MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Y. POUPARD

2. Algorithme de la greffe et dénombrement de diverses familles d'arbres

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 29-38
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__29_0>

2

ALGORITHME DE LA GREFFE ET DÉNOMBREMENT DE DIVERSES FAMILLES D'ARBRES

par

Y. POUPARD

Les définitions relatives aux arbres et arborescences n'étant pas uniformisées dans la littérature scientifique, il convient d'abord de préciser celles que nous adoptons. Pour ce faire, dans le premier paragraphe, nous définissons ce que, dans cet article, nous appelons respectivement « arbre libre » et « arbre pointé ». Nous y introduisons aussi deux notions d'arbre orienté, avec racine, qui sont assimilables à la notion d'arbre pointé. Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons quelques définitions et conventions complémentaires permettant de mieux décrire un arbre pointé. Cayley [1] *a démontré le premier que le nombre d'arbres libres ayant n sommets donnés est égal à* n^{n-2} *et que le nombre d'arbres pointés ayant n sommets donnés est égal à* n^{n-1}. *Pour retrouver très simplement ces résultats, dans le troisième paragraphe, nous construisons une correspondance biunivoque entre l'ensemble des arbres pointés de n sommets et l'ensemble des mots de* $n - 1$ *lettres obtenus en utilisant pour alphabet l'ensemble des n sommets.*

Cette correspondance permet non seulement d'établir les résultats de Cayley, mais encore de calculer le nombre d'arbres libres ou pointés vérifiant certaines conditions supplémentaires. Quelques conséquences combinatoires de cette correspondance sont ainsi exposées dans le quatrième et dernier paragraphe.

1. — DÉFINITION DES ARBRES.

Soit S_n un ensemble de n sommets $s_1, s_2, \dots s_n$ ($n \geqslant 2$)

$$S_n = \{ s_1, s_2, \dots\dots s_n \}$$

Nous appelons « arbre libre » [2] ayant S_n pour ensemble de sommets, tout graphe non orienté ayant S_n pour ensemble de sommets et satisfaisant à l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(1) le graphe est connexe et sans cycle,

(1') le graphe est tel que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une chaîne et une seule.

Signalons que nous aurions pu donner d'autres propriétés équivalentes à (1) ou (1') [3].

Nous désignons par $A(S_n)$ l'ensemble des tels arbres.

---

1. Cayley, *Collected Mathematical Papers*, Cambridge, 1889-1897, en particulier vol. 3, p. 242-246 et vol. 13, p. 26-28.
2. Ce que nous appelons « arbre libre » correspond à ce qui est souvent appelé dans la littérature anglo-saxonne « (unoriented) (free) tree (with distinct points) » et à ce qui est appelé « arbre » par M. Cl. Berge dans « Théorie des graphes et ses applications ».
3. Cf. Berge, ouvrage cité, 2e édition, chap. 16, p. 146.

Nous appelons « arbre pointé »[1] ayant S_n pour ensemble de sommets, tout couple constitué par un arbre libre ayant S_n pour ensemble de sommets et par un sommet de S_n, et nous appelons ce sommet racine de l'arbre.

Nous désignons par $\mathring{A}(S_n)$ l'ensemble des tels arbres ; par définition $\mathring{A}(S_n)$ est donc égal au produit cartésien $A(S_n) \times S_n$.

La particularisation de l'un des sommets de l'arbre opérée en donnant à ce sommet le nom de racine permet de définir l'une ou l'autre des deux orientations suivantes qu'il est parfois utile ou simplement commode de considérer :

Les arêtes de l'arbre peuvent être orientées de telle sorte que si l'on considère successivement chacun des $n - 1$ sommets de l'arbre autres que sa racine, il existe toujours soit un chemin (et un seul) ayant pour extrémité initiale la racine de l'arbre et pour extrémité finale le sommet considéré d'où une orientation « radicifuge » de l'arbre, soit inversement, un chemin (et un seul) ayant pour extrémité initiale le sommet considéré et pour extrémité finale la racine de l'arbre, d'où une orientation « radicipète » de l'arbre.

Nous désignons par $\overleftarrow{\mathring{A}}(S_n)$ si l'orientation est radicifuge, et par $\overrightarrow{\mathring{A}}(S_n)$ si l'orientation est radicipète, l'ensemble des arbres dont l'ensemble des sommets est S_n, avec racine et ainsi orientés. Soulignons que les trois ensembles $\mathring{A}(S_n)$, $\overleftarrow{\mathring{A}}(S_n)$ et $\overrightarrow{\mathring{A}}(S_n)$ étant deux à deux en correspondance biunivoque naturelle, il est loisible de considérer indifféremment celui des trois qui paraît offrir le plus de commodités.

