MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

JEAN-BLAISE GRIZE

Logique et algèbre de Boole

Mathématiques et sciences humaines, tome 14 (1966), p. 9-21

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__14__9_0>

Jean-Blaise GRIZE

LOGIQUE ET ALGEBRE DE BOOLE

RÉSUMÉ

1. Dans lequel la logique des propositions est présentée comme un calcul (aspect syntaxique). 2. Où l'on explique quelles sont les relations entre le calcul qui précède et l'algèbre de Boole. 3. Comment on interprète le calcul (aspect sémantique) et comment on rencontre l'algèbre de George Boole.

1. - UN CERTAIN CALCUL

1.1. Alphabet, variables, expressions bien formées

La construction d'un calcul logique est soumise à des règles strictes que nous n'énoncerons pas (cf. MARTIN 1964, Ch. I), mais que nous respecterons.

On se donne un alphabet fini, disons $\underline{A}$ = df $\{ \underline{p}, *, \supset, \sim, (,) \}$. Les éléments de $\underline{A}$ sont les lettres et toute suite finie de lettres est un mot.

Nous distinguerons deux sortes de mots: les variables et les expressions bien formées.

Variables : W

(1) $\underline{p}$ est une variable.
(2) Si α est une variable, $\alpha*$ est une variable.
(3) Rien n'est une variable, sinon par (1) et (2).

Exemples de variables: $\underline{p}$, $\underline{p}*$, $\underline{p}**$.

Scolies

1. L'expression "variable", pour désigner ces mots, ne se justifie qu'en vue de l'interprétation du calcul où ils désigneront des propositions.

2. La lettre α qui figure dans la clause (2) de la définition n'appartient pas à l'alphabet du calcul. Elle sert à communiquer avec le lecteur et fait partie de la métalangue au même titre que le français.

3. L'écriture $\alpha*$, qui figure dans la même clause (2) est hybride, en ce sens que α désigne une lettre ou une suite de lettres, tandis que * est une lettre. On dit avoir utilisé * de façon autonyme. Il serait donc plus correct d'écrire:
(2) Si α désigne une variable, α suivi d'un astérisque désigne une variable.

Pour abréger l'écriture, il sera commode de poser les définitions suivantes:

$$\underline{q} = \text{df} \ \underline{p}* \qquad \underline{r} = \text{df} \ \underline{p}**.$$

Expressions bien formées ou ebf : E

(1) Une variable est une ebf.
(2) Si $\underline{P}$ est une ebf, $\sim \underline{P}$ est une ebf.
(3) Si $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ sont des ebf, $(\underline{P} \supset \underline{Q})$ est une ebf.
(4) Rien n'est une ebf, sinon par (1) à (3).

Exemples d'ebf: $\underline{p}$, $(\underline{p} \supset \underline{p})$, $\sim\underline{p}$, $\underline{q}$, $(\sim \underline{p} \supset \underline{q})$, $(\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p}))$.

Scolies

1. On a la double inclusion:
$\underline{W} \subset \underline{E} \subset$ mots.

On remarquera qu'il s'agit d'inclusions strictes.

2. Il sera commode de s'autoriser à supprimer la paire extérieure de parenthèses. Nous nous donnons donc le droit, sans nous en faire un devoir, d'écrire par exemple $\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p})$ à la place de $(\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p}))$.

3. Le signe '$\sim$' se lit <u>tilde</u> et le signe '$\supset$' se lit <u>crochet</u>. Cependant toute autre façon non ambiguë de lire ces signes sera la bienvenue. Rien ne s'opposerait, en particulier, à ce qu'on lise "non $\underline{p}$" pour "tilde $\underline{p}$" et "si $\underline{p}$ alors $\underline{q}$" pour "$\underline{p}$ crochet $\underline{q}$".

Questions

1. Quel est, dans les clauses (2) et (3) le statut des lettres de l'alphabet français $\underline{P}$ et $\underline{Q}$?

2. Comment énoncer ces mêmes clauses (2) et (3) sans faire un usage autonyme de certaines lettres de l'alphabet $\underline{A}$?

L'écriture des éléments de $\underline{E}$ devient assez rapidement encombrante, aussi est-il judicieux d'introduire quelques abréviations:

$$\underline{P} \vee \underline{Q} =_{df} \sim \underline{P} \supset \underline{Q}$$
$$\underline{P} \wedge \underline{Q} =_{df} \sim (\sim \underline{P} \vee \sim \underline{Q})$$
$$\underline{P} \equiv \underline{Q} =_{df} (\underline{P} \supset \underline{Q}) \wedge (\underline{Q} \supset \underline{P}).$$

Exemples: $\sim \underline{p} \supset \underline{q}$ peut s'écrire $\underline{p} \vee \underline{q}$; $\sim (\sim\sim \underline{p} \supset \sim \underline{q}) \supset \underline{p}$ peut s'écrire $(\sim\sim \underline{p} \supset \sim \underline{q}) \vee \underline{p}$ ou $(\sim \underline{p} \vee \sim \underline{q}) \vee \underline{p}$ ou encore $(\underline{p} \wedge \underline{q}) \supset \underline{p}$.

Scolie

Rien n'empêche de lire $\underline{P} \vee \underline{Q}$: "$\underline{P}$ ou $\underline{Q}$"; de lire $\underline{P} \wedge \underline{Q}$: "$\underline{P}$ et $\underline{Q}$" et de lire $\underline{P} \equiv \underline{Q}$: "$\underline{P}$ si et seulement si $\underline{Q}$".

Questions

3. Comment s'écrivent, sans aucune abréviation, les expressions $\underline{p} \wedge \underline{q}$ et $\underline{q} \equiv \underline{r}$?

