C. LERMAN

Essai sur l'analyse hiérarchique

Mathématiques et sciences humaines, tome 17 (1966), p. 37-46
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__17__37_0>

C. LERMAN

ESSAI SUR L'ANALYSE HIERARCHIQUE

L'article de Monsieur C. Lerman est un résumé d'un rapport ronéotypé que l'on peut se procurer au **Centre de Calcul de la Maison des Sciences de l'Homme, 13, Cité de Pusy, Paris XVII°.** Nous souhaitons accueillir ainsi de plus en plus souvent dans ce bulletin des résumés, rédigés par leurs auteurs, de travaux intéressants et que l'on ne peut se procurer en librairie.

En ce qui concerne le travail de Monsieur Lerman, son intérêt réside d'abord en ce qu'il propose des algorithmes, reposant sur une certaine idée de la "distance", pour déterminer l'échelle hiérarchique s'ajustant au mieux avec des patrons de réponse observés; c'est aux praticiens de dire si les distances qu'il introduit leur semblent bien traduire leur propre idée de "l'écart" entre patrons de réponse; ajoutons qu'en ce qui concerne la distance appelée d_2 par M. Lerman, la plus classique parce que la plus conforme à la structure algébrique sous-jacente, et pour laquelle cet article ne propose pas d'algorithme, le bulletin publiera prochainement une solution.

La seconde raison de l'intérêt que présente cet article est qu'il propose, dans sa partie consacrée au "Modèle Probabiliste" une voie par laquelle peut se faire le raccord entre Analyse hiérarchique (au sens de Guttmann) et Analyse de la structure latente (au sens de P. Lazarfeld). N.D.L.R.

A. GENERALITES

I. - Introduction

Le point de départ de ce travail a été l'étude de l'ouvrage de Monsieur B. Matalon "L'Analyse Hiérarchique" Gauthier-Villars (1965). Nous nous étions d'abord proposés de dégager et de préciser les différentes notions et méthodes en leur donnant une formulation mathématique; ce faisant nous avons retrouvé le cadre mathématique dans lequel se posent les problèmes les plus généraux de l'Analyse Hiérarchique et étudié dans ce cadre ces problèmes. De ce fait, certaines questions laissées ouvertes, ont été traitées.

II.- Définitions et Modèle Mathématique

1. - *Définitions générales*

Nous appellerons "item" la donnée d'un ensemble fini de comportements proposés. Une "modalité" de l'item est un élément de l'ensemble, c'est-à-dire, un comportement proposé. On distingue habituellement les items dichotomiques des items non-dichotomiques. Un item est dichotomique, si le nombre de ses modalités est deux et ne l'est pas, si le nombre de ses modalités est strictement supérieur à deux. L'item est dit présentant n modalités si le nombre de ses modalités est n.

Nous supposons avoir défini sur l'item, c'est-à-dire, sur l'ensemble des comportements proposés, une relation d'ordre; cette relation d'ordre est en général une relation de préférence par rapport à un but donné de caractère psychologique, social ou autre. Si l'item est totalement ordonné par la relation d'ordre définie, il sera dit total.

Nous nous interesserons seulement aux items totaux, nous ne restreignons pas ainsi la généralité de notre étude parce qu'on peut toujours se ramener à ce cas en réalisant une partition de l'item non total en items totaux. Notons a_0, a_1, ..., a_{n-1}, les modalités de l'item total $\underline{a}$, où on a :

$$a_0 \,\dot{<}\, a_1 \,\dot{<}\, \dots \,\dot{<}\, a_{k-1} \,\dot{<}\, a_k \,\dot{<}\, \dots \,\dot{<}\, a_{n-1};$$

la modalité a_k est dite avoir le "code" k.

Exemples:

1) La question "Lisez-vous le journal $\mathcal{J}$?" définit un item dichotomique; les deux modalités de l'item sont :

a_0 : non lecture du journal $\mathcal{J}$

a_1 : lecture du journal $\mathcal{J}$

2) Si vous aviez plus de temps, est-ce que vous pensez que vous vous mettriez à lire le journal $\mathcal{J}$ de façon plus régulière?

	Code
Non, sûrement pas	☐ 0
Non, probablement pas	☐ 1
Oui, probablement	☐ 2
Oui, certainement	☐ 3

Cet item est non-dichotomique et présente quatre modalités.