Proposons encore une autre définition de l'ensemble $\overleftarrow{\mathring{A}}(S_n)$ qui peut être intéressante en raison de ses applications dans certains problèmes relatifs aux sciences humaines :

Appelons relation de hiérarchie définie sur S_n toute relation d'ordre (partiel ou total) $\geqslant$ définie sur S_n et vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) $\forall s_\alpha$ et $s_\beta \in S_n$

$\exists s_\delta \in S_n$ tel que $s_\delta \geqslant s_\alpha$ et $s_\delta \geqslant s_\beta$

et $\exists s_\gamma \in S_n$ tel que, $\forall s_\delta \in S_n$ tel que $s_\delta \geqslant s_\alpha$ et $s_\delta \geqslant s_\beta$

$s_\gamma \geqslant s_\alpha$, $s_\gamma \geqslant s_\beta$ et $s_\delta \geqslant s_\gamma$

Ainsi deux éléments quelconques de S_n sont toujours « majorés » par un élément de S_n et parmi tous les « majorants » de deux éléments, il en existe un qui « minore » tous les autres ; S_n, muni de la relation $\geqslant$, est donc un demi-treillis supérieur.

(2) $\forall s_\alpha$ et $s_\beta \in S_n$ tels que $s_\alpha \ngeqslant s_\beta$ et $s_\beta \ngeqslant s_\alpha$,

$\{s_\nu \mid s_\nu \in S_n,\ s_\alpha \geqslant s_\nu \text{ et } s_\beta \geqslant s_\nu\} = \emptyset$.

Ainsi si deux éléments sont « incomparables » par la relation $\geqslant$, il n'existe pas d'élément de S_n qui les « minore » tous les deux.

(« $s_\alpha \geqslant s_\beta$ » peut se lire « s_β est subordonné à s_α ». La deuxième propriété est nécessaire pour éviter à un subordonné d'avoir à exécuter des ordres contradictoires.)

Soit un graphe $(S_n, \geqslant)$ où $\geqslant$ est une relation de hiérarchie définie sur S_n. A ce graphe nous pouvons associer biunivoquement un autre graphe, obtenu par suppression des n boucles résultant de la réflexivité et des arcs résultant de la transitivité de la relation $\geqslant$.

$\overleftarrow{\mathring{A}}(S_n)$ est l'ensemble de tous les graphes ainsi obtenus ; la racine d'un arbre de $\overleftarrow{\mathring{A}}(S_n)$ est le majorant universel du demi-treillis supérieur défini par la relation de hiérarchie à laquelle cet arbre correspond.

Proposons aussi une autre définition de l'ensemble $\overrightarrow{\mathring{A}}(S_n)$ parce que dans la suite de cette étude, nous choisissons de travailler avec $\overrightarrow{\mathring{A}}(S_n)$ et que cette définition nous offre une terminologie commode :

---

1. Ce que nous appelons « arbre pointé » correspond à ce qui est souvent appelé dans la littérature anglo-saxonne « (unoriented) rooted tree (with distinct points) ».

Appelons application isopotente de S_n dans S_n toute application γ de S_n dans S_n vérifiant l'une des trois propriétés équivalentes suivantes [1].

(1) $\exists s_\rho \in S_n$ tel que $\forall s_\nu \in S_n$,

$$\exists i_\nu \geqslant 0 \text{ tel que } \forall j \geqslant i_\nu,\ \gamma^j(s_\nu) = s_\rho$$

(1′) $\exists s_\rho \in S_n$ et $\exists i_0 \geqslant 0$ tel que,

$$\forall s_\nu \in S_n,\ \gamma^{i_0}(s_\nu) = s_\rho$$

(1″) $\exists s_\rho \in S_n$ et $\exists i_0 \geqslant 0$ tels que,

$$\forall s_\nu \in S_n \text{ et } \forall j \geqslant i_0,\ \gamma^j(s_\nu) = s_\rho$$

s_ρ est donc un point fixe pour l'application γ :

$$\gamma(s_\rho) = s_\rho$$

et il est le seul : $\quad \forall s_\nu \in S_n - \{ s_\rho \},\ \gamma(s_\nu) \neq s_\nu$.

Soit un graphe (S_n, γ) où γ est une application isopotente de S_n dans S_n ; à ce graphe, nous pouvons associer biunivoquement un autre graphe, obtenu par suppression de la boucle résultant de ce que l'application γ admet un point fixe.

$\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est l'ensemble de tous les graphes ainsi obtenus ; la racine d'un arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est le point fixe de l'application isopotente à laquelle cet arbre correspond.

Pour illustrer ces définitions, nous donnons par la figure 1 une représentation de tous les arbres libres de $A(S_4)$; il y en a 16, ce qui est bien conforme à la forme de Cayley ($4^{4-2} = 16$).

