MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. COUMET

# Logique, mathématiques, et langage dans l'œuvre de G. Boole - II

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 16 (1966), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__16__1_0>

E. COUMET

# LOGIQUE, MATHEMATIQUES, ET LANGAGE DANS L'OEUVRE DE G. BOOLE - II

Boole avait rédigé en quelques semaines The Mathematical Analysis of Logic(1). Ce n'est qu'après plusieurs années de lectures étendues et de réflexions qu'il publia en 1854, An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities (2). Dans la seconde partie de cet ouvrage, dont nous n'allons pas parler ici, Boole envisage d'une manière très originale le calcul des probabilités auquel il consacra par ailleurs de nombreux articles: il montra que la doctrine générale et la méthode qu'il avait introduites en Logique servent de fondement à une théorie et à une méthode correspondante dans le domaine des Probabilités. Quant au système des lois logiques fondamentales, dont traite la première partie, il reste pour l'essentiel ce qu'il était dans l'exposé de 1847; mais il va apparaître sous un nouvel éclairage: les méthodes en seront présentées d'emblée dans toute leur généralité, les applications en seront plus étendues; et, surtout, ce système va trouver ici son véritable fondement: dans les lois mêmes de la pensée dont il sera montré par ailleurs qu'il est l'expression la plus adéquate possible.

N'y a-t-il en tout cela que gloses superflues? Il ne nous semble pas (3). Boole a tout de même abordé de front, ce faisant, des difficultés qui pour avoir été tues, ou être même restées inaperçues dans son premier ouvrage, n'y étaient pas moins présentes. Il a essayé de rendre compte aussi lucidement que possible du succès de son entreprise, et de ce qu'elle impliquait philosophiquement. Sans doute un créateur n'est-il pas nécessairement à même d'analyser les conditions véritables de son invention. Mais lorsqu'est en cause l'institution d'une nouvelle discipline scientifique, il ne se peut que l'acte créateur soit entièrement aveugle sur ce qui permit, motiva cette instauration, et en fit une instauration rationnelle. Il ne se peut, dans le cas de Boole, qu'il n'ait rien à nous apprendre, par ce qu'il nous en dit lui même, sur les rapports nouveaux qu'il noua entre Logique, Mathématiques, et Langage.

Aussi allons nous l'interroger à ce sujet, tout en esquissant les grandes lignes de la méthode logique générale dont nous n'avons analysé dans The Mathematical Analysis of Logic que la genèse un peu tâtonnante. Nos interrogations s'inscriront cependant dans une perspective bien déterminée. Pour réussir, Boole

(1) Que nous désignons ici en abrégé par: M.A.L.

(2) En abrégé: L.T.

(3) Contrairement à l'opinion de W. et M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford, Clarendon Press, 1964, p. 406.

devait rompre avec la logique traditionnelle, mais rester pourtant assez proche d'elle. pour en rendre compte de manière satisfaisante. Il devait poursuivre aussi loin que possible le parallèle des méthodes algèbriques et des méthodes logiques, mais savoir reconnaître les points où se manifestait l'originalité de l'univers logique. Bref, il lui fallait jouer très serré le jeu des analogies. C'est ce jeu très complexe, où Boole ne réussit qu'à demi, dont nous allons tenter de démêler les péripéties principales.

## A

Ces analogies ne sont pas conduites au hasard. Nous avons déjà entendu Boole se référer à une "doctrine générale des symboles". Dans The Laws of Thought, il accuse encore davantage l'importance de cette doctrine, en tant qu'elle assigne ses règles et son but à la construction de la Logique. Mais il précise mieux en même temps le statut particulier des symboles logiques, et les modes selon lesquels on accède à la connaissance de leurs lois.

### - 1 -

Curieuse situation que celle de la Logique, science à construire conformément à une Méthode générale admise au préalable. Boole jugera chacune des étapes de sa construction selon les critères de cette Méthode; retenons seulement ici le schéma, susceptible d'être esquissé à priori, de cette construction.

L'exemple doit être cherché dans les mathématiques "qui sont les plus parfaits exemples de méthode connus" (1). La méthode commande tout d'abord de remonter aux éléments les plus simples; or, "le syllogisme, les lois de la conversion, etc... ne sont pas les procédés ultimes de la Logique" (2). D'entrée de jeu, prenant acte du résultat obtenu dans son premier ouvrage, Boole récuse ainsi avec assurance les prétentions de la logique aristotélicienne. Il faudra donc, en un premier temps, sans se soucier d'autre chose que de la fidélité de l'analyse, atteindre les opérations élémentaires, et formuler leurs lois.