2. - *Variable sous jacente à un item total*

Soit un item total $\underline{a}$ présentant n modalités: $a_0 \,\dot{<}\, a_1 \,\dot{<}\, \dots \,\dot{<}\, a_k \,\dot{<}\, \dots \,\dot{<}\, a_{n-1}$. On admet l'existence d'une échelle dense (*) de valeurs (α) que nous représenterons

(*) Une échelle est dite ici dense dans le sens que Cantor donnait à ce mot pour les types d'ordres: entre deux éléments distincts quelconques x et y de l'échelle, on peut toujours en insérer un troisième z (et par suite une infinité).
Exemples d'échelles denses: l'ensemble ordonné Q des rationnels (fractions), l'ensemble ordonné D des nombres décimaux. N.D.L.R.

par un demi-axe orienté de gauche à droite. La variable α est liée à l'item a de la façon suivante: "Un sujet donné répond à l'item a par la modalité a_k, si et seulement si la valeur de la variable α, mesurée sur le sujet est comprise entre deux bornes α_k et α_{k+1}, indépendantes du sujet: $\alpha_k \leqslant \alpha < \alpha_{k+1}$". On se donne $\alpha_o = 0$ et $\alpha_n = +\infty$ et on a pour les valeurs α_k

$$0 = \alpha_o < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \ldots < \alpha_n = +\infty$$

L'item a définit sur l'axe de (α) une subdivision $(\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$

La variable α est dite sous-jacente à l'item a.

Bien qu'elles nous soient inconnues, les valeurs α_k sont supposées fixées par la donnée de l'item. Par la suite nous montrerons comment déterminer les nombres α_k dans le cadre d'un modèle probabiliste qui suppose l'échelle des valeurs α continue.

Deux items totaux a et b se réfèrent à une même variable si la variable sous-jacente à l'un des items est la même que celle sous-jacente à l'autre; chacun des items définit sur l'axe de la variable commune une subdivision.

3. - *Système représentatif - Graphe associé*

En vue de l'étude d'une population donnée de sujets pour un but fixé, on suppose qu'il y a un ensemble fini d'items totaux a^j (a indice supérieur j), $j = 1, 2, \ldots, m$. Nous appelons système représentatif la donnée de l'ensemble produit :

$$a^1 \times a^2 \times \ldots \times a^j \times \ldots \times a^m$$

A l'item a^j nous associons l'ensemble des codes de ses modalités que nous notons Ω_j. A l'ensemble produit $a^1 \times a^2 \times \ldots \times a^m$, nous associons l'ensemble produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_m$. Les éléments de Ω sont les points $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_m)$ où ω_j est le code d'une modalité de l'item a^j ;

$$0 \leqslant \omega_j \leqslant r_j : \omega_j \in \Omega_j$$

A Ω_j associons un axe de $\mathbb{N}^m$ de vecteur unité $\vec{U}_j$. Dans ces conditions Ω est représenté géométriquement par le parallélotope de $\mathbb{N}^m$: $(0,1,2,\ldots,r_1) \times (0,1,\ldots,r_2) \times \ldots \times (0,1,\ldots,r_m)$.

Définissons sur Ω la relation d'ordre $(\leqslant)$:
$(\omega_1,\ldots,\omega_j,\ldots,\omega_m) \leqslant (\omega'_1,\ldots,\omega'_j,\ldots,\omega'_m)$ si et seulement si $\omega_j \leqslant \omega'_j$; $\forall j=1,2,\ldots,m$;
Ω muni de la relation d'ordre détermine un graphe (Ω, U); les sommets du graphe sont les points $(\omega_1,\ldots,\omega_j,\ldots,\omega_m)$, $\omega_j \in \Omega_j$; du point $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_j,\ldots,\omega_m)$ sont issus les arcs joignant le point ω respectivement aux points de l'ensemble noté $\Gamma\omega$:

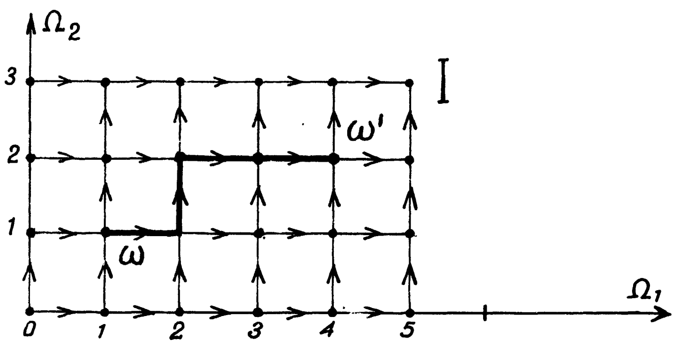
$$\Gamma\omega = \left\{(\omega_1,\ldots,\omega_{(j-1)}, \omega_j+1, \omega_{(j+2)},\ldots,\omega_m); \omega_j+1 \leqslant r_j,\ j=1,2,\ldots,m\right\}$$

Dans notre représentation géométrique, nous matérialiserons l'arc joignant $(\omega_1, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_m)$ à $(\omega_1, \ldots, \omega_{(j-1)}, \omega_j^{+1}, \omega_{(j+1)}, \ldots, \omega_m)$, par le vecteur $\vec{v_j}$.

Un chemin du graphe est une suite de vecteurs $\vec{v_j}$ dont l'extrémité de l'un coïncide avec l'origine du suivant. Nous avons $\omega \leqslant \omega'$ si et seulement s'il existe un chemin du graphe d'origine ω et d'extrémité ω'.

La "longueur d'un chemin" étant le nombre d'arcs qu'il contient, tous les chemins joignant deux points donnés ont la même longueur.

On appelle "score" d'un point $\omega \in \Omega$, la longueur commune de tous les chemins joignant le point $(0,0,0,\ldots,0)$ au point ω. Les deux sommets de scores 0 et $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ seront appelés extrémités du graphe.



Représentation géométrique du graphe associé à $a^1 \times a^2$ où a^1 et a^2 sont des items totaux présentant respectivement 6 et 4 modalités.

Introduisons sur Ω muni de la relation d'ordre, les deux lois de composition internes $\vee$ et $\wedge$:

$$\omega \vee \omega' = \sup\{\omega, \omega'\}$$
$$\omega \wedge \omega' = \inf\{\omega, \omega'\}$$

Par rapport à ces deux lois Ω a une structure de treillis distributif. La notion de chemin dans le graphe est celle de chaîne dans le treillis.

III.- Description d'une population de sujets

Nous nous donnons un ensemble de sujets $\mathcal{f}$. Considérons l'application de $\mathcal{f}$ dans Ω, notée p et définie comme suit :

$$s \in \mathcal{f} \longrightarrow p(s) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_j, \ldots, \omega_m)$$

où ω_j est le code de la réponse du sujet s à l'item a_j; $j = 1,2,\ldots,m$. Nous appelons p(s) "patron" du sujet s.

Un sommet ω du graphe est dit un "patron observé" si $p^{-1}(\omega) \neq \phi$.

Définitions.

Une échelle, relative au système représentatif, est un ensemble de sommets E de Ω tel qu'il existe un chemin du graphe passant par chacun des points de E, et l'on dit que "le comportement d'une population $\mathcal{f}$ de sujets est unidimensionnel par rapport au système représentatif" si l'ensemble des patrons observés $\{p(s), s \in \mathcal{f}\}$ est une échelle.

Considérons l'ensemble P de tous les patrons observés : $P = \{p(s),\ s \in \mathcal{S}\}$. On dit que "le comportement de la population est K-dimensionnel par rapport au système représentatif" si le nombre minimum d'échelles recouvrant P est K.

On montre aisément qu'une condition suffisante d'unidimensionnalité du comportement de la population par rapport à un système représentatif $a^1 \times a^2 \times \ldots \times a_m$ est que les items a^j, $j = 1,2,\ldots,m$ se réfèrent à une même variable (cf. § II n° 2).

B - ANALYSE HIERARCHIQUE UNIDIMENSIONNELLE

I. - Position du problème

Nous avons défini l'unidimensionnalité du comportement d'une population de sujets, par rapport à un système représentatif, en supposant qu'il n'existe pas de possibilité d'erreur dans le choix, de l'une des modalités d'un item, par le sujet (cf. § II n° 2). On se rend compte du caractère déterministe d'une telle hypothèse qui ne tient pas compte de la présence éventuelle de patrons erronés. Il y a lieu de remplacer cette hypothèse par une hypothèse probabiliste, dans le cadre de laquelle la probabilité d'un patron erroné est petite sans être exactement nulle.