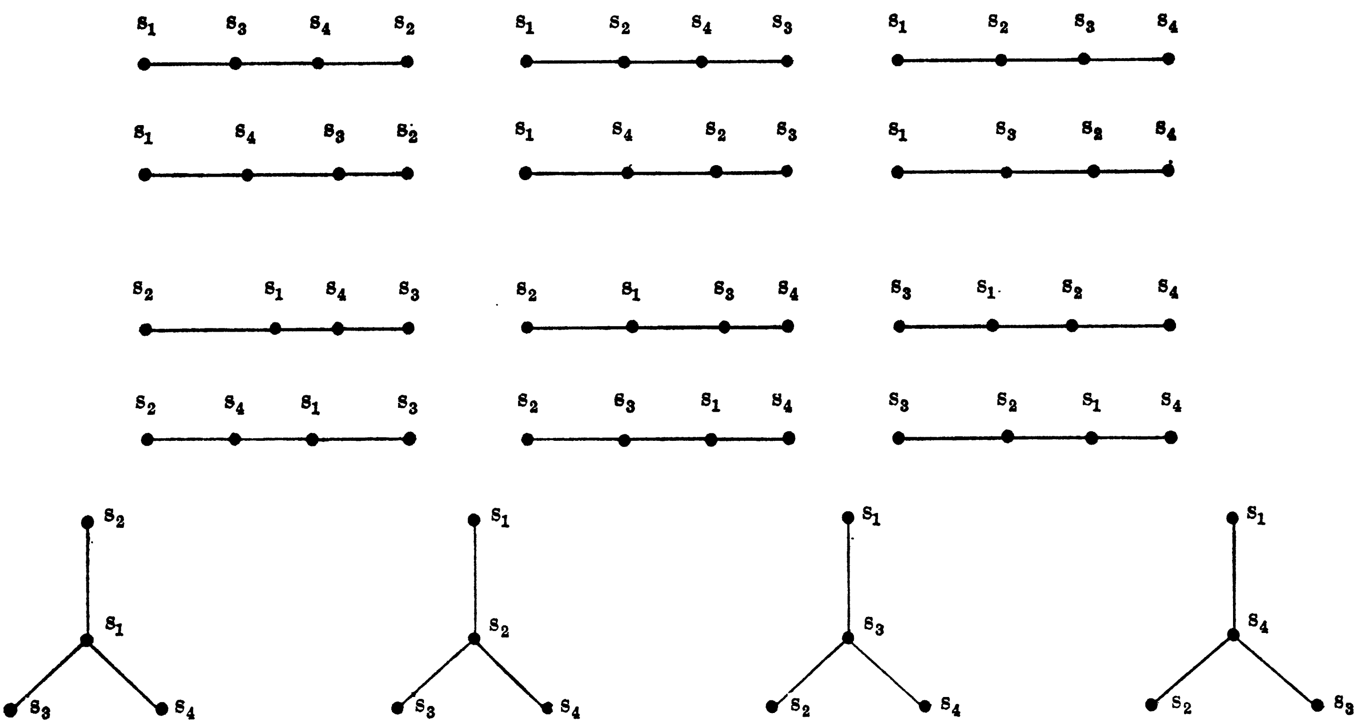

Fig. 1

---

1. Selon les conventions habituelles d'écriture,

$\forall s_\nu \in S_n$ nous posons $\gamma^0(s_\nu) = s_\nu$

et $\gamma^{h+1}(s_\nu) = \gamma[\gamma^h(s_\nu)]$, $\forall h \geqslant 0$

Par conséquent : $\gamma^1(s_\nu) = \gamma(s_\nu)$

et $\gamma^{h_1+h_2}(s_\nu) = \gamma^{h_1}[\gamma^{h_2}(s_\nu)] = \gamma^{h_2}[^{h_1}(s_\nu)]$, $\forall h_1$ et $h_2 \geqslant 0$

Chacun de ces 16 arbres libres engendre 4 arbres pointés, puisque un arbre pointé est le couple constitué d'un arbre libre et de l'un des 4 éléments de S_4.

Il est facile de préciser d'une part l'arbre de $\overset{\leftarrow\circ}{A}(S_4)$ et la relation de hiérarchie et d'autre part l'arbre de $\overset{\rightarrow\circ}{A}(S_4)$ et l'application isopotente en correspondance avec chacun des arbres pointés. Par exemple l'arbre pointé $\left(s_1 \text{—} s_2 \text{—} s_4 \text{—} s_3, s_2 \right)$ est en correspondance avec l'arbre de $\overset{\leftarrow\circ}{A}(S_4)$ représenté par la figure 1 bis et avec la relation de hiérarchie $\geqslant$ qui est telle que :

$s_1 \geqslant s_1\ ;\ s_1 \not\geqslant s_2\ ;\ s_1 \not\geqslant s_3\ ;\ s_1 \not\geqslant s_4$

$s_2 \geqslant s_1\ ;\ s_2 \geqslant s_2\ ;\ s_2 \geqslant s_3\ ;\ s_2 \geqslant s_4$

$s_3 \not\geqslant s_1\ ;\ s_3 \not\geqslant s_2\ ;\ s_3 \geqslant s_3\ ;\ s_3 \not\geqslant s_4$

$s_4 \not\geqslant s_1\ ;\ s_4 \not\geqslant s_2\ ;\ s_4 \geqslant s_3\ ;\ s_4 \geqslant s_4$