En second lieu, après qu'on ait, par exemple en arithmétique, défini les opérations élémentaires, il faut que la méthode assume sa plus haute fonction, qui est de diriger la succession de ces opérations: ce pour quoi on fonde un Calcul doté de procédés généraux. De ce point de vue, la logique traditionnelle a encore plus gravement failli à sa tâche (3), puisqu'elle s'est contentée de règles très particulières. Contrairement à elle, il faut non seulement élaborer un Calcul, mais viser d'emblée à la plus grande généralité, et poser d'avance le problème général, résumant tous les problèmes particuliers possibles, qu'aura à résoudre ce Calcul: étant donné un ensemble de prémisses exprimant des relations qu'ont entre eux certains éléments, on demande que soit exprimée explicitement dans sa totalité la relation qui en résulte entre certains de ces éléments, quelles

(1) L.T., p. 11.
(2) Id., p. 10.
(3) Id., p. 11.

que soient les conditions imposées, et quelle que soit la forme où on demande que soit exprimée cette relation (1).

Le but est fixé: la nouvelle science sera jugée selon qu'elle parvient à l'atteindre (2); et il conviendra de toujours avoir devant l'esprit "le modèle d'une perfection idéale" (3).

Si le Calcul logique approche d'un tel modèle, nous aurons plus loin à le dire. Quant aux Lois des opérations élémentaires, Boole dissocie très nettement dans The Laws of Thought les deux aspects sous lesquels on peut les envisager: soit comme lois du langage, soit comme lois de la pensée.

## - 2 -

"Ce qui rend la Logique possible, c'est l'existence dans nos esprits de notions générales, - notre capacité de concevoir une classe, et de désigner ses membres individuels par un nom commun. La théorie de la Logique est ainsi intimement liée à celle du Langage" (4). Boole était revenu dans un Postscript sur cette déclaration qu'il avait faite dans l'Introduction à The Mathematical Analysis of Logic: "Le Langage est un instrument de la Logique, mais non un instrument indispensable" (5). Est-ce à dire que Boole va se désintéresser complètement du Langage pour ne s'attacher qu'aux "notions générales" que nous avons dans l'esprit? Il n'en est rien. Il soutient simplement que, du point de vue où il s'est placé, il n'a pas à répondre à la célèbre question de savoir si le Langage doit ou non être considéré comme un instrument essentiel du raisonnement (6). Il s'en tient au fait que le Langage sert d'instrument au raisonnement humain. Le langage étant ainsi considéré comme un système répondant à une fin déterminée, on peut s'interroger sur les éléments de ce système, sur leurs relations, et sur leur contribution au fonctionnement du système (7).

Il s'agit bien sûr du langage naturel, du langage de tous les jours, à l'égard duquel Boole va adopter une attitude originale. Sans doute les logiciens avaient-ils analysé avant lui le langage à l'aide de catégories logiques. Sans doute, sur un point capital, Boole ne fait-il que reprendre une position traditionnelle: le type fondamental de Proposition est la proposition attributive où un sujet et un prédicat sont reliés par le verbe être sous la forme "est", ou "sont"; tous les autres verbes peuvent être analysés de manière à réduire toute proposition à la forme attributive. En revanche, reconstruire le Langage comme un système de signes, c'était là une tâche d'un style nouveau. Reconstruire: Boole se livre à une classification des mots en trois classes; mais il ne retient dans le Langage que les éléments qui entrent dans les opérations du raisonnement, et il se propose d'aboutir à une classification suffisante pour rendre compte ensuite entièrement de la fonction que remplit le Langage en tant

---

(1) Id., p. 10.

(2) Ultérieurement, on pourra même se demander si elle répond à des exigences plus élevées, d'ordre esthétique, et la juger sur sa beauté (Cf. Id., p. 150).

(3) Id., p. 154 - Cf. p. 109.

(4) M.A.L., p. 5.

(5) Id., p. 81.

(6) L.T., p. 24.

(7) Ibid.

qu'instrument du raisonnement. Montrer en second lieu qu'il est légitime de traduire les mots par des signes, c'était assurer doublement la possibilité et le succès d'une Logique symbolique: par la simple description de phénomènes linguistiques, par le biais donc d'une observation empirique, on pourra accéder aux lois des symboles logiques (il faut bien que ces lois se manifestent dans les raisonnements conduits avec le secours du Langage); et si le Langage se prête ainsi, sans artifice, à être transposé en symboles (1), on coupera court à toutes les protestations hostiles à la présentation d'une Logique sous forme de Calcul (2). Système enfin: ce qui compte avant tout dans la classification des signes du Langage, ce sont les "lois formelles" de combinaison de ces signes; ce système pourra donc alors être considéré en lui-même, indépendamment de sa relation avec des phénomènes linguistiques, et pourra être comparé avec d'autres systèmes.

Le projet était ambitieux, les intentions multiples; et, à parler sans trop de précision, on pourrait dire que Boole se proposait de formaliser ce qui, dans le langage naturel, permet de conduire des raisonnements valides.

On ne s'étonnera pas si, dans la réalisation effective de son projet, Boole retrouve les lois qu'il avait dégagées dans The Mathematical Analysis of Logic. Aussi ne ferons-nous que les énumérer rapidement.

"Les symboles littéraux $x$, $y$, ... représentent des choses en tant qu'objets de nos conceptions. (3)

Les signes d'opérations comme $+$, $-$, $\times$, tiennent place de ces opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou réduites de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments" (4).