4. L'expression $\underline{p} \supset \underline{p}$ peut-elle s'écrire $\sim\underline{p} \vee \underline{p}$?

1.2. Les thèses : T

Toute ebf de l'une des trois formes suivantes est une thèse :

($\underline{A}$ 1) $\underline{P} \supset (\underline{Q} \supset \underline{P})$
($\underline{A}$ 2) $(\underline{P} \supset (\underline{Q} \supset \underline{R})) \supset ((\underline{P} \supset \underline{Q}) \supset (\underline{P} \supset \underline{R}))$
($\underline{A}$ 3) $(\sim \underline{P} \supset \sim \underline{Q}) \supset (\underline{Q} \supset \underline{P})$.

De plus on a la règle:

($\underline{R}$) Si $\underline{P}$ et $\underline{P} \supset \underline{Q}$ sont des thèses, $\underline{Q}$ est une thèse.

Définition - L'ensemble $\underline{T}$ des thèses est le plus petit sous-ensemble de $\underline{E}$ qui contient les ebf des formes ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) et qui est fermé par rapport à l'application de la règle ($\underline{R}$).

Exemple de thèse: $\underline{p} \supset \underline{p}$.

Preuve:

1. $((\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p})) \supset \underline{p}) \supset ((\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p})) \supset (\underline{p} \supset \underline{p}) \in T$ par ($\underline{A}$ 2) et les substitutions $\underline{P}/\underline{p}$, $\underline{Q}/(\underline{q} \supset \underline{p})$, $\underline{R}/\underline{p}$.
2. $(\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p})) \supset \underline{p} \in \underline{T}$ par ($\underline{A}$ 1) et $\underline{P}/\underline{p}$, $\underline{Q}/(\underline{q} \supset \underline{p})$.
3. $(\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p})) \supset (\underline{p} \supset \underline{p}) \in \underline{T}$ par 2, 1 et ($\underline{R}$).
4. $\underline{p} \supset (\underline{q} \supset \underline{p}) \in \underline{T}$ par ($\underline{A}$ 1) et $\underline{P}/\underline{p}$, $\underline{Q}/\underline{q}$
5. $\underline{p} \supset \underline{p} \in \underline{T}$ par 4, 3 et ($\underline{R}$).

Scolies

1. La suite des cinq thèses qui précèdent est dite constituer une preuve de la dernière.

2. Les formules ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) constituent des schémas d'axiomes, en ce sens que toute substitution d'ebf aux lettres majuscules de l'alphabet français sont réputées sans plus être des thèses. Ce sont donc des axiomes.

3. Les schémas ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) et la règle ($\underline{R}$) remontent, quant à l'idée, à Frege (1879) et ont été énoncés, sous une forme analogue à celle utilisée ici, par Łukasiewicz (cf. TARSKI 1956, p. 43, note 1).

4. Il est clair que $\underline{T} \subseteq \underline{E}$, sans qu'il soit possible pour l'instant de décider s'il s'agit d'une inclusion stricte ou non.

La recherche d'un certain nombre d'éléments de $\underline{T}$ est un travail de routine. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, il n'offre guère d'intérêt dans le présent calcul. En revanche, il est intéressant de se poser quelques questions générales sur $\underline{T}$. Cela consiste à considérer $\underline{T}$ comme actuellement constitué et à énoncer des vérités à son sujet. On appellera volontiers les propositions qui portent sur $\underline{T}$ (et d'une façon plus générale sur le calcul) des épithéorèmes (cf. CURRY 1952, Ch. I, § 6).

Exemples d'épithéorèmes (non démontrés ici) relatifs à T

(1) Toute ebf de la forme $\underline{P} \supset \underline{P}$ appartient à $\underline{T}$.

Scolie

Par abus d'écriture, nous noterons $\underline{P} \supset \underline{P} \in \underline{T}$.

(2) $\underline{P} \supset \underline{Q}$, $\underline{Q} \supset \underline{R} \in \underline{T} \Rightarrow \underline{P} \supset \underline{R} \in \underline{T}$, soit si deux ebf de la forme $\underline{P} \supset \underline{Q}$ et $\underline{Q} \supset \underline{R}$ appartiennent à $\underline{T}$, alors l'ebf de la forme $\underline{P} \supset \underline{R}$ appartient à $\underline{T}$.

Scolie

Lorsque deux ebf $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ sont telles que l'ebf $\underline{P} \supset \underline{Q}$ appartient à $\underline{T}$, $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ soutiennent entre elles une certaine relation. Notons-la $\rightarrow$, c'est-à-dire posons:

$$\underline{P} \rightarrow \underline{Q} \ =\text{df} \ \underline{P} \supset \underline{Q} \in \underline{T}.$$

Les épithéorèmes (1) et (2) montrent qu'on a affaire à une relation de préordre et nous lirons $\underline{P} \rightarrow \underline{Q}$: "$\underline{P}$ implique $\underline{Q}$".

Il est important de souligner que, d'un point de vue algébrique, $\supset$ est un opérateur qui, appliqué à deux ebf $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ fournit une nouvelle ebf $\underline{P} \supset \underline{Q}$, tandis que $\rightarrow$ est un relateur qui, appliqué à deux ebf $\underline{P}$ et $\underline{Q}$, énonce à leur sujet une propriété.

(3) $\underline{P} \equiv \underline{P} \in \underline{T}$
(4) $\underline{P} \equiv \underline{Q} \in \underline{T} \Rightarrow \underline{Q} \equiv \underline{P} \in \underline{T}$
(5) $\underline{P} \equiv \underline{Q}, \underline{Q} \equiv \underline{R} \in \underline{T} \Rightarrow \underline{P} \equiv \underline{R} \in \underline{T}$

Scolie

Si l'on pose $\underline{P} \leftrightarrow \underline{Q}$ =df $\underline{P} \equiv \underline{Q} \in \underline{T}$, on voit que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence et nous lirons $\underline{P} \longleftrightarrow \underline{Q}$ simplement: "$\underline{P}$ est équivalent à $\underline{Q}$".

