

B. MONJARDET

**Note sur les treillis géométriques et l'axiomatique du treillis  
des partitions d'un ensemble fini**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 22 (1968), p. 23-26

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1968\\_\\_22\\_\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__22__23_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## NOTE SUR LES TREILLIS GÉOMÉTRIQUES ET L'AXIOMATIQUE DU TREILLIS DES PARTITIONS D'UN ENSEMBLE FINI

par

B. MONJARDET

On sait que la structure de treillis peut être définie au moyen de deux axiomatiques ; une axiomatique algébrique portant sur les propriétés des deux opérations  $\wedge$  et  $\vee$  ; une axiomatique relationnelle ou « combinatoire » portant sur les propriétés de la relation d'ordre. Pour une classe particulière de treillis, on aura de même deux axiomatiques, mais le passage de l'une à l'autre peut n'avoir rien d'évident. Une classe particulièrement intéressante de treillis est celle des treillis dits géométriques, ou, parfois matroïdes ; cette dernière dénomination provient de leur origine ; ces treillis ont en effet été définis dans un article de Birkhoff [5], en 1935, lui-même inspiré par le célèbre article de Whitney sur l'axiomatique de la dépendance linéaire [4], base de la théorie des matroïdes<sup>1</sup>. Un treillis géométrique  $\mathcal{C}$  est, par définition, un treillis où tout élément est union d'atomes et vérifiant la « propriété d'échange » :  $\forall a$  atome de  $\mathcal{C}$ ,  $\forall x \in \mathcal{C}$ ,  $(a \prec x) \Rightarrow (x \prec a \vee x)$  ( $\prec$  est la relation de couverture). Le lecteur vérifiera immédiatement que le treillis  $C_n$  des partitions d'un ensemble à  $n$  éléments [1] est un treillis géométrique. Dans [1], il a été signalé que le treillis  $C_n$  est un treillis semi-modulaire et complété ; ce treillis est même relativement complété : si  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont deux partitions avec  $\Pi \leq \Pi'$ , l'ensemble des partitions comprises entre  $\Pi$  et  $\Pi'$  s'appelle l'intervalle  $[\Pi, \Pi']$  ; cet intervalle est un sous-treillis de  $C_n$ , et ce sous-treillis est lui aussi complété.

On montre d'ailleurs qu'un treillis géométrique peut également être défini par l'axiomatique (algébrique) suivante : treillis semi-modulaire et relativement complété. Les treillis géométriques ont fait l'objet de nombreux travaux ; on trouvera un excellent exposé d'ensemble dans l'ouvrage sur les treillis de Dubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot [3] ; voir aussi la nouvelle édition de *Lattice Theory* [2] de G. Birkhoff. D'importants résultats, liés au développement de la théorie des matroïdes ont été récemment obtenus par Crapo (voir, par exemple, [6]).

Le treillis géométrique le plus classique est celui de la « géométrie vectorielle de dimension  $n$  », c'est-à-dire le treillis des sous-vectoriels d'un vectoriel  $V$  de dimension  $n$ , sur un corps  $k$  ; ce treillis est également celui des sous-espaces (ou variétés) de la « géométrie projective de dimension  $n - 1$  », définie à partir de  $V$ , et notée  $GP(k, n - 1)$  ; en effet, par définition, les points de cette géométrie correspondent aux sous-vectoriels de dimension 1, les droites correspondent aux sous-vectoriels de dimension 2, etc.

Dans la suite de cette note on va présenter les deux axiomatiques, combinatoire et algébrique, du treillis précédent ; on se posera ensuite le même problème pour le treillis des partitions  $C_n$ .

---

1. Un matroïde  $M$  peut être défini, par exemple, de la façon suivante :  $M$  est le couple  $(E, \mathcal{C})$  où  $E$  est un ensemble fini,  $\mathcal{C}$  un ensemble de parties de  $E$ , dites parties libres, vérifiant les deux conditions :

- 1) Tout sous-ensemble d'une partie libre est une partie libre.
- 2) Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $E$ , les parties libres maximales contenues dans  $A$  ont même cardinal.

On sait que la définition classique d'une géométrie projective opère au moyen de points et de droites. Une géométrie projective  $G$  est alors un triplet  $G = (P, D, I)$  où  $P$  est un ensemble d'éléments appelés points,  $D$  un ensemble d'éléments appelés droites,  $I$  une relation entre  $P$  et  $D$ , appelée relation d'incidence, les axiomes suivants étant vérifiés :

—  $A_0$  : deux points distincts sont incidents à une droite unique.

—  $A_1$  : toute droite est incidente à au moins deux points.

—  $A_2$  : si une droite est incidente aux deux côtés d'un triangle (non à leur point de rencontre), elle est aussi incidente au troisième côté.