Le signe $=$ exprimera la relation d'égalité entre les éléments qu'il relie, et toute Proposition sera exprimée par une équation.

Ceci dit, les signes du Langage se placent sous trois rubriques:

1ère classe: les signes appellatifs ou descriptifs, exprimant soit le nom d'une chose, soit quelque qualité ou détail qui lui appartient.

Sont compris dans cette classe les adjectifs et les substantifs. (Un adjectif auquel on rattache le substantif universellement sous-entendu "être" ou "chose" devient virtuellement un substantif).

Représentons par $x$ la classe des individus auxquels est applicable un nom particulier, ou une description particulière; $x\ y$ représentera la classe des choses auxquelles sont simultanément applicables les noms ou descriptions représentées par $x$, $y$; etc...

L'interprétation linguistique des symboles $x$, $y$ permet de poser les lois :

$$x\ y = y\ x$$
$$x^2 = x$$

(1) Cf. id., p. 6.

(2) A ce genre de protestations, Boole répond par un argument de fait. Ce n'est pas fantaisie de mathématicien si la Logique devient Calcul. C'est que les lois de la pensée rendent effectivement possible ce mode d'exposition (Id. p. 11).

(3) Bien que ce mot ne soit pas très familier en français dans le vocabulaire de la logique et de la psychologie, nous retranscrivons par lui le mot anglais "conception" qui, dans l'esprit de Boole, a un sens fortement actif.

(4) Id. p. 27.

Deuxième classe: les signes de ces opérations mentales par lesquelles nous assemblons des parties en un tout, ou séparons un tout en ses parties.

Lorsque nous formons le concept d'un groupe d'objets consistant en groupes partiels, chacun de ceux-ci étant décrit et nommé séparément, nous utilisons pour exprimer ce concept les conjonctions "et", "ou". Boole estime - nous aurons à y revenir - que, prises au sens strict, ces dernières impliquent que les termes qu'elles relient désignent "des classes tout à fait distinctes, de sorte qu'on ne trouve aucun membre de l'une dans l'autre" (1). Sous cette hypothèse, ces conjonctions sont analogues à tous égards au signe "+" utilisé en algèbre, et nous avons les lois :

$$x + y = y + x$$

$$z\,(x+y) = z\,x + z.y$$

L'"opération positive" consistant à rassembler les parties d'un tout nous suggère l'idée d'"une opération opposée ou négative ayant pour effet de défaire ce que la première avait fait. Ainsi nous ne pouvons concevoir qu'il soit possible de rassembler des parties en un tout, sans concevoir qu'il soit possible de séparer une partie" (2). Boole nous donne bien le mot du langage courant qui exprime une telle opération: le mot "excepté", mais il est patent que l'analyse des opérations l'emporte ici de loin sur l'analyse linguistique; et que Boole désire avant tout mettre en lumière ce qui lui parait être une dualité fondamentale entre une opération "positive" et une opération "négative". Celle-ci sera exprimée par le signe "-", et lorsqu'on dit "Tous les hommes, excepté les Asiatiques", cela implique que la classe des Asiatiques est contenue dans celle des hommes. Avec la convention qu'il avait adoptée de prendre le "ou" au sens exclusif, Boole pouvait passer légitimement de

$$x = y + z$$

à

$$z = x - y$$

et c'est précisément pour assurer la légitimité de ce passage qu'il a sans doute opté pour le "ou" exclusif.

"Nous avons, comme dans l'algèbre commune

$$x - y = - y + x \quad \text{"}\ (4)$$

et

$$z\,(x - y) = z\,x - z\,y$$

Troisième classe: les signes par lesquels est exprimée la relation, et à l'aide desquels nous formons des propositions. Il s'agit, nous l'avons vu, de tous les verbes, dans lesquels on retrouve toujours présent, la copule "est". Celle-ci est représentée par le signe "=", destiné à signifier que deux classes ont les mêmes membres.

(1) Id. p. 33.
(2) Ibid.
(3) Id. p. 34. Boole justifie cette identité en disant que, eu égard à tous les buts essentiels du raisonnement, il est indifférent que, dans l'ordre du discours, nous exprimions les cas exceptés en premier ou en dernier. Selon C.I. Lewis, cette identité résulte d'une "convention arbitraire: la première moitié de l'expression donne le *sens* de la deuxième moitié" (*A survey of Symbolic Logic...*, London, Dover Publications, 1960, p. 54).

Ce que nous avons dit jusqu'ici ne concerne à vrai dire que les Propositions "primaires", propositions de type attributif, qui énoncent des relations entre des choses. Boole appelle "propositions secondaires" les propositions qui "concernent ou relient entre elles des propositions considérées comme vraies ou fausses" (1). Exemples :

"Il est vrai que le soleil brille".
"Il n'est pas vrai que les planètes brillent par leur propre lumière".
"Si le soleil brille, la journée sera belle".
"Ou le soleil brillera, ou le voyage sera remis".