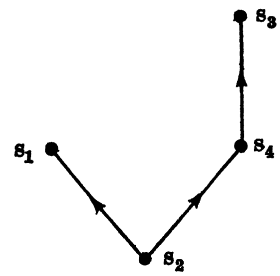

Fig. 1 bis

il est en correspondance avec l'arbre de $\overset{\rightarrow\circ}{A}(S_4)$ représenté par la figure 1 ter et avec l'application isopotente γ qui est telle que :

$\gamma(s_1) = s_2\ ;\ \gamma(s_2) = s_2\ ;\ \gamma(s_3) = s_4\ ;\ \gamma(s_4) = s_2.$

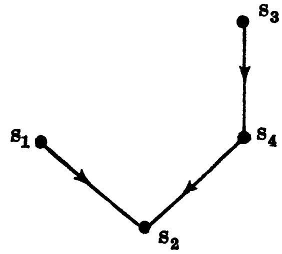

Fig. 1 ter

2. — DESCRIPTION D'UN ARBRE DE L'ENSEMBLE $\overset{\rightarrow\circ}{A}(S_n)$.

Soit donc γ une application isopotente de S_n dans S_n ; considérons l'arbre correspondant.

Désignons toujours par s_ρ le point fixe de l'application γ.

Soit h_ν la plus petite valeur de i_ν telle que $\gamma^{i_\nu}(s_\nu) = s_\rho$ $\quad (h_\nu \leqslant n - 1)$
et soit h_0 la plus petite valeur de i_0 telle que, $\forall s_\nu \in S_n$, $\gamma^{i_0}(s_\nu) = s_\rho$

$$h_0 = \sup_{\nu \in [1, n]} h_\nu \qquad (h_0 \leqslant n - 1)$$

Soient $s_\nu \in S_n$ et $s_\pi \in S_n$; si $\gamma(s_\nu) = s_\pi$ et si $s_\nu \neq s_\pi$ nous disons que s_ν est un antécédent de s_π et que s_π est le conséquent de s_ν. Plus généralement, $\forall s_\nu \in S_n - \{ s_\rho \}$, nous appelons conséquents successifs de s_ν les h_ν éléments $\gamma(s_\nu)$, $\gamma^2(s_\nu)$, ... , $\gamma^{h_\nu}(s_\nu)$.

Seul s_ρ n'a pas de conséquent (puisque $\gamma(s_\rho) = s_\rho$). Ce sommet s_ρ est appelé racine de l'arbre, comme nous l'avons déjà dit, ou encore sommet de hauteur 0.

Cette racine s_ρ a au moins un antécédent ; nous appelons sommets de hauteur 1 les antécédents de s_ρ. Plus généralement, $\forall h \in [1, h_0]$, nous appelons sommets de hauteur h les antécédents des sommets de hauteur $h - 1$. Désignons par H_h l'ensemble des sommets de hauteur h. les $h_0 + 1$ ensembles : $H_0 (H_0 = \{ s_\rho \})$, H_1, H_2, ... , H_{h_0}, constituent une partition de l'ensemble S_n [1].

Il y a au moins un sommet n'ayant pas d'antécédent, et il y en a au plus $n - 1$.

Appelons extrémité de branche un tel sommet, E le sous-ensemble de S_n constitué de ces extrémités de branche, et p le cardinal de E ($1 \leqslant p \leqslant n - 1$), et soient, rangés par ordre des indices croissants, s_{ν_1}, s_{ν_2}, ... , s_{ν_p} les p extrémités de branche ($1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_p \leqslant n$).

1. Un exemple illustre ces définitions, en fin de paragraphe.

Posons $B_o = \{ s_\rho \}$ et $l_o = 1$,

et appelons branche B_1 de l'arbre le sous-ensemble de S_n constitué de s_{ν_1} et de ses conséquents successifs jusqu'à s_ρ exclu, et désignons par l_1 le cardinal de B_1.

Plus généralement, $\forall k \, \varepsilon [1, p]$, appelons branche B_k de l'arbre le sous-ensemble de S_n constitué de s_{ν_k} et de ses conséquents successifs non encore apparus dans la réunion $\bigcup\limits_{\alpha=0}^{k-1} B_\alpha$, et désignons par l_k le cardinal de B_k. Les $p + 1$ sous-ensembles $B_o, B_1, B_2, \ldots, B_p$ constituent une nouvelle partition de l'ensemble S_n, et par conséquent $\sum\limits_{k=0}^{p} l_k = n$ (et donc $\sum\limits_{k=1}^{p} l_k = n - 1$). Comme d'une part nous pouvons totalement ordonner l'ensemble des branches par ordre des indices croissants et comme d'autre part, chaque branche étant évidemment composée de sommets de hauteurs toutes distinctes, nous pouvons totalement ordonner l'ensemble des sommets d'une même branche par ordre des hauteurs croissantes, nous pouvons totalement ordonner l'ensemble des $n - 1$ sommets de $S_n - \{ s_\rho \} = \bigcup\limits_{k=1}^{p} B_k$ en affectant à chacun de ces $n - 1$ sommets un numéro d'ordre compris entre 1 et $n - 1$ de la manière suivante : les l_1 sommets de B_1 sont numérotés de 1 à l_1 par ordre des hauteurs croissantes $\left(\text{Ainsi, } \forall l \, \varepsilon [1, l_1], \text{ le sommet numéroté } l \text{ est } \gamma^{l_1 - l}(s_{\nu_1}) \right)$.