Les axiomes précédents permettent d'identifier les droites à des ensembles de points et la relation d'incidence à la relation d'appartenance (cf. article sur les plans projectifs dans le n° 21 de *M.S.H.*). On définit ensuite les sous-espaces (ou variétés linéaires) de la géométrie  $G$  :  $X \subset P$  est un sous-espace de  $G$  si et seulement si il contient avec deux points distincts la droite qu'ils définissent. Soit  $T(G)$  l'ensemble des sous-espaces de  $G$  ;  $T(G)$  est un treillis pour l'inclusion ensembliste ; ses atomes sont les points de  $G$ , son élément universel l'ensemble  $P$  ; l'union de deux sous-espaces est le plus petit sous-espace les contenant ; on démontre que  $T(G)$  est un treillis géométrique, ayant d'ailleurs une propriété supplémentaire : il est modulaire.

Inversement, soit  $\mathcal{C}$  un treillis géométrique modulaire ; soit  $P$  l'ensemble des atomes de  $\mathcal{C}$  dits points ; soit  $D$  l'ensemble des éléments couvrant les atomes dits droites ; on montre que  $G = (P, D, \leq)$  est une géométrie projective ; le treillis  $T(G)$  de cette géométrie est isomorphe à  $\mathcal{C}$ .

Autrement dit, on peut caractériser les treillis associés aux géométries projectives soit par l'axiomatique algébrique des treillis géométriques modulaires, soit par l'axiomatique combinatoire des propriétés  $A_0, A_1, A_2$ , de la relation d'ordre entre points et droites du treillis.

Revenons maintenant au treillis des partitions  $C_n$  ; le problème est de caractériser ce treillis soit au moyen d'une axiomatique combinatoire sur les points et les droites, soit au moyen de propriétés algébriques supplémentaires dans la classe des treillis géométriques. Le premier problème a été résolu par Ore [7], le second par Sachs [9] ; il existe aussi un article de Sasaki et Fujiwara [8] sur ces questions, mais nous n'avons pu en prendre connaissance. La caractérisation algébrique de Sachs demande beaucoup trop de connaissances techniques sur les treillis semi-modulaires pour pouvoir être exposée ici. Aussi nous ne présenterons que la caractérisation combinatoire d'Ore.

Nous allons commencer par énoncer une série de propriétés et de remarques sur les points et les droites du treillis  $C_n$  ; le lecteur pourra démontrer ces résultats à titre d'exercices ; nous indiquerons ensuite comment ces résultats permettent d'obtenir la caractérisation cherchée.

Soit donc  $C_n$  le treillis des partitions d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments ; notons  $P$  l'ensemble des points de ce treillis, c'est-à-dire l'ensemble des  $\binom{n}{2}$  partitions  $\Pi_{xy} = xy/z/t/u/v/\dots$  ; notons  $D$  l'ensemble des droites de  $C_n$  ; ces droites sont de deux types : les droites contenant trois points, c'est-à-dire les partitions de la forme  $\Pi_{xyz} = xyz/t/u/v/\dots$ , nous les appellerons droites rouges ; les droites contenant deux points, c'est-à-dire les partitions de la forme  $xy/zt/u/v/\dots$ , nous les appellerons droites noires. La configuration formée par les points et les droites rouges n'est autre que celle formée par les parties à deux et à trois éléments de l'ensemble  $E$  ; les droites noires s'obtiennent en « diagonalisant » cette configuration. On a donc  $\binom{n}{3}$  droites rouges,  $\frac{1}{2} \binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2}$  droites noires ; par un point passent  $\binom{n-1}{2}$  droites dont  $n-2$  rouges et  $\binom{n-2}{2}$  noires [1].

Nous définissons une relation  $R$  sur l'ensemble  $P$  des points :  $p, q \in P, p R q$  si et seulement si la droite contenant les points  $p$  et  $q$ , notée  $d(p, q)$ , est rouge ; si cette relation n'est pas vérifiée, on écrit  $p \bar{R} q$  ou  $p N q$  ;  $p$  et  $q$  sont alors sur une droite noire. Énonçons maintenant cinq propriétés des points et des droites de  $C_n$ .

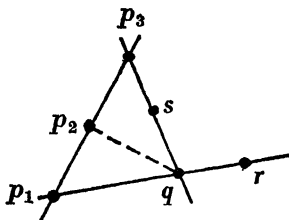


Fig. 1

$A_0$  : deux points distincts appartiennent à une droite unique.

$A'_1$  : une droite contient deux ou trois points.

$A_3$  : soit une droite rouge contenant les points  $p_1, p_2, p_3$  ; soit  $q$  un point n'appartenant pas à cette droite et tel que  $p_1 R q$  ; alors  $(p_2 R q) \iff (p_3 N q)$ . Autrement dit les deux droites  $d(p_2, q), d(p_3, q)$  sont l'une rouge, l'autre noire.

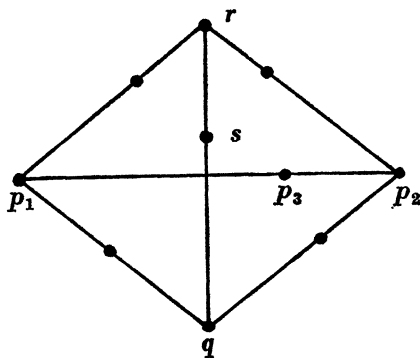


Fig. 2

$A_4$  : soit une droite rouge contenant les points  $p_1, p_2, p_3$ . Soient  $q$  et  $r$  deux points n'appartenant pas à cette droite ;

$$qRp_1, qRp_2, rRp_1, rRp_2 \implies rRq$$

$A_5$  : soient  $p$  et  $q$  deux points avec  $pNq$  ; il existe un point  $s$  avec  $pRs$  et  $qRs$ .