Aux trois classes de signes énumérées plus haut, il faut donc ajouter les termes (2)"si" et "ou", (ce "ou" exprimant la disjonction entre propositions); la théorie des propositions secondaires va se révéler étroitement analogue à la théorie des propositions primaires. Une fois cette théorie élaborée, nous pourrons dire que nous avons abouti à une classification complète des "parties constituantes" du Langage ordinaire, et que nous avons mis au jour les lois fondamentales auxquelles obéissent celles-ci.

- 3 -

Ainsi qu'on le verra plus loin, ces lois peuvent se développer en un Calcul. Mais un tel Calcul desservira surtout les fins de la Logique pratique (3). Mais la Logique a aussi une fin spéculative: elle nous apporte des lumières sur les différentes facultés de l'esprit, sur leurs opérations et sur leurs rapports. Elle peut nous révéler "les lois secrètes et les relations de ces hautes facultés de la pensée grâce auxquelles est atteint ou développé tout ce qui dépasse la connaissance simplement perceptive" (4). Elle peut ainsi ouvrir la voie à une enquête sur les lois de la pensée.

Qu'on prenne garde aux méprises que peut entraîner une telle expression. On aura vite fait de parler d'idéalisme ou de psychologisme. Or il n'est nullement dans les intentions de Boole d'emprunter à la Métaphysique des lois fondamentales pour bâtir sur elles la Logique, ni non plus de faire dériver celle-ci de quelque déduction transcendantale. Il n'est pas plus question pour lui de s'attacher exclusivement à la description, issue de l'introspection, des lois du déroulement des états de conscience. Boole veut mener son enquête en dehors des querelles métaphysiques sur la nature des facultés de l'esprit. Non pas qu'il soit, selon certaine tradition de l'empirisme anglais, hostile par principe à toute spéculation métaphysique: il ne s'interdira pas de méditer sur la signification du dualisme, et de reprendre à sa manière l'antique problème de l'Un et du Multiple. Mais la métaphysique a son temps, qui vient après celui de la science. Or, "l'objet proprement dit d'une science consiste dans la connaissance des lois et des relations" (5); et de même que les conclusions de l'astronomie physique ne dépendent nullement des thèses philosophiques favorables à telle ou telle

(1) Id. p. 160. Cf. p. 7 et Chap. XI et XII. Il nous faut dire, puisque nous n'en parlerons pas plus longuement ici, le très haut intérêt de la théorie des "propositions secondaires": avec elle, Boole inaugure le Calcul propositionnel au sens moderne du mot.

(2) Auxquels Boole aurait dû ajouter les expressions: "il est vrai que...", et "il n'est pas vrai que...".

(3) Id. p. 2 et p. 10.

(4) Id. p. 3.

(5) Id., p. 39.

théorie de la causalité, cette connaissance ne doit être subordonnée à aucun présupposé métaphysique. Boole ajoute toutefois à cet interdit de style positiviste une clause originale qui lui est inspirée par l'idée qu'il se fait d'un système de lois formelles: ce qui est scientifiquement vrai dans un tel système, c'est ce qui demeure vrai, quelle que soit l'interprétation métaphysique qu'on en donne; c'est en quelque sorte l'invariant que n'affectent pas les variations métaphysiques auxquelles on se livre sur ce système. Tel est le principe qu'il faudra appliquer, en particulier, à l'étude des lois de la pensée: sera seulement jugé comme fruit d'une observation véritable, "l'élément de vérité scientifique" qu'aucune hypothèse ou critique métaphysiques ne pourra remettre en question (1). Qu'on aille jusqu'à accorder au scepticisme le plus raffiné que l'esprit n'est rien d'autre qu'une suite d'impressions fugitives, les résultats auxquels a conduit l'observation devraient encore, en tant que lois de succession de ces impressions, demeurer tout aussi vrais (2).

Si de tels résultats sont "positifs", c'est qu'il nous mettent en face de faits incontestables: une fois qu'on a constaté que les lois de la pensée sont telles et telles, le problème de savoir si les opérations de l'esprit sont en un sens réel soumis à des lois, et si, par conséquent, une science de l'esprit est possible, apparaît bien vain (3). Mais si de telles lois demeurent inchangées à travers les différentes traductions qu'on peut en donner selon le vocabulaire particulier de chaque théorie métaphysique possible (4), c'est que ces lois sont des relations dont la vérité ne dépend pas du contenu métaphysique qu'on assigne aux éléments qu'elles relient. On continuera à parler, à l'occasion, des "facultés de l'esprit", mais ce sera sans accorder par là que l'esprit possède tels et tels pouvoirs ou facultés comme éléments distincts de son activité. Et Boole préfère pour les désigner le terme beaucoup plus neutre d'"Opérations de l'esprit humain" (5). Ce qu'il importe d'atteindre, c'est le système selon lequel s'organise l'exercice de ces facultés; système formel, si l'on entend par là qu'on écarte toute considération touchant à la nature de ces facultés, et qu'on en cherchera la formulation rigoureuse dans le langage symbolique. Pour généraliser une expression que Boole utilise en passant (6), la science des lois de la pensée a pour objet le système formel des conditions générales d'exercice des facultés de l'esprit.

