^1 : nombre de points non alignés avec a et b ,

P_{22}^1 : nombre de points alignés avec a et b ,

P_{12}^1 : nombre de points non alignés avec a et alignés avec b ,

P_{21}^1 : nombre de points non alignés avec b et alignés avec a .

On définit de même pour deux points a et b collinéaires, $p_{11}^2, p_{22}^2, p_{12}^2$ et p_{21}^2 .

On obtient :

$$P^1 = \begin{bmatrix} \frac{k}{t}(k-1)(r-1) - (k-1)(2r-1) + rt - 1 & r(k-t-1) \\ r(k-t-1) & rt \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} \frac{k}{t}(k-1)(r-1) - (2k-t-1)(r-1) & (k-t)(r-1) \\ (k-t)(r-1) & k-2 + (r-1)(t-1) \end{bmatrix}$$

Exemples :

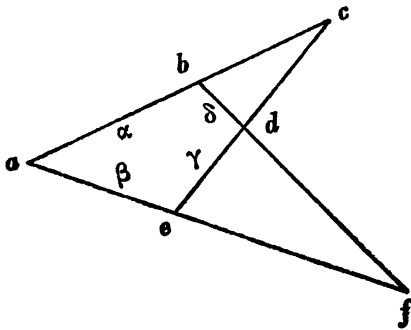


Fig. 1
(3, 2, 2) plan

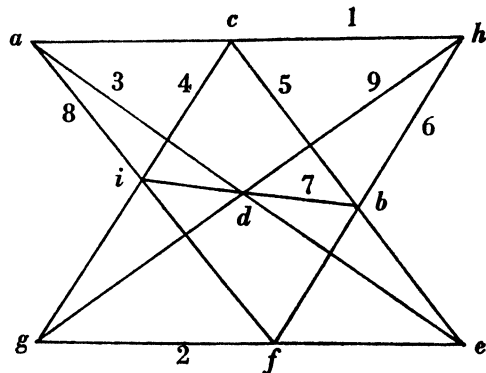


Fig. 2
(3, 3, 2) plan : on obtient
la configuration de Pappus

(Comparer aux exemples 1 et 2 de 1.3)

Exercice 26 :

Etudier les $(k, 2, 1)$, $(2, r, 2)$, $(k, 2, 2)$ plans.

Etudier les $(k, k - 1, k - 1)$ et $(k, k, k - 1)$ plans ; montrer qu'on peut les obtenir à partir de plans projectifs ou affines.

Les (k, r, t) plans dépendent de trois paramètres avec la condition évidente $1 \leq t \leq \inf(k, r)$; si l'on donne des valeurs particulières à t , il en résulte des propriétés combinatoires intéressantes pour le plan partiel ; elles sont faciles à démontrer et font l'objet des exercices suivants.

Exercice 27 :

Montrer que dans un (k, r, t) plan, $(t = r) \Leftrightarrow (\mu = 1)$.

(Deux droites se coupent en un point et un seul.)

Montrer de même : $(t = k) \Leftrightarrow (\lambda = 1)$.