Questions

5. Comment peut-on démontrer l'épithéorème (1) ?

6. Que peut-on dire de la relation $\longrightarrow$, sachant qu'on a l'épithéorème : $\underline{P} \supset \underline{Q}, \underline{Q} \supset \underline{P} \in \underline{T} \Longrightarrow \underline{P} \equiv \underline{Q} \in \underline{T}$?

7. Dans une interprétation algébrique, le signe $\equiv$ est-il un opérateur ou un relateur ?

(6) $\underline{P}, \underline{Q} \in \underline{T} \Rightarrow \underline{P} \wedge \underline{Q} \in \underline{I}$.

1.3. Remarques finales

Les ensembles $\underline{W}$, $\underline{E}$ et $\underline{T}$ ont été définis en suivant les habitudes des logiciens de façon à justifier des démonstrations par récurrence pour certains épithéorèmes qui les concernent. Ils sont présentés, en effet, sous forme de définitions qu'on appelle <u>récursives ou inductives</u> et qui comportent trois types de clauses:

a) Des clauses initiales qui posent que tels mots sont des trucs.

b) Des clauses de formation qui permettent d'obtenir de nouveaux trucs à partir de trucs déjà construits.

c) Une clause finale qui assure la fermeture de l'ensemble des trucs. (<u>Cf</u>.MARTIN 1964, pp. 13-14; KLEENE 1952, pp. 258-261).

Questions

8. Quelles sont les clauses initiales et de formation pour $\underline{W}$, $\underline{E}$ et $\underline{T}$?

9. Où est la clause finale pour $\underline{T}$?

On dit que $\underline{W}$, $\underline{E}$ et $\underline{T}$ sont <u>engendrés récursivement</u> ce qui, intuitivement, signifie de proche en proche. Si de plus, étant donnée une expression quelconque, il est toujours possible de décider, par un procédé fini, si elle appartient ou n'appartient pas à l'ensemble considéré, nous dirons, par un léger abus de langage, que l'ensemble est non seulement engendré récursivement mais qu'il est encore <u>récursif</u> (<u>cf</u>. CURRY 1952, pp. 19-20).

Question

10. Nous pouvons sans plus savoir que deux des ensembles $\underline{W}$, $\underline{E}$ et $\underline{T}$ sont récursifs au sens ci-dessus. Lesquels ?

Le calcul $\mathscr{C}$ =df $< \underline{E}, \underline{T}, \supset, \sim >$ sera appelé le <u>calcul classique des propositions</u>.

2. - LE CALCUL $\mathcal{C}$ ET L'ALGEBRE DE BOOLE

2.0. Rappel

Nous supposerons que le lecteur sait reconnaître une algèbre de Boole et sait opérer dans cette structure. (Cf. HALMOS 1963; ROSENBLOOM 1950, Ch. I). Pour tenir compte néanmoins des cas où cette hypothèse ne serait pas entièrement vérifiée, nous profiterons de l'introduction de nos notations pour faire quelques rappels.

Algèbre de Boole	Nos notations	Analogue sur $2^{\underline{U}}$
Un ensemble quelconque	$\underline{M}$	$2^{\underline{U}}$, où $\underline{U}$ est un ensemble fini, donc ensemble fini des parties de $\underline{U}$
Deux opérations binaires partout définies sur $\underline{M}$	$\cup$ et $\cap$	Union et intersection
Une opération unaire partout définie sur $\underline{M}$	'	Complément par rapport à $\underline{U}$
Deux éléments distingués	$\bigvee$ et $\bigwedge$	$\underline{U}$ et $\emptyset$, ensemble total et ensemble vide
Une relation d'équivalence	=	Egalité des classes

Les opérations $\cup$, $\cap$ et ' sont soumises à des règles qui, formellement, sont celles de l'union, de l'intersection et du complément.

Ainsi une algèbre de Boole pourra être désignée par

$$\mathcal{B} =\text{df} < \underline{M}, \cup, \cap, ', \bigvee, \bigwedge, = >.$$

2.1. Algèbre de Boole $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ associée à $\mathcal{C}$

Considérons le calcul classique des propositions $\mathcal{C} =\text{df} < \underline{E}, \underline{T}, \supset, \sim >$ comme donné et cherchons à construire une algèbre de Boole.

L'ensemble de base $\underline{M}$ peut être quelconque. Rien ne s'oppose donc à ce que nous choisissions $\underline{E}$. A la place de $\cup$, $\cap$ et ', nous prendrons $\vee$, $\wedge$ et $\sim$, et à la place de $\bigvee$ et $\bigwedge$, les deux ebf $\underline{p} \vee \sim \underline{p} =\text{df}\ \underline{i}$ et $\underline{p} \wedge \sim \underline{p} =\text{df}\ \underline{n}$. Enfin notre relation d'équivalence sera $\longleftrightarrow$.

Métathéorème I

$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} =\text{df} < \underline{E}, \vee, \wedge, \sim, \underline{i}, \underline{n}, \longleftrightarrow >$ est une algèbre de Boole. Nous la nommerons l'algèbre associée à $\mathcal{C}$.