Quel sera le rapport de cette science avec la Logique? On a l'impression que Boole conçoit par moments celle-ci,(plus précisément la Logique symbolique qu'il est en train de constituer) comme l'instrument (7) qui dote l'enquête sur les lois de la pensée de procédés plus raffinés et plus féconds que ceux d'une réflexion livrée à elle-même, et privée du secours des symboles. Mais, à d'autres moments, il dit trouver l'origine réelle (8) d'une loi symbolique dans une loi de la pensée, et présente les lois de la pensée comme le fondement du système ou de la méthode de la Logique (9). Cette ambiguïté ne vient pas d'une incertitude de pensée, mais de la manière très originale, pour son temps, dont Boole conçoit

(1) Ibid.
(2) Id. p. 40.
(3) Id. p. 3.
(4) Id. p. 40.
(5) Id. p. 41.
(6) Id. p. 45.
(7) Cf. Préface.
(8) Id. p. 45.
(9) Id. p. 66.

le rôle de la formalisation; rôle qui ne se borne pas à rendre plus rigoureuse l'expression de quelque chose qu'on connaît déjà: formaliser, cela peut permettre aussi de découvrir, de révéler les lois "secrètes" de la pensée, d'assigner l'ordre selon lequel elles dérivent les unes des autres, et de détruire par là les illusions auxquelles s'était laissée prendre toute la tradition philosophique (1). Une fois ces lois ainsi mises en place, ce sont elles dont il faut chercher à quelles conditions d'exercice des facultés intellectuelles elles correspondent: ces conditions nous font accéder à la source réelle de ces lois, à une pensée opérante; ces lois sont du même coup fondées, dans la mesure où elles s'identifient aux règles que suit cette pensée, lorsqu'elle s'exerce.

Bref, Boole fait entièrement confiance au langage symbolique pour neutraliser les préjugés métaphysiques et des erreurs d'optique consacrées par la tradition: la cohérence propre du nouveau système, obtenue en imitant la méthode des Mathématiques, atteste qu'on atteint un niveau de la pensée plus profond que celui que décrivait la Logique de l'Ecole. Puis, en un second temps, il suffit de lire sur les règles des symboles l'activité de pensée qui s'y inscrit en filigrane.

Il ne sera pas utile de nous attarder sur ce déchiffrement, car nous savons déjà par le début de The Mathematical Analysis of Logic que cette activité se présente essentiellement sous la forme d'opérations de sélection d'objets. Notons simplement qu'ici, Boole parle explicitement d'"univers du discours" (2), qu'il insiste fortement sur ce qui nous avait semblé être l'originalité la plus grande de son analyse: des lois gouvernent déjà les combinaisons de concepts (3). Enfin, il n'a pas de peine à montrer que les lois formelles des symboles logiques sont les mêmes qu'on les interprète, ou comme lois de la pensée, ou comme lois du langage. D'où une première application du principe selon lequel un même système de symboles peut avoir des interprétations distinctes. Possibilité, dont, comme nous avons tenté de le montrer, Boole a tiré parti pour instituer un enrichissant va-et-vient entre système et interprétations. Par l'observation du langage, on peut dégager a posteriori (4) les lois du système de symboles: puis ce système peut être réinterprété en termes d'opérations de pensée; enfin on pourra dire que si les lois du langage sont les mêmes que celles de la pensée, c'est que, en fait, celles-ci viennent s'incarner dans le langage (5).

(1) Id. p. 49.

(2) Id., p. 42.

(3) "Les opérations, par lesquelles l'esprit, dans l'exercice de son pouvoir d'imagination ou de conception, combine et modifie les idées simples de choses ou de qualités, sont soumises, non moins que ces opérations de la raison qui sont effectuées sur les vérités et les propositions, à des lois générales" (Id., p. 45).

(4) Id. p. 44.

(5) Id. p. 45.

## B

Se donnant maintenant pour tâche la constitution d'un Calcul Logique, Boole va tenter de donner de son "système de symboles logiques" une interprétation mathématique.

### - 1 -

Ici commence un chassé-croisé complexe entre Logique et Mathématiques, ou plutôt entre un système logique construit progressivement et ce que Boole appelle tantôt Arithmétique, tantôt Algèbre, tantôt Science du Nombre. Boole s'interdit vigoureusement certaines analogies: il ne faut pas qu'interfèrent entre elles les interprétations des symboles propres à chaque système. Mais en fait cet interdit a une portée plus étroite que celle que nous serions enclins a lui accorder, et Boole - qui, ne l'oublions pas constitue ici pièce à pièce le système logique - va non seulement prendre pour guide la Science du Nombre, mais la réintroduire en Logique pour l'aider à résoudre ses problèmes.

Voyons tout d'abord comment les symboles logiques se distinguent des symboles qu'utilise l'Algèbre communément reçue. Moment décisif dans l'invention de Boole qui, d'un même mouvement, va définir face à cette Algèbre, dite l'Algèbre, <u>une</u> Algèbre particulière, et va doter la Logique de <u>son</u> Algèbre: l'Algèbre de la Logique.