Pour finir nous définissons la notion d'« étoile » ; soit  $x$  un élément de  $E$  ; nous appelons étoile  $\sigma(x)$  (associée à  $x$ ), l'ensemble des  $n - 1$  points de  $P$ , de la forme  $\Pi_{xy}, y \in E - \{x\}$ . Il y a donc  $n$  étoiles ; tout point  $\Pi_{xy}$  de  $C_n$  appartient à deux étoiles  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y)$  et deux étoiles ont un point commun. On peut alors remarquer le fait suivant : la notion d'étoile peut être définie uniquement à partir des points et des droites de  $C_n$  ; soit en effet une droite rouge contenant les points  $p_1, p_2, p_3$  ; posons

$$\sigma(p_1, p_2) = \{q \in P, q \neq p_3, qRp_1 \text{ et } qRp_2\} \cup \{p_1, p_2\}$$

alors  $\sigma(p_1, p_2)$  est une étoile. Par exemple, si  $E = \{abcde\}$ , si  $p_1 = \Pi_{ab}$ ,  $p_2 = \Pi_{ad}$ ,  $p_3 = \Pi_{bd}$ ,  $\sigma(p_1, p_2) = \sigma(a) = \{\Pi_{ab}, \Pi_{ac}, \Pi_{ad}, \Pi_{ae}\}$ .

On peut maintenant énoncer la caractérisation due à Ore. Soit  $G = (P, D, I)$  une « géométrie » où  $P$  est un ensemble de  $\binom{n}{2}$  éléments dits points,  $D$  un ensemble de parties de  $E$  dites droites,  $I$  une relation dite d'incidence entre  $P$  et  $D$ .

Supposons que  $G$  vérifie les cinq axiomes  $A_0, A'_1, A_3, A_4, A_5$ . Appelons, comme pour la géométrie projective, variété de  $G$ , tout ensemble de points qui contient avec deux points la droite les joignant ; l'ensemble de ces variétés est pour l'inclusion ensembliste un treillis  $T(G)$  ; le théorème d'Ore s'énonce alors :

*Le treillis  $T(G)$  est isomorphe au treillis des partitions  $C_n$ .*

Pour démontrer ce théorème on commence par définir les « étoiles » de la géométrie  $G$ , au moyen des points et des droites de  $G$ . Les axiomes  $A_0$  à  $A_5$  permettent de démontrer que tout point appartient à deux étoiles et que deux étoiles  $\alpha$  et  $\beta$  ont un point commun noté  $p(\alpha, \beta)$  ; il en résulte que l'ensemble  $E$  des étoiles a  $n$  éléments. Soit,  $C_n$ , le treillis des partitions de  $E$  ; on définit une application de l'ensemble des points de  $G$ , donc du treillis  $T(G)$ , dans l'ensemble des points de  $C_n$  ; soit  $p$  un point  $G$ , appartenant aux deux étoiles  $\alpha$  et  $\beta$  ; on lui fait correspondre le point  $\Pi_{\alpha\beta}$  de  $C_n$  ; inversement à un point  $\Pi_{\alpha\beta}$  de  $C_n$  on fait correspondre le point  $p(\alpha, \beta)$  de  $T(G)$  ; on a ainsi défini une bijection entre les ensembles de points de deux treillis ; d'où on induit une bijection entre les deux treillis : à une variété quelconque, élément de  $T(G)$ , on associe la partition de  $E$ , élément de  $C_n$ , obtenue par union des partitions images des points de la variété ; enfin, on vérifie que la bijection ainsi définie est un isomorphisme.

Remarque : L'axiomatique précédente permet, par exemple, de montrer facilement que la « géométrie des partitions » vérifie le théorème de Desargues.

## RÉFÉRENCES

- [1] BARBUT M. — « Les treillis des partitions d'un ensemble fini et leur représentation géométrique », *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 22, 1968.
- [2] BIRKHOFF G. — *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25, Providence, 1967.

- [3] DUBREIL-JACOTIN M. L., LESIEUR L., CROISOT R. — *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques, Fasc. 21, Gauthier-Villars, 1953.
- [4] WHITNEY H. — « On the abstract properties of linear dependance », *Amer. J. Math.* 57, 1935, 509-533.
- [5] BIRKHOFF G. — « Abstract linear dependance and lattices », *Amer. J. Math.* 57, 1935, 800-804.
- [6] CRAPO H. H. — « Single element extensions of matroids », *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 69B, 1965, 55-65.
- [7] ORE O. — « Theory of equivalence relations », *Duke Math. J.* 9., 1942, 573-627.
- [8] SASAKI U., FUJIWARA S. — « The characterization of partition lattices », *J. Sci. Hiroshima Univ.* 15 A., 1952, 189-201.
- [9] SACHS D. — « Partition and modulated lattices », *Pac. J. of Math.* 11, n° 1, 1961, 325-345.