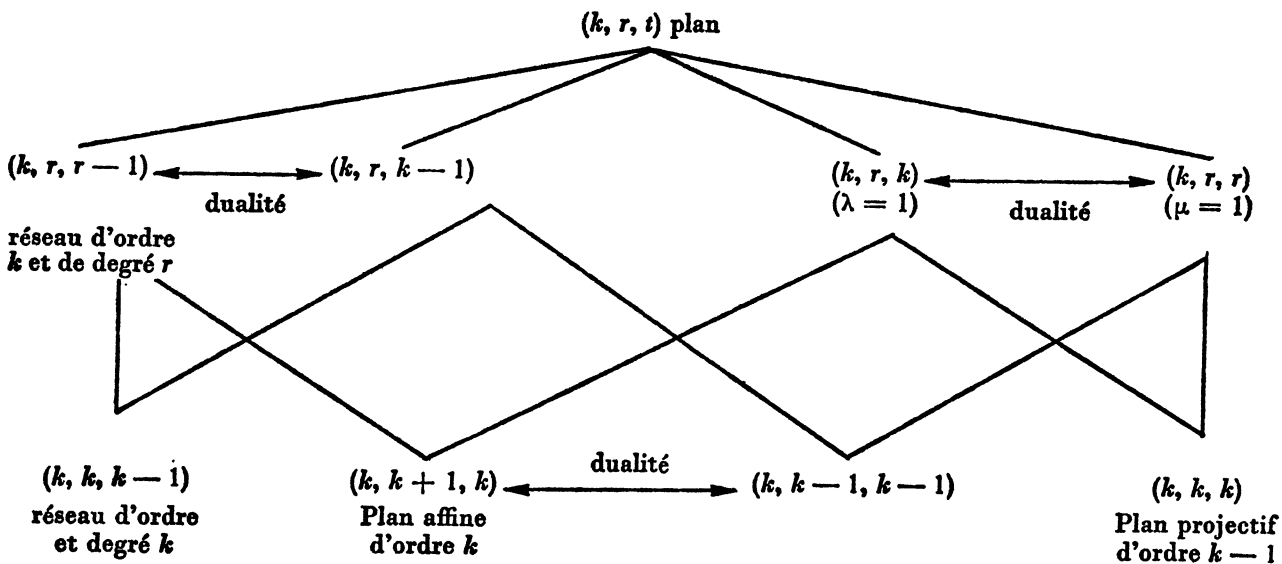
(Par deux points, il passe une droite et une seule.)

Exercice 28 :

Soit un (k, r, t) plan, D l'ensemble de ses droites ; deux droites de D sont dites parallèles si elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.

Montrer que si $t = r - 1$, le parallélisme est une relation d'équivalence. Le plan partiel obtenu dans ce cas s'appelle un réseau (ou tissu) d'ordre k et de degré r . Montrer de même que si $t = k - 1$, on peut définir une équivalence sur l'ensemble des points du plan.

La notion de plan partiel contient comme cas particuliers, les notions de plans affines ou plans projectifs définis dans l'article précédent. On a en effet le tableau suivant :



3.3. — Réseau d'ordre k et de degré r .

Un réseau d'ordre k et de degré r est un $(k, r, r - 1)$ plan ; on obtient donc immédiatement le nombre de points et de droites d'un réseau :

$$n = k^2$$

$$b = rk$$

On a vu que la relation de parallélisme entre droites est une équivalence.

Le lecteur montrera facilement qu'il y a r classes d'équivalence (« faisceaux » de parallèles) contenant chacune k droites.

Puisque $t = r - 1$, par tout point a non situé sur une droite δ , il passe une parallèle et une seule à cette droite ; autrement dit, un réseau vérifie le postulat d'Euclide. Par le point a il passe $r - 1$ droites coupant δ ; donc a est aligné avec $r - 1$ points de δ et non alignés avec $d = k - (r - 1) = k - r + 1$ points de δ . Le nombre d s'appelle la *déficié* du réseau ; si $d = 0$, on vérifie immédiatement que le réseau est un plan affine ; sinon d représente le nombre de classes de droites parallèles manquant au réseau pour que celui-ci soit un plan affine. Les autres paramètres du réseau se calculent facilement (on peut aussi utiliser les formules de 3.2 avec $t = r - 1$, $d = k - r + 1$).

On obtient :

n_1 nombre de points non alignés avec un point : $d(k - 1)$,

n_2 nombre de points alignés avec un point : $r(k - 1)$.

$$P^1 = \begin{bmatrix} k - 2 + (d - 1)(d - 2) & r(d - 1) \\ r(d - 1) & r(r - 1) \end{bmatrix}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} d(d - 1) & (r - 1)d \\ (r - 1)d & (k - 2) + (r - 1)(r - 2) \end{bmatrix}$$

Exercice 29 :

Une autre axiomatique usuelle d'un réseau d'ordre k et de degré r est la suivante : $G = (P, D, I)$ avec :

- Il existe une partition de D en r classes $D_1, \dots, D_i, \dots, D_r$.
- Tout point du réseau est un incident à exactement une droite de chaque classe.
- Il existe un point et un seul incident à deux droites de classes différentes.

Le lecteur montrera l'équivalence avec la définition d'un réseau comme $(k, r, r - 1)$ plan.