Des lois dont nous savons déjà qu'elles sont celles des symboles logiques, nous pouvons tirer que si nous avons l'équation:

$$x = y$$

nous aurons aussi :

$$z\,x = z\,y$$

quelle que soit la classe représentée par $z$.

Mais si nous nous avisons de vouloir procéder en sens inverse, c'est à dire de retrouver "l'axiome des algébristes selon lequel les deux côtés d'une équation peuvent être divisés par la même quantité", les ponts sont rompus: cet "axiome" n'est pas ici valable (1). Supposons en effet que les membres d'une classe $x$ qui possèdent une certaine propriété $z$ soient identiques aux membres d'une classe $y$ qui possèdent la même propriété $z$: il n'en résulte pas que les membres de la classe $x$, pris dans leur ensemble, soient identiques aux membres de la classe $y$. De l'équation :

$$z\,x = z\,y$$

on ne peut inférer que l'équation :

$$x = y$$

soit vraie.

Mais de cette analogie rompue va surgir une analogie nouvelle. Car, à parler précisément, si nous revenons à "l'axiome des algébristes" mentionné plus haut, nous nous apercevons qu'il se distingue des autres axiomes, en ce qu'il n'a

(1) Id., pp. 36-37.

pas leur généralité: "La déduction qui fait passer de l'équation $x = y$ à l'équation $zx = zy$ est valide seulement lorsqu'on sait que $z$ n'est pas égal à 0. Si on suppose alors que la valeur $z = 0$ soit admissible dans le système algébrique, l'axiome énoncé ci-dessus cesse d'être applicable, et l'analogie présentée précédemment demeure au moins intacte" (1). L'analogie demeure, mais il faut avouer qu'elle est bien boîteuse: d'un côté l'"axiome" en question n'est jamais applicable; de l'autre, on dira qu'il n'est pas applicable, parce qu'il y a un cas où il ne s'applique pas. Aussi la comparaison tourne-t-elle court, et Boole y met-il un terme de manière embarrassée pour rétablir une comparaison sur un autre plan: "Cependant, ce n'est pas avec les symboles de quantité, considérés en général, qu'il est de quelque importance, sinon à titre de spéculation, de tracer de telles affinités" (2). Boole laisse l'impression que c'est pour une tout autre raison qu'il va limiter la comparaison aux symboles 0 et 1. On ne trahirait pas son mouvement de pensée en disant qu'il renverse en fait le sens de la comparaison précédente: au lieu de rapprocher les symboles logiques de tous les symboles qu'utilise l'Algèbre, il isole au contraire parmi ceux-ci ceux qui vérifient les lois des symboles logiques.

Quoiqu'il en soit, voici le texte capital où Boole va identifier les symboles ayant cette propriété particulière comme étant 0 et 1:

"Nous avons vu que les symboles de la Logique sont sujets à la loi spéciale :

$$x^2 = x$$

Or, parmi les symboles de Nombre, il en est deux, à savoir 0 et 1, qui sont sujets à la même loi formelle. Nous savons que $0^2 = 0$, et que $1^2 = 1$; et l'équation $x^2 = x$, considérée comme algébrique, n'a pas d'autres racines que 0 et 1. Au lieu de chercher jusqu'à quel degré il y a concordance formelle entre les symboles de la Logique et les symboles de Nombre considérés en général, cela nous suggère plus directement de comparer les premiers aux symboles de quantité admettant seulement les valeurs 0 et 1. Imaginons alors une Algèbre dans laquelle les symboles $x$, $y$, $z$, etc.. admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seulement. Les lois, les axiomes, et les procédés, d'une telle Algèbre seront complètement identiques aux lois, aux axiomes, et aux procédés d'une Algèbre de la Logique. Seule les sépare une différence d'interprétation" (3)

Pour le coup, après tant de tâtonnements et de demi-clartés voilà, pensera-t-on, une position ferme et lumineuse: Boole envisage bien ici une "Algèbre de Boole" et il fonde ce qu'il est classique maintenant d'appeler "l'Algèbre de la Logique". En vérité, Boole lance des mots qui lui devront certes pour beaucoup le sens qu'ils prendront plus tard, mais force nous est, si nous voulons continuer à lire son oeuvre, en acceptant ses détours, d'oublier ici ce sens ultérieur. Le chemin est encore long qui conduit Boole de l'Algèbre envisagée ici à un Calcul Logique ayant à ses propres yeux la cohérence souhaitable.

Et tout d'abord, il faut, conformément aux principes qu'il s'est donnés, justifier maintenant l'introduction des symboles 0 et 1 parmi les symboles logiques. En un premier temps, a été introduite l'idée d'une Algèbre qui aurait les mêmes lois formelles que le système logique; mais il est nécessaire en un second temps de " prouver que les symboles 0 et 1 ont place parmi les symboles de la logique et y sont susceptibles

(1) Id., p. 37.
(2) Ibid.
(3) Id., pp. 37-38.

d'une interprétation" (1). Ici encore Boole défend qu'on appuie cette preuve sur une simple transposition d'un système dans l'autre: ce n'est pas parce qu'on emploie les mêmes symboles dans les deux systèmes qu'on sera fondé à dire que 0 et 1 auront un même sens en Algèbre et en Logique: une telle transposition est impossible puisque nous avons affaire d'un côté à des relations numériques, et de l'autre à des conceptions de la pensée. Pourtant, comme cela lui était arrivé plus haut, c'est de l'Algèbre que Boole cherche à apprendre "la valeur logique" des symboles 0 et 1.