Puis, si $p \geqslant 2$, $\forall k \in [2, p]$, les l_k sommets de B_k sont numérotés de $\sum\limits_{\alpha=1}^{k-1} l_\alpha + 1$ à $\sum\limits_{\alpha=1}^{k} l_\alpha$ par ordre des hauteurs croissantes $\left(\text{Ainsi, } \forall l \, \varepsilon [1, l_k], \text{ le sommet numéroté } \sum\limits_{\alpha=1}^{k-1} l_\alpha + l \text{ est } \gamma^{l_k - l}(s_{\nu_k}) \right)$.

Pour illustrer ces nouvelles définitions et conventions considérons l'arbre de $A(S_{13})$ représenté par la figure 2.

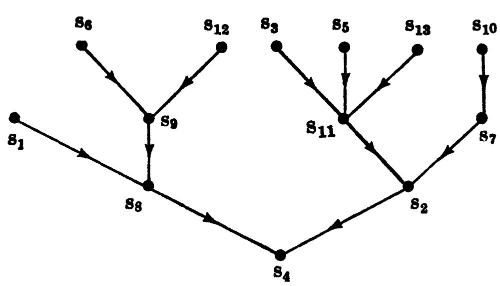

Fig. 2

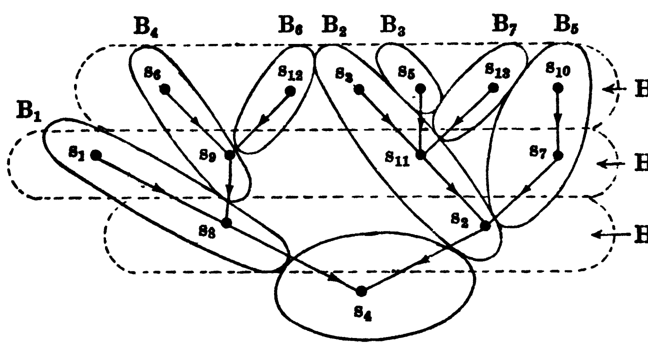

Fig. 2 bis

Pour cet arbre dont la racine est s_4, $h_o = 3$ et $p = 7$.

Par la figure 2 bis sont représentés les 4 ensembles H_o, H_1, H_2 et H_3 et les 8 ensembles $B_o, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ et B_7.

Les 12 sommets de $\bigcup\limits_{k=1}^{7} B_k$ sont ainsi numérotés de 1 à 12.

numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
sommet	s_8	s_1	s_2	s_{11}	s_3	s_5	s_9	s_6	s_7	s_{10}	s_{12}	s_{13}

3. — CONSTRUCTION D'UNE CORRESPONDANCE BIUNIVOQUE ENTRE L'ENSEMBLE D'ARBRES $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ ET L'ENSEMBLE $M_{n-1}(S_n)$ DES MOTS DE $n - 1$ LETTRES ÉCRITS AVEC S_n POUR ALPHABET.

Un arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ étant donné, faisons-lui correspondre le mot de $M_{n-1}(S_n)$ ainsi obtenu :

$\forall i \in [1, n - 1]$, la ième lettre du mot est l'élément de S_n qui est le conséquent du sommet de l'arbre auquel a été affecté, par le procédé décrit ci-dessus, le numéro i.

Par exemple, le mot de $M_{12}(S_{13})$ que nous faisons correspondre à l'arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_{13})$ représenté par la figure 2 est :

$$s_4\ s_8\ s_4\ s_2\ s_{11}\ s_{11}\ s_8\ s_9\ s_2\ s_7\ s_9\ s_{11}$$

Il est utile de remarquer que :

1°) la première lettre du mot est l'élément de S_n qui est la racine de l'arbre auquel ce mot correspond.

2°) $\forall s_\nu \in S_n$, la lettre s_ν apparaît autant de fois dans le mot que le sommet s_ν de l'arbre auquel ce mot correspond a d'antécédents ; en particulier les éléments de S_n qui n'apparaissent pas dans le mot sont les extrémités de branche de cet arbre.

En faisant ainsi correspondre à tout arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ un mot de $M_{n-1}(S_n)$ nous définissons une application de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ dans $M_{n-1}(S_n)$ et cette application est évidemment injective.