Exemples :

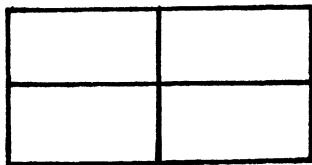


Fig. 3

Réseau d'ordre 3,
de degré 2,
de déficié 2

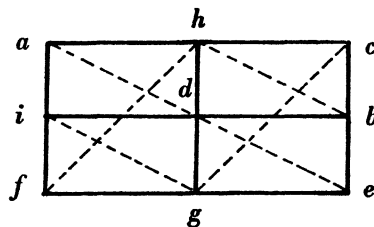


Fig. 4

Réseau d'ordre 3,
de degré 3, de déficié 1
(Le 3^e faisceau de droites
parallèles est aed, cgi, bfh)

(Comparer avec la configura-
tion de Pappus)

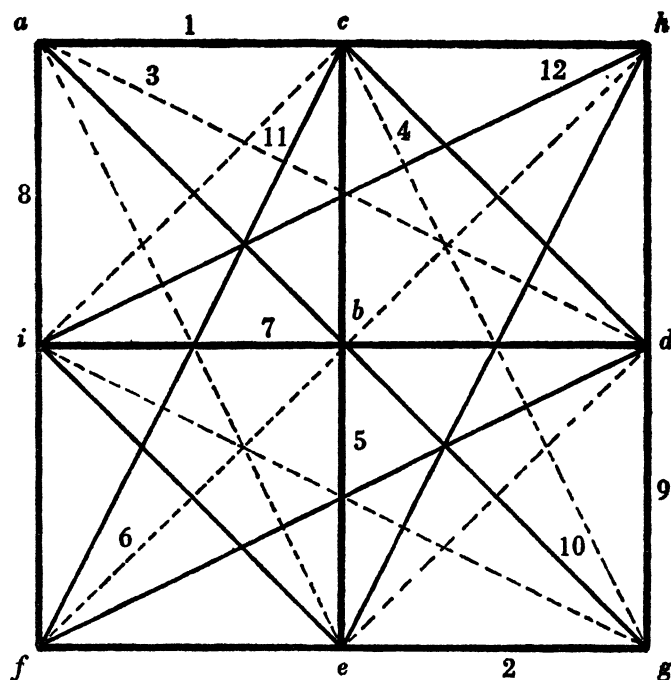


Fig. 5

Réseau d'ordre 3, de degré 4,
de déficience 0, ou plan affine d'ordre 3

Le troisième faisceau de droites parallèles est : $a e d, c g i, b f h$; le quatrième faisceau $a b g, c d f, e h i$.

3.4. — (k, r, t) plan et schéma d'association à deux classes.

Soit un plan partiel, E l'ensemble de ses points ; considérons les deux relations sur E :

$$(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow \lambda_{xy} = 0 \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ non colinéaires,}$$

$$(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow \lambda_{xy} = 1 \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ colinéaires,}$$

il est clair que R_1 et R_2 définissent un schéma d'association à deux classes sur l'ensemble E ; les paramètres de ce schéma ont été donnés en 3.2, dans le cas général, en 3.3 dans le cas particulier d'un réseau. Dans ce dernier cas, la relation $\mu = 0$ entre droites est une équivalence, ce qui revient à dire que le schéma du plan dual est divisible en groupe. (Cf. exemples de 2.4).

Inversement, soit un schéma d'association à deux classes dont les paramètres ont les valeurs du schéma d'un (k, r, t) plan ; existe-t-il effectivement un plan partiel dont ce schéma soit le schéma d'association ? Ou en termes de graphes, à quelles conditions un graphe fortement régulier, dont les paramètres sont ceux du graphe d'un plan partiel, est-il « géométrisable » ? (c'est-à-dire graphe d'un plan partiel). La condition suffisante établie par Bruck et Bose (1963) n'a rien d'évident (elle demande plusieurs pages de démonstration) : c'est

$$2k > r(r-1) + t(r^3 - r^2 + 2)$$

En appliquant ce résultat à un réseau, on obtient :

$$2k > (r-1)(r^3 - r^2 + r + 2)$$

Exercice 30 :

Soit un réseau d'ordre k , de degré r et de déficience d . Montrer que la condition $2k > (d-1)(d^3 - d^2 + d + 2)$ est suffisante pour que ce réseau puisse être prolongé en plan affine.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

L'étude des systèmes d'incidence constitue une part prépondérante de la combinatoire actuelle. En nous limitant aux plans en blocs ou aux configurations géométriques, nous citerons d'abord deux ouvrages de base :

RYSER H. J. — *Combinatorial Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, 1963.