La question principale que se pose l'Analyse hiérarchique est la suivante : Peut-on admettre que les items, du système représentatif, se réfèrent à une même variable? S'il en est ainsi, l'ensemble des patrons observés non erronés est une échelle, qu'il faut alors déterminer. Nous l'estimerons par celle des échelles qui "s'ajuste le mieux" aux patrons observés. Une telle estimation est indépendante de l'existence d'une échelle.

Dans la suite, nous commencerons par préciser l'estimation de l'échelle; puis, nous décrirons un modèle probabiliste, qui tient compte d'une possibilité d'erreur dans le choix d'une modalité d'un item par un sujet. Un tel modèle, dans l'hypothèse d'unidimensionnalité, permettra d'une part de déterminer l'échelle d'autre part de définir les probabilités des différents patrons possibles.

II.- Construction d'une échelle

1. - *Distances adoptées sur l'ensemble* Ω

En vue de la définition de l'écart d'un patron observé à une échelle: nous proposons trois distances sur l'ensemble Ω des sommets de notre graphe. Considérons pour cela les deux graphes suivants liés à $G = (\Omega, U)$.

1) Le graphe G', dit symétrisé de G, obtenu en remplaçant tout arc de G par une arête (liaison non orientée).

2) Le graphe G, dit complété de $\overline{G}$, obtenu à partir de G en reliant d'une arête, tout couple de sommets tels que: $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_m)$

$\exists$ k et h, $k \neq h$: $\omega_j = \omega'_j$ si $j \neq k$ et $j \neq h$

$\omega_k = \omega'_k + 1$ et $\omega_h = \omega'_h - 1$

Nous adoptons sur Ω l'une des distances :

a) d_1 : $d_1(\omega, \omega') = 1$ si $\omega' \neq \omega$ et $d_1(\omega, \omega') = 0$ si $\omega = \omega'$.

b) d_2 : $d_2(\omega, \omega')$ est définie comme étant la longueur (soit le nomtre d'arêtes) de la plus courte chaîne de G' joignant ω à ω'.

c) d_3 : $d_3(\omega, \omega')$ est la longueur du plus court chemin de $\overline{G}$ joignant ω à ω'.

2. - *Ecart d'un patron observé à une échelle*

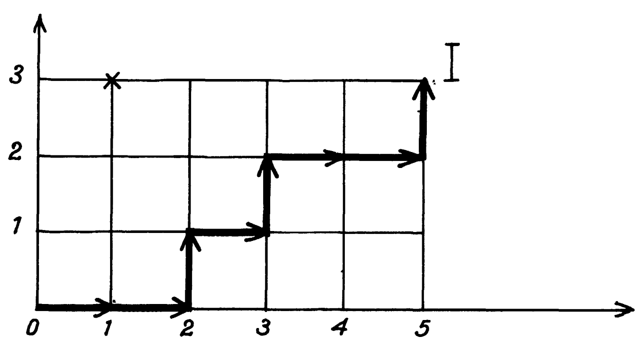
Le choix de l'une des distances d_1, d_2 ou d_3 dépend de considérations concrètes. Si d_i est la distance adoptée sur Ω, l'"écart" d'un patron observé ω à une échelle E est la distance du point ω à E, soit :

$$e_i(\omega, E) = \min_{\gamma \in E} d_i(\omega, \gamma)$$

Exemple:

Considérons le cas du système représentatif $a^1 \times a^2$, où a^1 et a^2 présentent respectivement 6 et 4 modalités, et l'échelle E dont les points sont :

(0,0), (1,0), (2,0), (2,1), (3,1), (3,2), (4,2), (5,2) et (5,3).



$e_1 \left[(1,3), E\right] = 1$

$e_2 \left[(1,3), E\right] = 3$

$e_3 \left[(1,3), E\right] = 2$

Plaçons nous dans le cas de deux items, pour fixer les idées. Faisant l'hypothèse que les deux items se réfèrent à une même variable et que E est l'échelle correspondante, nous mesurons le désaccord entre cette hypothèse et les observations, par la somme des écarts des différents patrons observés à l'échelle.

Si on admet que les différents patrons erronés ont le même "degré d'erreur", on adoptera comme distance d_1 ; la mesure du désaccord est dans ce cas ce qu'on désigne par le "coefficient de reproductibilité".

Si on admet que le "degré d'erreur" du patron erroné $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ est proportionnel à $\min_{(\gamma_1, \gamma_2) \in E} (|\omega_1 - \gamma_1| + |\omega_2 - \gamma_2|)$, on adoptera comme distance d_2.