Elle est aussi surjective. En effet, un mot de $M_{n-1}(S_n)$ étant donné, nous pouvons reconstituer l'arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ auquel ce mot correspond par le procédé décrit ci-dessus, au moyen de la construction suivante :

Considérons les lettres de S_n qui ne figurent pas dans le mot. Il y a au moins une et au plus $n - 1$ telles lettres. Comme ces éléments de S_n doivent correspondre aux extrémités de branche de l'arbre, appelons E l'ensemble qu'ils constituent, p le cardinal de E, et après avoir rangé les p éléments de E par ordre des indices croissants, désignons-les respectivement par :

$$s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \dots, s_{\nu_p} \quad (1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_p \leqslant n).$$

Soit $\overline{E}$ le complémentaire de E par rapport à S_n :
$\overline{E} = S_n - E$; le cardinal de $\overline{E}$ est égal à $n - p$. Répartissons ensuite les $n - 1$ lettres du mot, lettres distinctes ou non, en 2 classes, celle des lettres inédites et celle des lettres réemployées, en convenant que :

1°) la première lettre du mot est inédite,

2°) $\forall i \in [2, n - 1]$, la ième lettre du mot est inédite si elle n'apparaît pas dans le sous-mot constitué des $i - 1$ premières lettres, et elle est réemployée dans le cas contraire.

Comme il est naturel de le faire, convenons de désigner, $\forall i \in [1, n - 1]$, par rang de la ième lettre du mot l'entier i.

Soit R l'ensemble des rangs des lettres réemployées, et soit $\overline{R}$ l'ensemble des rangs des lettres inédites du mot :

$$R \cap \overline{R} = \emptyset \text{ et } R \cup \overline{R} = [1, n - 1]$$

Le cardinal de $\overline{R}$ est égal au cardinal de $\overline{E}$, soit à $n - p$ et le cardinal de R à :

$$(n - 1) - (n - p) = p - 1 \quad (\text{si } p = 1,\ R = \emptyset).$$

Soient, par ordre croissant, $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ les $p - 1$ nombres de R :

$$(2 \leqslant r_1 < r_2 < \dots < r_{p-1} \leqslant n - 1)$$

Posons $r_0 = 1$, $r_p = n$ et $\forall k \in [1, p]$, $l_k = r_k - r_{k-1}$. Nous déterminons ainsi p entiers positifs $l_1, l_2, \dots, l_p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} l_k = r_p - r_0 = n - 1.$$

Ces p nombres représentent respectivement les cardinaux des p branches $B_1, B_2, \dots, B_p$ de l'arbre auquel le mot correspond. L'ensemble des sommets de chacune de ces p branches étant totalement ordonné par ordre des hauteurs croissantes, nous pouvons ainsi décrire cet arbre :

sa racine est l'élément de S_n première lettre du mot ;

si $l_1 \geqslant 2$, $\forall l \in [1, l_1 - 1]$, le lième sommet de B_1 est la lettre de rang $l + 1$;

le l_1 ième sommet de B_1, sommet extrémité de cette branche, est s_{v_1}.

Plus généralement, si $p \geqslant 2$, $\forall k \in [1, p]$, le conséquent du 1er sommet de B_k est la lettre de rang r_{k-1} ;

si $l_k \geqslant 2$, $\forall l \in [1, l_k - 1]$, le lième sommet de B_k est la lettre de rang $r_{k-1} + 1$;

enfin le l_k ième sommet de B_k, sommet extrémité de cette branche, est s_{v_k}.

Par exemple : considérons le mot de $M_{12}(S_{13})$:

$$s_4\ s_8\ s_4\ s_2\ s_{11}\ s_{11}\ s_8\ s_9\ s_2\ s_7\ s_9\ s_{11}$$

les lettres de S_n qui n'apparaissent pas dans ce mot sont, par ordre des indices croissants :

$$s_1, s_3, s_5, s_6, s_{10}, s_{12} \text{ et } s_{13}.$$

Il y en a $p = 7$.

Les $p - 1 = 6$ rangs des lettres réemployées sont, par ordre croissant :

3, 6, 7, 9, 11 et 12.

L'arbre auquel ce mot correspond est donc constitué, outre de B_0 se réduisant à la racine, des 7 branches B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, et B_7 de cardinaux respectifs :

$l_1 = 3 - 1 = 2$, $\quad l_2 = 6 - 3 = 3$, $\quad l_3 = 7 - 6 = 1$

$l_4 = 9 - 7 = 2$, $\quad l_5 = 11 - 9 = 2$, $\quad l_6 = 12 - 11 = 1$

et $l_7 = 13 - 12 = 1$.

La racine de l'arbre est s_4.

D'où la description de l'arbre :

Branche	*Conséquent du 1er sommet de la branche*	*Sommets de la branche rangés par ordre des hauteurs croissantes*
B_1	s_4 (c'est la racine de l'arbre)	s_8 et s_1
B_2	s_4	s_2, s_{11} et s_3
B_3	s_{11}	s_5
B_4	s_8	s_9 et s_6
B_5	s_2	s_7 et s_{10}
B_6	s_9	s_{12}
B_7	s_{11}	s_{13}

Nous retrouvons bien l'arbre représenté par la figure 2.

