R. A. CHIAPPA
E. T. OKLANDER

Une solution d'un problème sur les mots circulaires et équilibrés. Suite n° 4

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 53-55
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__53_0>

UNE SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LES MOTS CIRCULAIRES ET ÉQUILIBRES

Suite n° 4

par

R. A. CHIAPPA et E. T. OKLANDER [1]

Le travail que nous ont envoyé E. T. Ohlander et R. A. Chiappa constitue une contribution intéressante au problème des mots « circulaires et équilibrés ». Il est par ailleurs remarquable de constater que ce problème est maintenant reconnu comme l'un des thèmes classiques de la combinatoire ; Marshall Hall Jr. lui consacre en effet le chapitre 9 de son ouvrage fondamental, sur lequel nous reviendrons, Combinatorial Theory *(Blaisdell Publ. Co., 1967). Ce que contient ce chapitre, ce sont surtout les résultats de Debruijn dont nous avons parlé dans M.S.H. n° 17 Marshall Hall appelle d'ailleurs séquences de Debruijn les mots circulaires équilibrés.*

D'autre part S. K. Stein consacre un chapitre (Ch. 9 Les roues à mémoire) dans les Mathématiques, ce monde que créa l'homme *(Dunod, 1967, traduction de* Mathematics, The man-made universe, *Freemann & C°) à l'histoire du problème ; on trouvera là des compléments à la bibliographie que nous avions fournie dans* M.S.H. n° 19.

N.D.L.R.

Notre propos est de donner une méthode pour obtenir des solutions au problème suivant, pour lequel il y a déjà d'autres algorithmes de résolutions [1].

Dans ce qui suit, nous considérons un alphabet A de h lettres et nous notons V_l l'ensemble de tous les mots de longueur l sur A.

Problème : Etant donné un entier $l > 1$ déterminer un mot $P = x_1, x_2 \ldots x_m$ sur l'alphabet A, tel que pour chaque mot p de V_l, il existe un et un seul entier $k (1 \leqslant k \leqslant m)$ tel que si (k) représente l'entier de la suite 1, 2 … m congruent à k (modulo m), alors p est de forme $x_{(k)}\, x_{(k+1)} \ldots x_{(k+l-1)}$.

On voit tout de suite que le mot P doit avoir pour longueur $m = h^l$. Nous considérons maintenant les définitions et propriétés suivantes.

A) Nous disons que le mot P de longueur $m (m \leqslant l > 1)$ a le *l - type r/s* si $r(s)$ est le sous-mot initial (final) de p, de longueur l - 1.

B) Nous disons que les mots p et q sont *l - équivalents* s'ils ont le même *l - type*.

Exemple : les mots aaba et aabcaba sont *4 - équivalents, 3 - équivalents* et *2 - équivalents.*

C) Nous disons que le mot q est *l - compatible* avec le mot p si p a le *l - type* r/s et q a le l type s/t.

D) Si q est l - compatible avec p, en notant $p = p's$, $q = sq'$, nous disons que le mot $p + q = p'sq'$ est obtenu par *l - juxtaposition* de q à p. D'une façon analogue nous définirions $p^1 + p^2 + \ldots + p^k$ si p^{j+1} est *l - compatible* avec $p^j (1 \leqslant j \leqslant k - l)$.

1 Instituto de Matematica, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina.

Exemple : Par 3 - juxtaposition de $p^1 = abc$, $p^2 = bcad$, $p^3 = adda$, on obtient

$$p^1 + p^2 + p^3 = abcadda.$$

E) Si $p = x_1 x_2 \dots x_l$ est le mot de l lettres (qui ne sont pas nécessairement distinctes) nous écrivons $\pi p = x_2 x_3 \dots x_l x_1$; et si j est le plus petit entier tel que $\pi^j p = p$, nous disons que p est *d'ordre j*.

F) Si p est un mot d'ordre j, nous appelons *classe cyclique* de p l'ensemble (p) des mots p, πp, $\pi^2 p, \dots, \pi^{j-1} p$. Il est immédiat que la classe cyclique de p est identique à la classe cyclique de $\pi^i p$ (pour tout i) et que $\pi^{i+1} p$ est l - compatible avec $\pi^i p$.

G) Si p est un mot d'ordre j, nous disons que le mot $C(p) = p + \pi p + \pi^2 p + \dots + \pi^{j-l} p$ est le *cycle* de p.
Si $p = x_1 x_2 \dots x_l$, alors C(p) a pour l - type $x_1 x_2 \dots x_{l-1}/x_1 x_2 \dots x_{l-1}$.

H) Nous disons que deux ensembles M et M' de mots de longueur au moins égale à l, sont *équivalents*, s'il y a entre M et M' une correspondance biunivoque telle que les mots correspondants soient l équivalents.

I) Si M' est obtenu à partir de M par 1 - juxtaposition de certains mots de M, nous disons que M' est une *contraction* de M.

Théorème : Ordonnons totalement les lettres de A : $a_1 < a_2 < \dots < a_h$; V_l^k l'ensemble des mots de longueur l sur l'alphabet $a_1, a_2, \dots a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant h)$. Alors, si $k > l$, V_l^{k-1} est équivalent à une contraction de V_l^k.