Preuve - Il suffit de montrer que les conventions auxquelles sont soumises les opérations booléennes sont satisfaites. Ainsi, par exemple, chacune des opérations binaires doit être commutative. Il faudra donc s'assurer en particulier que si $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ désignent des éléments quelconques de $\underline{E}$:
$\underline{P} \vee \underline{Q} \longleftrightarrow \underline{Q} \vee \underline{P}$. Donc, par définition de la relation $\longleftrightarrow$:
$\underline{P} \vee \underline{Q} \equiv \underline{Q} \vee \underline{P} \in \underline{T}$. Soit, en éliminant l'abréviation $\equiv$:
$((\underline{P} \vee \underline{Q}) \supset (\underline{Q} \vee \underline{P})) \wedge ((\underline{Q} \vee \underline{P}) \supset (\underline{P} \vee \underline{Q})) \in \underline{T}$. Par l'épithéorème (6), il suffira de montrer que:
$(\underline{P} \vee \underline{Q}) \supset (\underline{Q} \vee \underline{P}) \in \underline{T}$ et $(\underline{Q} \vee \underline{P}) \supset (\underline{P} \vee \underline{Q}) \in \underline{T}$ et, en éliminant l'abréviation $\vee$:

$(\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset P) \in T$ et $(\sim Q \supset P) \supset (\sim P \supset Q \in T$.) Ceci fait partie de la routine de calcul dans $\mathcal{C}$.

Scolies

1. La proposition ci-dessus affirme une propriété de $\mathcal{C}$. Elle porte donc *sur* le calcul $\mathcal{C}$ et nous pourrions la nommer un épithéorème. Nous préférons toutefois parler de métathéorème, d'une part pour introduire le mot qui est d'usage courant, d'autre part pour faciliter les renvois dans le texte, enfin pour une raison plus profonde qui apparaîtra après le métathéorème 2.

2. Le bruit circule que la logique classique ne comporte finalement que deux propositions: la vraie et la fausse. Comme tous les on-dit persistants, celui-ci a quelque fondement que nous examinerons plus loin. En attendant, il est utile d'observer que l'ensemble E est infini et que, en conséquence, l'algèbre de Boole associée est aussi infinie.

2.2. Calcul des propositions $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ associé à $\mathcal{B}$

Donnons-nous une algèbre de Boole *quelconque* $\mathcal{B} =_{df} \langle M, \cup, \cap, {}', V, \Lambda, = \rangle$ et posons les deux définitions:

$$P < Q =_{df} P' \, V \, Q$$
$$T =_{df} \{V\}.$$

Métathéorème 2

$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} =_{df} \langle M, T, <, {}' \rangle$ est un calcul classique des propositions. Nous le nommerons le calcul associé à $\mathcal{B}$.

Preuve - Il suffit de montrer que l'ensemble T choisi est le plus petit sous-ensemble de M qui contient les expressions de la forme:

(A 1) $\quad P < (Q < P)$

(A 2) $\quad (P < (Q < R)) < ((P < Q) < (P < R)$

(A 3) $\quad (P' < Q') < (Q < P)$.

et qui est fermé par rapport à l'application de la règle:

(R) $\quad P,\ P < Q \in T \Rightarrow Q \in T$.

Considérons, par exemple, (A 1). On doit avoir : $P < (Q < P) \in T$ soit, par définition, $P' \cup (Q' \cup P) \in T$.

Les règles de calcul dans $\mathcal{B}$ donnent successivement :

$$P' \cup (Q' \cup P) = P' \cup Q' \cup P = (P \cup P') \cup Q' = V \cup Q' = V.$$

Or $V \in \{V\}$ et, par définition, $V \in T$. Ainsi toute expression de la forme (A 1) est élément de T et il en va de même des formes (A 2) et (A 3).

Quant à la règle (R) on a :

$P,\ P < Q \in T \Longrightarrow P,\ P' \cup Q \in T \Longrightarrow P \in T$ et $P' \cup Q \in T$.
Mais $P \in T \Longrightarrow P \in \{V\} \Rightarrow P = V$. De même $P' \cup Q = V$.
Par les règles de calcul dans $\mathcal{B}$: $P = V \Longrightarrow P' = \Lambda$
et $P' \cup Q = \Lambda \cup Q = Q = V$. Donc $Q \in \{V\}$ et $Q \in T$.

Scolie

Nous avons dit que $\mathcal{C}$ était *le* calcul des propositions et nous avons montré que $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ était *un* calcul des propositions. Ceci demande quelques explications.

Le calcul $\mathcal{C}$ est un objet unique, entièrement défini sous chiffre 1. Il est essentiellement constitué par un ensemble de mots E et par un de ses sous-ensembles T. $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ est tout autre. D'une part M est quelconque, sa cardinalité peut fort bien être différente de celle de $\underline{E}$, par exemple finie ou de la puissance du continu. L'ensemble $\{V\}$ ne contient qu'un élément et, dans $\mathscr{C}$, $\underline{T}$ a la puissance du dénombrable.

D'autre part, on aura peut-être remarqué que, dès l'introduction du métathéorème 1, nous avions pris quelques précautions oratoires (assez discrètes, il est vrai!). C'est que nous sommes en train de relier des objets de pensée de nature entièrement distincte (d'où l'emploi du mot "métathéorème"). D'un côté nous avons $\mathscr{C}$, ensemble de mots; de l'autre $\mathscr{C}_{\mathcal{B}}$ qui est un ensemble muni d'opérations. Il s'ensuit que, tout en jouant formellement sur les signes -ce qui nous a permis de passer de $\mathscr{C}$ à $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ et de $\mathcal{B}$ à $\mathscr{C}_{\mathcal{B}}$- nous avons en fait interprété les signes de $\mathscr{C}$. En particulier, tout s'est passé comme si $\supset$, $\sim$ puis V et Λ étaient conçus comme des opérateurs. Nous sommes ainsi passés d'un point de vue purement formel et logique à un point de vue algébrique.

Dans ces conditions alors un calcul (classique) des propositions est un ensemble, muni de deux opérations qui satisfont ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) et ($\underline{R}$).