La loi: $x^2 = x$ à laquelle sont soumis tous les symboles logiques est ce qui distingue les opérations de l'esprit en jeu dans le langage ordinaire et le raisonnement, des opérations où l'esprit traite de l'algèbre générale de la quantité (2). Parmi les symboles de Nombre, seuls 0 et 1 obéissent à cette loi. "Mais chacun de ces symboles est aussi soumis à une loi qui lui est particulière dans le système de la grandeur numérique, et ceci nous suggère de chercher quelles interprétations il faut donner des symboles littéraux de la Logique, afin que les mêmes lois formelles particulières soient également réalisées dans le système logique" (3). Ces deux lois particulières sont :

$$0\,y = 0$$

$$1\,y = y$$

qui sont vraies toutes deux, quel que soit le nombre $y$. Pour que ces conditions soient satisfaites en Logique, nous dirons que le symbole 0 représente Rien et que le symbole 1 représente l'Univers. La classe Rien est telle que, quelle que soit la classe $y$, les individus qui appartiennent à cette classe et à la classe Rien sont identiques à ceux qui sont compris dans la classe Rien: il n'y en a aucun. La classe Univers est telle qu'elle contient tous les individus qui sont membres de la classe $y$ quelle que soit $y$

- 2 -

Maintenant que nous voilà au fait de la signification proprement logique des symboles "0" et "1", mettons provisoirement entre parenthèses les problèmes d'interprétation, et cherchons à connaître un peu mieux pour elles-mêmes les lois formelles des symboles astreints à ne prendre que les valeurs 0 ou 1. Pour cette partie de l'oeuvre appelée à devenir durable, quelques indications suffiront; mais il faudra au préalable, pour montrer en quel sens particulier Boole se posait le problème, préciser ses "définitions" :

"Toute expression algébrique comprenant un symbole $x$ est appelée une fonction de $x$, et peut être représentée sous la forme générale $f(x)$ ...

Ainsi la forme $f(x)$ pourrait représenter indifféremment l'une quelconque des fonctions suivantes, $x$, $1-x$, $\frac{1+x}{1-x}$, ...: et $f(x, y)$ pourrait représenter une des formes $x+y$, $x-2y$, $\frac{x+y}{x-2y}$, ...

... Toute fonction $f(x)$, où $x$ est un symbole logique ou un symbole de

(1) Id., p. 46.
(2) Id., p. 46.
(3) Id., p. 47.

quantité susceptible de prendre seulement les valeurs 0 et 1, est dite développée, lorsqu'elle est réduite à la forme

$$a x + b\ (1 - x)$$

$a$ et $b$ étant déterminés de manière à ce que le résultat soit équivalent à la fonction dont elle est dérivée" (1).

Ceci dit, on peut établir les Propositions suivantes :

- Toute fonction $f(x)$ où $x$ est un symbole logique peut être développée sur la forme :

$$f(1)\ x + f(0)\ (1 - x)$$

- De manière analogue :

$$f(x, y) = f(1.1)\, xy + f(1.0)\, x\, (1-y) + f(0,1)\, (1-x)y + f(0.0)\, (1-x)\, (1-y)$$

et ainsi de suite pour $f(x, y, z)$, ...

Les termes $xy$, $x(1-y)$ ... et les termes analogues seront appelés les constituants du développement.

- Tout constituant particulier $t$ d'un développement satisfait la loi de dualité :

$$t\ (1 - t) = 0.$$

Le produit de deux constituants quelconques d'un développement est égal à 0, et la somme de tous les constituants est égal à 1.

- 3 -

Si nous revenons à la Logique, il ne sera pas malaisé de traduire en termes d'opérations mentales le sens de ces Propositions.

Il est évident que les constituants d'un développement ont une forme indépendante de la fonction à développer. Prenons l'exemple simple où la fonction comporte les deux symboles $x$, $y$, eu égard auxquels le développement doit être effectué. Nous aurons les constituants suivants :

$$xy, \qquad x\,(1-y), \qquad (1-x)y \qquad (1-x)(1-y)$$

Or, ces constituants représentent les quatre classes qu'on peut décrire en affirmant et en niant les propriétés exprimées par $x$ et $y$. Ces classes sont distinctes les unes des autres; et, en second lieu, "ces classes prises ensemble forment l'univers, car il n'y a pas d'objet dans l'univers qui ne puisse être décrit par la présence ou l'absence d'une qualité donnée, et, chaque chose individuelle qui se trouve dans l'univers peut être rapportée à l'une ou à l'autre des quatre classes formées par la combinaison possible des deux classes données $x$ et $y$, et de leurs contraires" (2). La remarque peut se généraliser, et l'on peut dire que les constituants du développement de toute fonction des sym-

(1) Id., pp. 71-2.
(2) Id. p. 81.

boles logiques $x$, $y$, ... sont interprétables, et représentent les différentes divisions de l'univers du discours en classes distinctes, formées en affirmant et en niant de toutes les manières possibles les qualités dénotées par les symboles $x$, $y$, ... (1).