Démonstration : Si M_j est l'ensemble des mots de V_l^k dans lesquels la lettre a_k figure au plus j fois $(0 \leqslant j \leqslant 1)$, alors $M_0 = V_l^{k-1}$ et $M_l = V_l^k$. Donc, pour démontrer le théorème il suffira de montrer que M_{j-1} est équivalent à une contraction de M_j (pour $j > 0$).

Soit D_j l'ensemble des mots de V_l^k dans lesquels a_k figure exactement j fois, et soit (p) une classe cyclique de mots D_j. Comme $j > 0$, la lettre a_k appartient au mot p, et nous pouvons supposer que a_k est la dernière lettre de p ; dans le cas contraire nous pourrions changer p en un mot autre de la même classe cyclique ayant cette propriété.

Si $p = x_1 x_2 \dots x_{l-1} a_k$, alors C(p) a pour l - type $x_1 x_2 \dots x_{l-1}/x_1 x_2 \dots x_{l-1}$, et a_k apparaît $j - 1$ fois parmi les lettres $x_1 . x_2, \dots x_{l-1}$.

Le mot $p' = a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-1}$ appartient à D_{j-1} et C(p) est l - compatible avec p'. D'ailleurs, une fois fixé, dans chaque classe cyclique de D_j, un mot ayant comme dernière lettre a_k, la correspondance $C(p) \to p'$ est biunivoque entre les classes cycliques de D_j et l'ensemble S des mots de D_{j-1} ayant a_1 comme première lettre.

Si $p' = a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-1}$ est le mot de S, le mot $p' + C(p)$ (qui a pour l - type $a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-2}/x_1 x_2 \dots x_{l-1}$) est l - équivalent à p'. Si dans M_{j-1} nous remplaçons chaque mot p' de S par $p' + C(p)$, nous obtenons un ensemble N qui est une contradiction de M_j équivalente à M_{j-1}.

En appliquant $h - 1$ fois le théorème, on obtient un ensemble contraction de $V_l^h = V_l$ qui est équivalent à V_l^1. Cet ensemble est formé par le seul mot P' tel que, en éliminant ses $l - 1$ dernières lettres on obtient un mot P qui est une solution du problème.

Comme illustration de l'algorithme indiqué dans le théorème, appliquons-le au cas où $h = l = 3$ et A = { a, b, c, }.

Dans le tableau I nous avons ordonné les mots de V_3 de telle manière que dans chaque ligne il y ait une classe cyclique. Dans les lignes 1-4, 5-8, 9-10, et 11, les mots ont respectivement 0, 1, 2, 3 fois la lettre c.

Si p = ccc, alors p' = acc et $p' + C(p) = p' + p$ = accc. En remplaçant acc par accc, nous obtenons le tableau II qui est une contraction du tableau I, équivalente à ses dix premières lignes.

Soit maintenant p = acc ; nous aurons p' = acc et $p' + C(p)$ = aac + acc + cca + cac. 1)

En remplaçant chaque mot de 1) par son correspondant dans le tableau II nous obtenons le mot

$$aac + accc + cca + cac = aaccac \qquad 2)$$

D'ailleurs, si p = bcc, nous aurons p' = abc et :

$$p' + C(p) = abc + bcc + ccb + cbc = abccbc \qquad 3)$$

En remplaçant dans le tableau II les mots aac et abc par 2) et 3) respectivement, nous obtenons le tableau III, contraction du tableau I équivalente à ses huit premières lignes.

En réitérant ce procédé, on arrive finalement au tableau VII, formé par le seul mot :

P′ = aaacccacaabccbcabbcbbbabacbaa.

Le mot P = aaacccacaabccbcabbcbbbabacb, obtenu à partir de P′ en éliminant ses deux dernières lettres est, donc, une solution du problème pour $h = l = 3$.

Tableau I

1) aaa
2) aab-aba-baa
3) abb-bba-bab
4) bbb
5) aac-aca-caa
6) abc-bca-cab
7) bac-acb-cba
8) bbc-bcb-cbb
9) acc-cca-cac
10) bcc-ccb-cbc
11) ccc

Tableau II

1) aaa
2) aab-aba-baa
3) abb-bba-bab
4) bbb
5) aac-aca-caa
6) abc-bca-cab
7) bac-acb-cba
8) bbc-bcb-cbb
9) accc-cca-cac
10) bcc-ccb-cbc

Tableau III

1) aaa
2) aab-aba-baa
3) abb-bba-bab
4) bbb
5) aacccac-aca-caa
6) abccbc-bca-cab
7) bac-acb-cba
8) bbc-bcb-cbb

Tableau IV

1) aaacccacaa
2) aabccbcabaa-abacba-baa
3) abbcbb-bba-bab
4) bbb

Tableau V

1) aaacccacaa
2) aabccbcab-abacba-baa
3) abbcbbb-bba-bab

Tableau VI

1) aaacccacaa
2) aabccbcabbcbbbab-abacba-baa

Tableau VII

1) aaacccacaabccbcabbcbbbabacbaa

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT M. — « Mots circulaires et équilibrés. Histoire du problème vue à travers la bibliographie », *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 17 (p. 59-61) 1966.