Métathéorème 3

Calcul classique des propositions et algèbre de Boole sont des notions "équivalentes", en ce sens que, étant donné $\mathscr{C}$ on sait lui associer une et une seule algèbre de Boole $\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ et que, étant donnée une algèbre de Boole $\mathcal{B}$, on sait lui associer un calcul des propositions $\mathscr{C}_{\mathcal{B}}$.

2.3. Généralisations

$\mathcal{B}_{\mathscr{C}}$ est univoquement déterminée. En est-il de même pour $\mathscr{C}_{\mathcal{B}}$? Une façon de répondre à la question est de s'interroger sur les raisons du succès de la preuve du métathéorème 2.

Nous avons vu que, aussitôt que $\mathcal{B}$ est donnée, toute expression d'une des formes ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) est égale à V . Il s'ensuit que l'ensemble que nous choisirons pour $\underline{T}$ doit nécessairement contenir l'élément V. Mais peut-il en contenir d'autres ?

Rappel

Si $\mathcal{B}$ =df $< \underline{M}, \cup , \cap , ' , V , \Lambda , = >$ est une algèbre de Boole, un sous-ensemble $\underline{F}$ de $\underline{M}$ est un <u>filtre</u> de $\mathcal{B}$ (les Anglais disent volontiers <u>a sum ideal</u>) si :

(1) $V \in \underline{F}$
(2) $\underline{x}, \underline{y} \in \underline{F} \Longrightarrow \underline{x} \cap \underline{y} \in \underline{F}$
(3) $\underline{x} \in \underline{F}, \underline{y} \in \underline{M} \Longrightarrow \underline{x} \cup \underline{y} \in \underline{F}$.

$\underline{F}$ est un <u>filtre maximal</u> si:

(1) $\underline{F}$ est un sous-ensemble propre de $\underline{M}$
(2) $\underline{F}$ est un filtre
(3) Tout filtre qui contient $\underline{F}$ est soit identique à $\underline{M}$ soit identique à $\underline{F}$.

Métathéorème 4

$\mathscr{C}_{\mathcal{B}}$ =df $< \underline{M}$, filtre de $\mathcal{B}$, $<$, $' >$ est un calcul classique des propositions.

Preuve - Il reste, après ce que nous avons dit, à établir que $\underline{P}, \underline{P} < \underline{Q} \in$ filtre $\Longrightarrow \underline{Q} \in$ filtre.

Appelons $\underline{F}$ le filtre choisi. On a :

$\underline{P} \in \underline{F}, \underline{P}' \cup \underline{Q} \in \underline{F} \Longrightarrow \underline{P} \cap (\underline{P}' \cup \underline{Q}) \in \underline{F}$ (Df. filtre: (2))
$\underline{Q} \cup (\underline{P} \cap (\underline{P}' \cup \underline{Q})) \in \underline{F}$ (Df. filtre: (3))

Or, les règles de calcul dans $\mathcal{B}$, donnent successivement :

$$\underline{Q} \cup (\underline{P} \cap (\underline{P}' \cup \underline{Q})) = \underline{Q} \cup (\underline{P} \cap \underline{P}') \cup (\underline{P} \cap \underline{Q}) = \underline{Q} \cup \Lambda \cup (\underline{P} \cap \underline{Q}) = \underline{Q} \cup (\underline{P} \cap \underline{Q}) = \underline{Q}.$$

Donc $\underline{Q} \in \underline{F}$.

Scolie

On remarque que les trois conditions qui définissent un filtre sont utilisées dans la preuve. (La condition (1) assure que toute expression d'une des formes ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) fait partie de $\underline{F}$). Il s'ensuit qu'aucune notion plus faible ne saurait conduire à un calcul classique des propositions.

Métathéorème 5

Si le filtre choisi est maximal, $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ est un calcul <u>catégorique</u>, par quoi on entend que, quel que soit $\underline{P} \in \underline{M}$, soit $\underline{P}$ soit $\underline{P}'$ est élément du filtre.

Preuve - Elle est du ressort de la théorie des algèbres de Boole (cf. HALMOS 1963, pp. 52-53 qui donne la preuve pour la notion duale d'idéal).

3. - INTERPRETATION DE $\mathcal{C}$

3.1. Valeur de vérité

Parmi les diverses interprétations possibles de $\mathcal{C}$, l'une intéresse particulièrement le logicien. C'est celle où les variables désignent des propositions et où $\supset$, $\sim$ puis $\vee$, $\wedge$ et $\equiv$ désignent des opérations entre propositions.

Intuitivement, une proposition est une expression susceptible de prendre une valeur de vérité, en d'autres termes d'être vraie, fausse, probable, plausible, etc...

Donnons-nous donc un ensemble $\underline{B}$ quelconque et soit $\underline{V}$ un sous-ensemble propre et non vide de $\underline{B}$. Nous dirons que $\underline{B}$ est un <u>ensemble de valeurs de vérité</u> et que $\underline{V}$ est un <u>ensemble de valeurs désignées</u>.

Une application quelconque $\underline{v}: \underline{W} \longrightarrow \underline{B}$ détermine une <u>valuation</u> des variables.

Reste à faire correspondre un élément de $\underline{B}$ aux autres éléments de $\underline{E}$. Profitons du métathéorème 1 pour admettre que les éléments de $\underline{E}$ sont écrits à l'aide des variables et des seuls signes $\vee$, $\wedge$ et $\sim$.

Scolie

Cela revient à définir $\underline{E}$ de la façon suivante :

(1) $\underline{P} \in \underline{W} \Longrightarrow \underline{P} \in \underline{E}$
(2) $\underline{P} \in \underline{E} \Longrightarrow \sim \underline{P} \in \underline{E}$
(3) $\underline{P}, \underline{Q} \in \underline{E} \Longrightarrow \underline{P} \vee \underline{Q} \in \underline{E}$
(4) $\underline{P}, \underline{Q} \in \underline{E} \Longrightarrow \underline{P} \wedge \underline{Q} \in \underline{E}$
(5) Rien ...