Enfin, si on admet que le "degré d'erreur" du patron erroné $\omega = (\omega_1 ; \omega_2)$ est proportionnel à $|\omega_1 - \gamma_1| + |\omega_2 - \gamma_2|$ où $(\gamma_1 ; \gamma_2)$ est le patron de l'échelle de même score que $(\omega_1 ; \omega_2)$, on adoptera comme distance d_3.

3. - *Construction d'une échelle*

Dans l'hypothèse d'unidimensionnalité, ayant adopté l'une des distances d_1, d_2 ou d_3, nous estimerons l'échelle E par celle, pour laquelle la somme des écarts des patrons observés à E est minimum. Pour cela, la méthode la plus directe consiste à associer à chaque chemin du graphe G, joignant les extrêmités, la somme des écarts et de retenir celui des chemins pour lequel cette somme est minimum. On peut trouver plus d'un chemin répondant à la question. Nous avons proposé un algorithme simple pour déterminer le chemin minimisant la somme des écarts lorsqu'on adopte l'une des distances d_1 ou d_3.

Rappelons l'état, de la question, que nous venons de traiter, tel que rapporté dans l'ouvrage de M. Matalon (page 55 ligne 8) "... on définit, le plus souvent par tâtonnement, un patron-type pour chaque score total, ces patrons formant une échelle, et on compte le nombre d'erreurs, qu'on introduit dans un coefficient de reproductibilité.

A notre connaissance, aucune des méthodes proposées ne tient compte d'un "degré d'erreur", c'est-à-dire qu'une réponse ≪ 0 ≫ donnée à la place d'une réponse ≪ 3 ≫ n'est pas considérée comme plus fausse qu'une réponse ≪ 2 ≫.

Nous avons montré comment remplacer le tâtonnement par la recherche systématique et comment distinguer un degré d'erreur par le choix judicieux de l'une des distances d_1 ou d_3 (*).

III.- Modèle probabiliste

On se donne une population de sujets et un item total non-dichotomique a présentant (r+1) modalités :

$$a_0 \,'\!< a_1 \,'\!< \dots \,'\!< a_{j-1} \,'\!< a_j \,'\!< \dots \,'\!< a_n$$

α désigne la variable sous-jacente à l'item a, dont on suppose l'échelle des valeurs continue. On a: $0 = \alpha_0 \,'\!< \alpha_1 \,'\!< \alpha_2 \,'\!< \dots \,'\!< \alpha_{j-1} \,'\!< \alpha_j \,'\!< \dots \,'\!< \alpha_r$ en rappelant, l'hypothèse déterministe selon laquelle, un sujet répond à l'item a par la modalité a_{j-1}, si et seulement si la valeur de la variable α : ξ, mesurée sur le sujet est comprise entre α_{j-1} et α_j : $\alpha_{j-1} \,'\!\leqslant \xi \,'\!< \alpha_j$.

(*) Les algorithmes que M. Lerman a élaboré en ce qui concerne les distances d_1 et d_3, sont donnés dans son rapport du Centre de Calcul de la Maison des Sciences de l'Homme, cité en référence au début de cet article.
En ce qui concerne la distance d_2, nous possédons également un algorithme, qui sera donné dans une prochaine livraison de ce bulletin. N.D.L.R.

Nous allons remplacer cette hypothèse par une hypothèse probabiliste qui tiendra compte d'une possibilité d'erreur dans le choix d'une modalité de l'item par le sujet.

Observer sur le sujet une valeur de la variable sous jacente α dans l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ c'est avoir comme réponse du sujet à l'item la modalité a_{j-1}; une telle réponse est exacte si et seulement si la valeur de α mesurée sur le sujet, ξ appartient à l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[$.

Pour un individu donné, dont la valeur de la variable sous-jacente est ξ, nous définissons la probabilité d'observer sur l'individu une valeur inférieure à α_j, $j=1,2,\dots r$, c'est-à-dire la probabilité pour l'individu de répondre à l'item par l'une des modalités $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}$. Nous notons cette probabilité $F_\xi(\alpha_j)$, que nous supposons la même pour tout sujet de notre population et que nous appelons "trace sur l'item de la valeur ξ".

Donnons nous d'autre part, la distribution de la variable sous-jacente sur la population; elle est définie par une fonction de répartition $G(\xi)$.