4. — QUELQUES RÉSULTATS COMBINATOIRES ÉTABLIS AU MOYEN DE LA CORRESPONDANCE BIUNIVOQUE PRÉCÉDEMMENT CONSTRUITE ENTRE L'ENSEMBLE D'ARBRES $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ ET L'ENSEMBLE DE MOTS $M_{n-1}(S_n)$.

Il est d'abord évident que le cardinal de $M_{n-1}(S_n)$ est égal à n^{n-1}, puisque $\forall i \in [1, n-1]$ il y a n manières de choisir la lettre de rang i d'un mot de $M_{n-1}(S_n)$.

Par conséquent, le cardinal de chacun des trois ensembles $\overset{\circ}{A}(S_n)$, $\overset{\leftarrow\circ}{A}(S_n)$ et $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ est égal à n^{n-1} et puisque $\overset{\circ}{A}(S_n) = A(S_n) \times S_n$, le cardinal de l'ensemble $A(S_n)$ est égal à n^{n-2}, et nous redémontrons ainsi les résultats de Cayley.

Nous pouvons aussi très facilement calculer le nombre d'arbres vérifiant certaines conditions supplémentaires, comme le prouvent les quelques exemples suivants :

$\forall p \in [1, n-1]$, le nombre d'arbres de $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ ayant p extrémités de branche est égal à:

$$C_n^p\, S(n-1, n-p)$$

où S(a, b) désigne le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal a sur un ensemble de cardinal b.

$$(S(a, b) = \sum_{c=0}^{b} (-1)^c\, C_b^c (b-c)^a).$$

En effet les mots de $M_{n-1}(S_n)$ en correspondance biunivoque avec ces arbres sont ceux où p des n lettres de S_n ne figurent pas.

Or, pour définir un tel mot, il suffit de choisir l'ensemble E des p lettres qui n'y figurent pas, puis, un choix étant fait, de se donner une surjection de l'ensemble $[1, n-1]$ des $n-1$ rangs de lettres sur l'ensemble $\overline{E} = S_n - E$ des $n-p$ autres lettres de S_n.

En particulier, le nombre d'arbres de $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ ayant une seule extrémité de branche est égal à :

$$C_n^1\, S(n-1, n-1) = n\,!$$

et le nombre de ceux ayant $n-1$ extrémités de branche est égal à : $C_n^{n-1}\, S(n-1, 1) = n$.

Appelons « nœud» d'un arbre de $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ tout sommet ayant plusieurs antécédents, F le sous-ensemble de S_n constitué de ces nœuds et q le cardinal de F : $q \geqslant 0$.

Considérons d'abord le cas particulier $q = 0$.

Le nombre d'arbres de $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ sans nœud est égal à n !.

En effet, les mots de $M_{n-1}(S_n)$ en correspondance biunivoque avec ces arbres sont ceux ne contenant pas de lettre réemployée, donc ceux pour lesquels $R = \varnothing$ et par conséquent $p = 1$.

Considérons ensuite le cas $q \geqslant 1$.

$e\left(\frac{n-1}{2}\right)$ désignant la partie entière de $\frac{n-1}{2}$, I(a, b) le nombre d'injections d'un ensemble de cardinal a dans un ensemble de cardinal b $(I(a,b) = (b)_a = b(b-1)(b-2)\dots(b-a+1))$ et $\sum\limits_{(x_1, x_2 \dots, x_q)}$ la somme étendue aux $C_q^{\sigma} - 1 + \sigma$ systèmes d'entiers non négatifs $x_1, x_2, \dots, x_q$ tels que $\sum\limits_{m=1}^{q} x_m = \sigma$

$\forall q \in \left[1, e\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]$, le nombre d'arbres de $\overset{\to\circ}{A}(S_n)$ ayant q nœuds est égal à :

$$C_n^q \left\{ \sum_{\sigma=0}^{n-1-2q} \left[\sum_{(x_1, x_2 \dots x_q)} \prod_{m=1}^{q} \left(C_{n-2m+1}^{2+x_m} - \sum_{\alpha < m} x_\alpha \right) \right] \times I(n-1-2q-\sigma, n-q) \right\}$$

ou encore, après simplifications, à :

$$\frac{n\,!\,(n-1)\,!}{q\,!} \sum_{\sigma=0}^{n-1-2q} \frac{1}{(n-1-2q-\sigma)\,!\,(q+1+\sigma)\,!} \left[\sum_{(x_1, x_2 \dots x_q)} \prod_{m=1}^{q} \frac{1}{(2+x_m)\,!} \right]$$

En effet, les mots de $M_{n-1}(S_n)$ en correspondance biunivoque avec ces arbres sont ceux où q des n lettres de S_n figurent au moins deux fois, les n-q autres lettres de S_n y figurant au plus une fois.