On peut alors montrer (dans $\mathcal{C}$) que $\underline{P} \supset \underline{Q} =\text{df} \sim \underline{P} \vee \underline{Q}$.

Donnons-nous trois opérations sur $\underline{B}$, deux opérations binaires $+$ et $\times$ et une opération unaire $^{-}$.

Posons :

$$\underline{v}(\underline{P} \vee \underline{Q}) = \underline{v}(\underline{P}) + \underline{v}(\underline{Q})$$
$$\underline{v}(\underline{P} \wedge \underline{Q}) = \underline{v}(\underline{P}) \times \underline{v}(\underline{Q})$$
$$\underline{v}(\sim \underline{P}) = \overline{\underline{v}(\underline{P})}$$

Nous avons donc maintenant $\underline{v} : \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$.

Scolie

L'application $\underline{v}$ détermine univoquement la valeur de vérité d'un élément quelconque de $\underline{E}$, donc d'une proposition quelconque. Connaissant la valeur de chaque variable de $\underline{P} \in \underline{E}$, la valeur de $\underline{P}$ elle-même est entièrement déterminée. C'est-là un des aspects du caractère extensionnel de la plupart des systèmes logiques habituels.

Considérons enfin le sous-ensemble $\underline{L}$ de $\underline{E}$, défini de la façon suivante :

$$\underline{L} =_{df} \left\{ \underline{P} : \underline{P} \in \underline{E} \text{ et } (\forall \underline{v})\ \underline{v}(\underline{P}) \in \underline{V} \right\}$$

Les éléments de $\underline{L}$ ne prennent donc leurs valeurs que dans $\underline{V}$, ensemble des valeurs désignées. $\underline{L}$ sera dit, en conséquence, ensemble des lois logiques.

Exemple : $\underline{B} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ $\qquad$ $\underline{V} = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

Si $\underline{x}, \underline{y} \in \underline{B}$: $\underline{x} + \underline{y} = \max(\underline{x},\underline{y})$, $\underline{x} \times \underline{y} = \min(\underline{x},\underline{y})$, $\overline{\underline{x}} = 1 - \underline{x}$; Si $\underline{x} = \underline{y}$, on pose : $\max(\underline{x},\underline{y}) = \min(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x} = \underline{y}$

Il existe dès lors trois applications possibles de $\underline{p}$ dans $\underline{B}$: $\underline{v}(\underline{p}) = 0$, $\underline{v}(\underline{p}) = \frac{1}{2}$ et $\underline{v}(\underline{p}) = 1$. On voit immédiatement que $\underline{v}(\underline{p} \vee \sim \underline{p}) = \underline{v}(\underline{p}) + \overline{\underline{v}(\underline{p})} = \frac{1}{2}$ ou 1. Donc $\underline{p} \vee \sim \underline{p} \in \underline{L}$. On a ici une loi logique.

Questions

1. $(\underline{p} \wedge \underline{q}) \supset \underline{p}$ et $\underline{p} \vee \underline{q}$ sont-elles des lois logiques ?

2. Que peut-on dire de $\underline{p} \vee \sim \underline{p}$ si on choisit comme ensemble de valeurs désignées $\underline{V}' = \{1\}$?

Scolies

1. Cette façon de constituer une logique par l'intermédiaire des valeurs de vérité et de l'ensemble L des lois logiques, remonte sous cette forme générale à Łukasiewicz et à Tarski (1930) (cf. TARSKI 1956, Ch. IV).

2. Il est clair que rien n'empêcherait de procéder d'une manière analogue pour l'ensemble $\underline{E}$ original. Il suffirait de poser :

$$\underline{v}(\underline{P} \supset \underline{Q}) = \overline{\underline{v}(\underline{P})} + \underline{v}(\underline{Q}).$$

Nous n'avons utilisé $\vee$ et $\wedge$ que pour être fidèle au titre de cet exposé.

3.2. La logique classique

$\underline{E}$ étant supposé construit, nous sommes en présence de deux de ses sous-ensembles. L'un $\underline{T}$ est défini syntaxiquement. L'autre $\underline{L}$ est défini sémantiquement. Il est évident qu'en général, $\underline{T}$ et $\underline{L}$ seront deux ensembles distincts. La question est de savoir à quelles conditions $\underline{T} = \underline{L}$.

Métathéorème 6

Si $\underline{B} = \{0,1\}$, si $\underline{V} = \{1\}$ et si +, × et − sont les opérations booléennes sur $\underline{B}$, alors $\underline{T} = \underline{L}$.

Preuve - Elle comporte deux parties puisqu'il faut montrer que $\forall\ \underline{P} \in \underline{E}$: $\underline{P} \in \underline{T} \Longleftrightarrow \underline{P} \in \underline{L}$.

$\Longrightarrow$) Il faut montrer que, si $\underline{P} \in \underline{T}$ alors $\underline{v}(\underline{P}) = 1$. Mais dire que $\underline{P} \in \underline{T}$, c'est dire que $\underline{P}$ est d'une des formes ($\underline{A}$ 1) à ($\underline{A}$ 3) ou est obtenu à partir d'une de ces formes par application de (R), ou etc.. Il n'y a aucune difficulté à montrer que si $\underline{P}$ est de l'une des formes en question alors $\underline{v}(\underline{P}) = 1$ et que $\underline{v}(\underline{P}) = \underline{v}(\underline{P} \supset \underline{Q}) = 1 \quad \underline{v}(\underline{Q}) = 1$.