Cette analyse a porté, après coup, sur un résultat obtenu à l'aide des lois formelles des symboles, mais elle aurait pu également reposer sur "des raisons purement logiques", c'est-à-dire sur une description des opérations mentales engagées dans le problème suivant: supposons que nous considérions une classe quelconque de choses eu égard au fait que ces membres possédent ou ne possèdent pas une certaine propriété $x$. Comme tout individu de la classe proposée possède ou ne possède pas la propriété en question, nous pouvons diviser notre classe en deux parties, la première étant formée des individus qui possèdent la propriété x , la seconde des individus qui ne la possèdent pas. "La possibilité de diviser en pensée la classe entière en deux parties constituantes, précède toute connaissance, issue d'une autre source, que nous pourrions avoir de la manière dont est constituée cette classe: connaissance qui peut seulement avoir pour effet de nous informer, plus ou moins précisément, à quelles conditions ultérieures sont soumises, et la partie de la classe qui possède la propriété donnée, et la partie qui ne la possède pas" (2). Supposons maintenant que d'après une information de ce genre, nous sachions

- que les membres de la première partie, qui possèdent la propriété $x$, possèdent également la propriété $u$.

- que les membres de l'autre partie, qui ne possèdent pas la propriété $x$, possèdent par ailleurs la propriété $v$.

La classe dans sa totalité sera représentée par

$$ux + v(1-x),$$

"qui peut être considérée comme une forme générale développée pour l'expression d'une classe quelconque d'objets considérée en rapport avec la possession ou le manque d'une propriété donnée $x$" (3).

Nous avons ainsi l'assurance de pouvoir toujours appliquer le procédé de développement à une fonction logique quelconque, et d'obtenir dans ce développement des constituants qui sont toujours interprétables. Et nous comprenons parfaitement pourquoi il en est ainsi : nous ne faisons qu'appliquer le procédé de dichotomie qui a sa source dans la loi fondamentale de la pensée :

$$x\ (1-x) = 0$$

Mais ce n'est là qu'un aspect du procédé de développement. Comme vient de nous le dire Boole, il faut distinguer d'une part, la possibilité toujours présente de diviser une classe ou l'univers du discours, en 2, en 4, ..., et d'autre part, les informations que pourront nous donner des équations exprimant les relations qu'ont entre elles des classes données. Dans des textes manuscrits, Boole a mieux dégagé cette distinction, lorsqu'il a voulu approfondir la "philosophie du procédé de Développement"(4). Prenons, par exemple, les deux conceptions "hommes" et "animaux rationnels": nous pouvons dire aussitôt :

(1) Ibid.
(2) Id., p. 71.
(3) Ibid.
(4) *Studies in Logic and Probability,* (noté ici S.L.P.) Watts & Co., p. 241.

Les hommes sont ou des animaux rationnels
ou rationnels mais non animaux
ou non rationnels mais animaux
ou non rationnels, non animaux.

Nous formulons ainsi une "proposition nécessaire" exprimant que tout individu humain appartient nécessairement à l'une des quatre classes qui forment le terme prédicat (1). "Si nous introduisons une autre conception, nous aurons la possibilité de construire une proposition nécessaire comprenant 8 classes dans son terme prédicat, et ainsi de suite"(2). D'une manière générale, nous voici mis en présence des "formes nécessaires et a priori du jugement" (3). Boole s'approchait ainsi bien près de la notion de tautologie.

Mais il ne s'est pas attardé à l'étude de ces propositions nécessaires. C'est que, sous la pression de l'enseignement traditionnel, il poursuit un but bien déterminé: tout raisonnement consistant à déduire une conclusion de prémisses données, sa préoccupation essentielle reste la solution de problèmes particuliers. Comme les prémisses sont exprimées par des équations, tout revient à résoudre des systèmes d'équations. Pour employer une expression de Boole, chaque prémisse apporte une "information" qui vient modifier, préciser les "propositions nécessaires". Le problème fondamental de l'inférence logique consistera à rassembler de telles informations, ou à les exprimer sous d'autres formes. Et c'est ici qu'apparaît le second aspect du procédé de développement: ces informations sont exprimées par la manière dont les coefficients viennent modifier, dans le développement d'une fonction logique, les constituants. Et c'est ici par conséquent que surgit une grave difficulté: alors que les constituants sont formés de symboles logiques dont le sens est clair, les coefficients, par suite des conventions posées, peuvent prendre a priori toutes les valeurs des nombres fractionnaires. A s'en tenir aux seules "lois formelles" des symboles, on verra se constituer des expressions qui n'ont aucune signification logique visible.

(à suivre)

(1) Id. p. 219.
(2) Ibid.
(3) Id. p. 242