A partir de ces données, nous pouvons déterminer en fonction des paramètres α_j, la distribution théorique des différentes modalités de l'item sur la population. Nous allons, rapidement, voir comment sur un exemple.

Nous avons proposé le modèle suivant :

La distribution de la variable sous-jacente sur la population est eulérienne :

$$G(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\xi e^{-x} x^{\lambda-1} dx$$

La "trace sur l'item" de la valeur ξ de la variable sous-jacente est définie par :

$$F_\xi(\alpha_j) = \exp\left[\frac{-k\xi}{\alpha_j}\right]$$

λ et k sont deux paramètres donnés.

La proportion théorique des sujets dont la valeur observée est inférieure à α_j est

$$\pi(\alpha_j) = \int_0^\infty e^{-\frac{k\xi}{\alpha_j}} \times \frac{1}{\Gamma(\lambda)} e^{-\xi} \xi^{\lambda-1} d\xi$$

$$= \left[\frac{\alpha_j}{k+\alpha_j}\right]^\lambda$$

La fréquence théorique de la modalité a_j est $\pi(\alpha_{j+1}) - \pi(\alpha_j)$. En égalant les fréquences des différentes modalités à celles obtenues empiriquement, nous déterminons les valeurs α_j dans le cadre du modèle.

Considérons dans ce cadre, le problème de la détermination de l'échelle relative à un ensemble d'items se référant à une même variable. Plaçons nous dans le cas de deux items a et b, pour fixer les idées, a présente (r+1) modalités et

b_j (s+1) modalités. Comme il vient d'être dit, la distribution des fréquences des modalités de l'item a (resp b) sur la population permettra de déterminer, à partir du modèle probabiliste, les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (resp, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$). Constituons la suite ordonnée des valeurs α_i et β_j. La donnée de cette suite détermine l'échelle.

L'erreur dans la réponse d'un sujet à l'un des items est supposée indépendante en probabilité de l'erreur dans la réponse du sujet à l'autre item. Nous pouvons déterminer la probabilité d'un patron donné pour un sujet pris au hasard dans la population et calculer la fréquence théorique de tout patron. Pour tester l'ajustement du modèle, nous comparerons la distribution des fréquences théoriques, de l'ensemble des patrons possibles, à celle des fréquences empiriques obtenues à l'aide du test d'ajustement du χ^2.

C. Analyse hiérarchique multidimensionnelle

I. – *Pseudo – base du graphe*

Reprenons le graphe $G = (\Omega, U)$ et considérons la famille d'ensemble de Ω : $\mathfrak{B}$ définie telle que: $B \in \mathfrak{B}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(1) $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2 \Longrightarrow$ on a ni $b_1 \leqslant b_2$ ni $b_2 \leqslant b_1$

(2) $x \notin B$ il existe $b \in B$ tel que $b \geqslant x$ ou $b \leqslant x$.

Une pseudo-base du graphe est un ensemble $B \in \mathfrak{B}$ qui réalise $\max\limits_{B \in \mathfrak{B}} |B|$; $|B|$ désigne le cardinal de $\mathfrak{B}$.

Nous appelons pseudo-dimension du graphe le nombre

$$\mathcal{S}(G) = \max_{B \in \mathfrak{B}} |B|$$

* Propriété fondamentale: Le nombre minimum de chemins recouvrant un sous-ensemble Ω_0 de Ω est égal à la pseudo-dimension de Ω_0 muni de la relation d'ordre définie sur Ω.

Ce résultat a été établi dans un autre contexte par Dilworth (*).

(*) R.P. Dilworth, "A decomposition theorem for partially ordered sets", Annals Math. 51 (1950), pp. 161-166.

Nous plaçons au niveau du comportement de la population.

On voit bien que la dimension du comportement de la population est précisément égale à la pseudo-dimension du sous-graphe des patrons observées (cf.A,III).

Nous avons proposé un critère empirique, pour déterminer la dimension du comportement; un tel critère, tient compte de la présence éventuelle de patrons erronés.

Bibliographie :

MATALON B. L'Analyse Hiérarchique (Gauthier-Villars, 1965).

BARBUT M. Note sur l'Algèbre des Techniques d'analyse Hiérarchique (appendice de l'ouvrage ci-dessus cité).

TORGERSON W.S. Theory and methods of scaling. Wiley 1958.