$\Longleftarrow$) La preuve est moins simple. Comme elle fait usage d'un assez grand nombre de propriétés de $\mathscr{C}$, elle relève d'un cours de logique et nous l'omettrons.

Scolie

Cette preuve a été fournie pour la première fois par Post (1921). On la trouvera par exemple dans HUGHES et LONDEY 1965, pp. 139-141. Une preuve différente est donnée par MENDELSON 1964, pp. 36-37.

Corollaire 1

En logique classique, tout élément de $\underline{E}$ peut être dit vrai ou faux, selon que sa valeur est 1 ou 0.

Scolie

Il y a ici un point assez délicat que nous avons déjà annoncé. L'ensemble $\underline{E}$ des propositions est infini mais, pour chaque valuation et pour tout $\underline{P} \in \underline{E}$, on a soit $\underline{v}(\underline{P}) = 1$ soit $\underline{v}(\underline{P}) = 0$. Cela signifie que $\underline{P} \vee \sim \underline{P} \in \underline{T}$, donc que $(\forall \underline{v})\ \underline{v}(\underline{P} \vee \sim \underline{P}) = 1$. En revanche, cela ne signifie nullement que $\underline{P} \in \underline{T}$ ou $\sim \underline{P} \in \underline{T}$, soit un épithéorème de $\mathscr{C}$ (cf. ROSENBLOOM 1950, pp. 49-50).

Questions

3. Soit $\underline{E}_1 \subset \underline{E}$, le sous-ensemble de $\underline{E}$ obtenu à partir de la seule variable $\underline{p}$ et des opérations $\vee$, $\wedge$ et $\sim$. Combien $\underline{E}_1$ possède-t-il d'éléments ?

4. Combien de classes d'équivalence, relativement à la relation $\longleftrightarrow$ peut-on faire sur $\underline{E}_1$?

5. Mêmes questions pour $\underline{E}_2 \subset \underline{E}$, sous-ensemble de $\underline{E}$ obtenu à partir des seules variables $\underline{p}$ et $\underline{q}$.

Corollaire 2

$\mathscr{C}$ est consistant, en ce sens (syntaxique) que $\underline{T}$ est strictement inclus dans $\underline{E}$.

Preuve - $\underline{p} \wedge \sim \underline{p} \in \underline{E}$. Mais $(\forall \underline{v})\ \underline{v}(\underline{p} \wedge \sim \underline{p}) = 0 \Longrightarrow$
$\underline{p} \wedge \sim \underline{p} \notin \underline{L} \Longrightarrow \underline{p} \wedge \sim \underline{p} \notin \underline{T}$.

Corollaire 3

$\mathscr{C}$ est non contradictoire, en ce sens (sémantique) qu'il n'est pas possible d'y avoir simultanément les thèses $\underline{P}$ et $\sim \underline{P}$.

Preuve - $\underline{P} \in \underline{T} \Longrightarrow \underline{P} \in \underline{L} \Longrightarrow (\forall \underline{v})\ \underline{v}(\underline{P}) = 1 \Longrightarrow$
$(\forall \underline{v})\ \underline{v}(\sim \underline{P}) = 0 \Longrightarrow \sim \underline{P} \notin \underline{L} \Longrightarrow \sim \underline{P} \notin \underline{T}$.

Corollaire 4

$\mathscr{C}$ est <u>décidable</u>, en ce sens que, quel que soit $\underline{P} \in \underline{E}$, il existe une procédure finie pour décider si $\underline{P} \in \underline{T}$ ou si $\underline{P} \notin \underline{T}$.

Preuve - $\underline{P}$ n'a qu'un nombre fini de variables et, en conséquence, le nombre des valuations distinctes est fini. Il suffit de les examiner toutes pour décider si $\underline{P} \in \underline{L}$ ou non.

Scolie

Il est donc possible de dire que, dans $\mathscr{C}$, les trois ensembles $\underline{W}$, $\underline{E}$ et $\underline{T}$ sont récursifs au sens où nous avons introduit ce terme. On comprend aussi pourquoi la recherche des thèses est ici sans intérêt véritable. Il faut cependant noter que seule la partie la plus élémentaire de la logique est ainsi décidable et que tout système logique véritablement "intéressant" possède un ensemble de thèses, engendré récursivement, mais non récursif.

Question

6. Si $\underline{P}$ contient $\underline{n}$ variables distinctes, combien faut-il considérer de valuations différentes ?

POUR CONTINUER

Le calcul classique des propositions apparaît à l'analyse comme un cas particulier, presque un cas-limite. Il équivaut, au sens du métathéorème 3, à une algèbre de Boole. Examiné sous l'aspect des valeurs de vérité, il repose même sur la plus simple des algèbres de Boole possibles: celle de George Boole (1815 - 1864).

Du point de vue de l'interprétation sémantique. ceci conduit à attribuer à la relation d'implication et aux divers opérateurs (négation et disjonction en particulier) des propriétés dont on peut douter qu'elles soient pertinentes à toutes les applications: physique quantique, psychologie, sociologie. C'est la raison pour laquelle divers auteurs ont cherché à construire des logiques plus ou moins différentes de la classique.

On peut songer à deux directions. Ou bien on affaiblit les exigences classiques et on est conduit à des logiques dont l'ensemble des thèses $\underline{T}'$ est strictement inclus dans $\underline{T}$: logiques minimale, intuitionniste, "quantique". Ou bien on introduit des opérateurs nouveaux et on est amené aux logiques modales, soit au sens étroit, soit au sens de logiques déontiques ou épistémiques.