Or pour définir un tel mot, il suffit de se donner q entiers non négatifs $x_1, x_2 \dots x_q$ tels que :

$$\sigma = \sum_{m=1}^{p} x_m \leqslant n - 1 - 2q \qquad \left(n - 1 - 2q \geqslant 0 \text{ puisque } q \leqslant e\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

et de choisir l'ensemble F des q lettres de S_n qui y figurent au moins deux fois, puis les q lettres choisies étant respectivement désignées par ordre des indices croissants, par $s_{\nu'_1}, s_{\nu'_2}, \dots s_{\nu'_q}$

$$(1 \leqslant \nu'_1 < \nu'_2 < \dots < \nu'_q \leqslant n)$$

de choisir les $2 + x_1$ rangs de la lettre $s_{\nu'_1}$ parmi les $n - 1$ rangs possibles puis les $2 + x_2$ rangs de la lettre $s_{\nu'_2}$ parmi les $n - 3 - x_1$ rangs alors restants et ainsi de suite, puis les q lettres $s_{\nu'_1}, s_{\nu'_2}, \dots s_{\nu'_q}$ de S_n placées, de définir une injection de l'ensemble des $n - 1 - 2q - \sigma$ rangs restants dans l'ensemble $\overline{F} = S_n - F$ des n-q autres lettres de S_n ($\sum_{m=1}^{q} x_m \leqslant n - 1 - 2q$, car le cardinal de l'ensemble R des rangs des lettres réemployées du mot, soit $p - 1$, est égal à $q + \sum_{m=1}^{q} x_m$, et le cardinal de l'ensemble $\overline{R}$ des rangs des lettres inédites, soit n-p, est au moins égal à q).

De la même manière, il est facile de vérifier que, $\sum_{(x_1, x_2 \dots x_q)}$ désignant maintenant la somme étendue aux C_{p-2}^{q-1} systèmes d'entiers non négatifs $x_1, x_2, \dots x_q$ tels que $\sum_{m=1}^{q} x_m = p - q - 1$, $\forall p$ et q entiers tels que $q \geqslant 1$, $p \geqslant 1 + q$ et $p + q \leqslant n$, le nombre d'arbres de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ ayant p extrémités de branches et q nœuds est égal à :

$$C_n^p \, C_{n-p}^q \left[\sum_{(x_1, x_2, \dots x_q)} \prod_{m=1}^{q} \left(C_{n-2m+1}^{2+x_m} - \sum_{\alpha < m} x_\alpha \right) \right] \times (n - p - q)\,!$$

ou encore, après simplifications, à :

$$\frac{n\,!\,(n-1)\,!}{p\,!\,q\,!\,(n-p-q)\,!} \quad \sum_{(x_1, x_2 \dots x_q)} \prod_{m=1}^{p} \left(\frac{1}{(2 + x_m)\,!} \right)$$

Disons qu'un arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est bifurcant (ou dichotomique) si tout sommet de cet arbre est, soit un nœud ayant deux antécédents, soit une extrémité de branche. Alors $p + q = n$ et $\forall m \, \varepsilon [1,q], x_m = 0$, donc $q = p - 1$ et ainsi $n = 2q + 1$: seuls les arbres ayant un nombre impair de sommets peuvent être bifurcants et, si $n = 2q + 1$, le nombre d'arbres bifurcants de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est égal à :

$$\frac{(2q+1)\,!\,2q\,!}{(q+1)\,!\,q\,!} \times \frac{1}{2^q}$$

Plus généralement, disons qu'un arbre de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est f-furcant ($f \geqslant 2$) si tout sommet de cet arbre est soit un nœud ayant f antécédents, soit une extrémité de branche. Alors $p + q = n$ et $\forall m \, \varepsilon [1,q]$, $x_m = f - 2$, donc $(f - 1)q = p - 1$ et ainsi $n = fq + 1$: seuls les arbres dont le nombre de sommets est égal à 1 modulo-f peuvent être f-furcants et, si $n = fq + 1$, le nombre d'arbres f-furcants de $\overset{\rightarrow o}{A}(S_n)$ est égal à :

$$\frac{(fq+1)\,!\,.\,(fq)\,!}{[(f-1)q+1]\,!\,q\,!} \times \frac{1}{(f\,!)^q}$$

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Des démonstrations des résultats de Cayley ont été successivement proposées par quelques auteurs et entre autres par :

PRÜFER. — « Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen», *Archiv. der Math und Phys.* (3) Vol. 27 (1918) p. 142-144.

POLYA. — « Kombinatorische Anzahlbestimmunger fur Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen», *Acta Math.* Vol. 68 (1937), p. 145-254.

BOL. — « Uber eine kombinatorische Frage», *Abh. Math. Seminar der Hansischen Univ.*, Vol. 12 (1938), p. 242-245.

Des études sur les arbres se trouvent développées dans différents ouvrages parmi lesquels on peut citer :

RIORDAN. — *An introduction to combinatorial Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1958.

ORE. — « Theory of Graphs », American Mathematical Society — Colloquium publications, Vol. XXXVIII, 1962.

Des bibliographies plus complètes sont proposées dans chacun de ces ouvrages.