Trois chapitres sont consacrés aux configurations ; les (b, v, r, k) configurations étant les P B I E, les (v, h, λ) configurations, les plans en blocs incomplets équilibrés symétriques. L'exposé est rapide mais excellent.

HALL M. JR. — *Combinatorial Theory*, Blaisdell publishing Company, Toronto, 1967.

Le grand spécialiste de combinatoire et d'algèbre qu'est Marshall Hall vient de publier un livre attendu depuis longtemps. La troisième partie de cet ouvrage (chapitres 10 à 16) traite des plans en bloc, mais presque uniquement des P.B.I.E. ; sous des formes diverses (géométries finies, carrés latins, matrices d'Hadamard, ensemble de différences) l'auteur étudie l'existence et la construction de tels plans ; le lecteur trouvera aussi une table de ces plans pour $r \leq 15$.

Cet ouvrage ne rend pas caducs les excellents exposés de synthèse que l'auteur avait fait à plusieurs reprises et dont nous rappelons certains :

Some aspects of analysis and probability, John Wiley and Sons, New York, 1958. Cf. le chapitre : A survey of combinatorial Analysis.

BELLMAN R. and HALL M. JR. — *Combinatorial Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 1960. Cf. le chapitre : Current studies on combinatorial designs.

BECKENBACH E. F. — *Applied Combinatorial Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, 1964. Cf. le chapitre : Block Design.

Il existe plusieurs exposés en français dus à l'équipe des chercheurs regroupés autour de l'Institut de Statistique de Paris.

Citons d'abord :

DUGUE D. — *Traité de Statistique théorique et appliquée*, deuxième fascicule : Algèbre Aléatoire, Masson, Paris, 1958.

DUGUE D. et GIRAULT M. — *Analyse de variance et plans d'expérience*, Dunod, Paris, 1959.

Dans ces deux ouvrages, le lecteur trouvera le contexte statistique dans lequel s'insère l'étude algébrique de plans d'expériences (P.B.I.E.).

L'étude purement algébrique des plans en blocs a donné lieu depuis près de trente ans à une foule d'articles. Pour avoir une idée des principaux résultats obtenus, le lecteur pourra se reporter à un très bon travail de synthèse, faisant référence à près de deux cents articles :

GUÉRIN R. — Vue d'ensemble sur les plans en blocs incomplets équilibrés et partiellement équilibrés, *Revue de l'Institut International de Statistique*, vol. 33, n° 1, 1965, La Haye.

Dans la thèse même de l'auteur on trouvera un chapitre sur les réseaux avec, en particulier, la démonstration des conditions pour qu'un réseau puisse être étendu en un plan affine ; aux chapitres 4 et 5 sont étudiées certaines configurations géométriques planes, dites « systèmes de droites » ou « systèmes partiels de droites » (par exemple, dual d'un réseau).

GUÉRIN R. — Existence et propriétés des carrés latins orthogonaux, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, vol. XV, fascicule 2, 1966, Paris.

L'étude des P.B.I.P.E. a conduit à la notion de schéma d'association, étudiée pour elle-même et de façon très algébrique dans la thèse suivante :

HEUZE G. — Contribution à l'étude des schémas d'association, *Publications de l'I.S.U.P.*, vol. XV, fascicule 1, 1966, Paris.

(On y trouvera la démonstration du résultat de Bruck et Bose. Cf. 3.4.)

Nous terminerons cette revue bibliographique par deux articles particulièrement intéressants :

GUILBAUD G. Th. — Petite introduction à la combinatoire. Chapitre 1. Les plans en blocs. *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, n° 24, 1962, Paris.

Le lecteur y trouvera un exposé axé sur la dualité et y verra l'intérêt des matrices d'incidence ou de coordination associées à un plan (l'emploi du calcul matriciel permet en effet la démonstration aisée de certaines relations entre les paramètres du plan). L'auteur termine par des exemples de plans carrés « géométriques » ($b = n$, $k = r$ et $= 0$ ou 1) ; on retrouvera une étude détaillée de tels plans dans :

COXETER H. S. M. — Self dual configurations and regular graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56, 1950.