Les possibilités sont d'ailleurs innombrables, ce dont on se rend facilement compte en songeant à la façon dont nous avons introduit l'ensemble des lois logiques $\underline{L}$. D'un point de vue algébrique, on songe immédiatement à trois voies.
1) Donner à $\underline{B}$ une structure booléenne. mais augmenter le nombre de ses éléments.
2) Procéder de même et introduire des opérations supplémentaires (cas particulièrement intéressant: la logique modale $\underline{S}$ 4. <u>cf</u>. EYTAN 1965, pp. 29-30). 3) Renoncer à la structure booléenne. Cas particulièrement intéressant: la logique quantique (<u>cf</u>. MITTELSTAEDT 1963, pp. 127-138).

Ces diverses logiques non classiques font actuellement l'objet de recherches nombreuses.

BREVES REPONSES AUX QUESTIONS

1. (Q 1) $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ appartiennent à la métalangue.

(Q 2) Si $\underline{P}$ désigne une ebf, tilde $\underline{P}$ désigne une ebf. Si $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ désignent deux ebf, parenthèse gauche $\underline{P}$ crochet $\underline{Q}$ parenthèse droite désigne une ebf.

(Q 3) $\underline{p} \wedge \underline{q}$ s'écrit $\sim (\sim \sim \underline{p} \supset \sim \underline{p}^*)$.
$\underline{q} \equiv \underline{r}$ s'écrit $\sim (\sim \sim (\underline{p}^* \supset \underline{p}^{**}) \supset \sim (\underline{p}^{**} \supset \underline{p}^*))$.

(Q 4) Non, c'est $\sim\sim \underline{p} \supset \underline{p}$ qui peut s'abréger $\sim \underline{p} \vee \underline{p}$.

(Q 5) En répétant la preuve donnée pour $\underline{p} \supset \underline{p}$, mais en utilisant des majuscules.

(Q 6) C'est une relation antisymétrique, donc ici une relation d'ordre.

(Q 7) Un opérateur.

(Q 8) Clauses initiales de $\underline{W}$: (1); de $\underline{E}$: (1); de $\underline{T}$: ($\underline{A}$ 1) - ($\underline{A}$ 3). Clauses de formation de $\underline{W}$: (2); de $\underline{E}$: (2) et (3); de $\underline{T}$: ($\underline{R}$).

(Q 9) La clause finale est contenue dans "le plus petit sous-ensemble".

(Q 10) $\underline{W}$ et $\underline{E}$ sont certainement récursifs. Il suffit de décomposer l'expression (finie) donnée et d'examiner pas à pas si elle répond aux clauses disponibles.

3. (Q 1) $(\underline{p} \wedge \underline{q}) \supset \underline{p}$ s'écrit $\sim (\underline{p} \wedge \underline{q}) \vee \underline{p}$. Donc $\underline{v}(\sim(\underline{p} \wedge \underline{q}) \vee \underline{p}) = \overline{\underline{v}(\underline{p} \wedge \underline{q})} + \underline{v}(\underline{p})$. Le calcul direct montre que, dans tous les cas (il y en a 9) cette valeur est $\frac{1}{2}$ ou 1: $(\underline{p} \wedge \underline{q}) \supset \underline{p} \in \underline{L}$. En revanche, si $\underline{v}(\underline{p}) = \underline{v}(\underline{q}) = 0$, $\underline{v}(\underline{p} \vee \underline{q}) = 0$ et donc $\underline{p} \vee \underline{q} \notin \underline{L}$.

(Q 2) Dans ce cas $\underline{p} \vee \sim \underline{p}$ n'est pas une loi logique.

(Q 3) $\underline{E}_1$ a une infinité d'éléments, ce qui tient à la possibilité des répétitions: $\underline{p} \wedge \underline{p} \wedge \underline{p} \in \underline{E}$.

(Q 4) Quatre classes: 1) Classe des éléments qui ont toujours la valeur 0. Exemple: $\underline{p} \wedge \sim \underline{p}$. 2) Celle des éléments qui ont la valeur 1 si $\underline{v}(\underline{p})=1$ et la valeur 0 si $\underline{v}(\underline{p}) = 0$. Exemple: $\underline{p}$. 3) Celle des éléments qui ont la valeur 0 si $\underline{v}(\underline{p}) = 1$ et la valeur 1 si $\underline{v}(\underline{p}) = 0$. Exemple: $\sim \underline{p}$. 4) Celle des éléments qui ont toujours la valeur 1. Exemple: $\underline{p} \vee \sim \underline{p}$.

(Q 5) $\underline{E}_2$ est infini et peut être réparti en 16 classes d'équivalence.

(Q 6) $2^{\underline{n}}$, évidemment.

BIBLIOGRAPHIE DES OUVRAGES CITES

H.B. CURRY, Leçons de logique algébrique. Paris, Gauthier-Villars, 1952, 163 p.

M. EYTAN, Topologie et logique propositionnelle modale, Mathématiques et sciences humaines, 1965, 12, 29-30.

P.R. HALMOS, Lectures on Boolean Algebras. Princeton, Van Nostrand Company, 1963, IV + 147 p.

G.E. HUGHES, D.G. LONDEY, The Elements of Formal Logic, (University Paperbacks), London, Methuen, 1965, XII + 399 p.

S.C. KLEENE, Introduction to Metamathematics, Amsterdam, North-Holland Publ. Company, 1952, VI + 550 p.

R. MARTIN, Logique contemporaine et formalisation, Paris, P.U.F., 1964, 230 p.

E. MENDELSON, Introduction to Mathematical Logic, Princeton, Van Nostrand Company, 1964, X + 300 p.

P. MITTELSTAEDT, Philosophische Probleme der modernen Physik, Mannheim, Bibliographisches Institut, 1963, 152 p.

P. ROSENBLOOM, The Elements of Mathematical Logic, New York, Dover Publications, 1950, IV + 214 p.

A. TARSKI, Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford, Clarendon Press, 1956, XIV + 471 p.