MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

Des ensembles et de leurs axiomatiques : esquisse de quelques points de vue

Mathématiques et sciences humaines, tome 13 (1965), p. 41-45
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__13__41_0>

M. EYTAN

DES ENSEMBLES ET DE LEURS AXIOMATIQUES : ESQUISSE DE QUELQUES POINTS DE VUE

0. INTRODUCTION

S'il est des mots en vogue parmi le public de mathématiciens et de périmathématiciens de nos jours, ceux d'ensemble, classe, famille, voire catégorie le sont assurément; à tel point d'ailleurs que chez certains qui se targuent de modernisme, la "théorie des ensembles" (ou du moins ce mot) tient le rôle de cheval de bataille. Pourtant ils devraient savoir que la Mathématique joue de sinistres plaisanteries aux non-avertis: elle prend des mots anodins, quotidiens, et leur assigne une signification (ou du moins une définition) précise pouvant différer de leur sens usuel; que le lecteur se rappelle la signification de "groupe" au sens technique, et il verra à quoi nous faisons allusion. Ce n'est pas tout à fait ce genre de piège qui guette le laïc, mais en un certain sens la situation est plus difficile parce que plus délicate. Elle est même délicate à un point tel que l'on se demande comment présenter les choses sans tomber dans un dogmatisme et un pédantisme insupportables. Aussi croyons-nous qu'une bonne - sinon la meilleure - méthode consiste à suivre le cheminement de la pensée; elle montre les raisons de ce qu'on prendrait a priori pour du pur byzantinisme.

1. THÉORIE NAÏVE

"De tout temps", dit un éminent historien de la Mathématique (cf. [1]), "mathématiciens et philosophes ont utilisé des raisonnements de façon plus ou moins consciente,... qui ne font intervenir que les notions d'appartenance et d'inclusion". Il n'en est pas moins vrai que c'est Georg Cantor qui, dans une série de mémoires publiés aux Mathematische Annalen entre 1878 et 1897, entreprit d'explorer systématiquement ce domaine. Peu nous importe la nature exacte de ses travaux et leur motivation (initialement des recherches sur les séries trigonométriques); l'essentiel c'est la "définition" d'un ensemble: "Par un ensemble (Menge) on entend un groupement en un tout (Zusammen fassung zu einem Ganzen) M d'objets m bien distincts de notre intuition ou de notre pensée. Ces objets sont appelés les éléments de M". Ce point de vue est aujourd'hui qualifié de "naïf", par opposition à la suite. Il permet d'introduire sans difficulté les notions de sous-ensemble ou partie, d'ensemble de parties (avec les opérations ensemblistes d'union, intersection et complémentation), d'ensemble vide, etc.. (cf. [3]). A ce niveau ensemble, classe, famille, catégorie, collection sont tous synonymes. De plus, et c'est important, toute propriété définit un ensemble, à savoir l'ensemble (éventuellement vide) des objets la possédant.

2. THEORIE AXIOMATIQUE

2.1. Les paradoxes: On en était à peine aux premières applications de la théorie de Cantor lorsque Buroli-Forti découvrit, en 1897, un premier paradoxe; Cantor lui-même, en 1899 et Russel, en 1905 en découvrirent d'autres. Pour ne pas nous perdre dans des détails techniques nous ne présentons que celui de Russel: la classe de tous les ensembles est elle-même un ensemble, celui-ci est par définition élément de lui-même; désignons par U la classe de tous les ensembles x tels que x n'est pas un élément de x, (U n'est pas vide) alors si U est un élément de U, il est manifeste que U n'est pas un élément de U (par sa définition même); si par contre U n'est pas un élément de U, il est manifeste que U est un élément de U (puisqu'il n'est pas un x du type ci-dessus).

La découverte des paradoxes provoque une grave crise psychologique parmi les mathématiciens car ils ont toujours été persuadés qu'ils démontrent des "vérités", suivant en cela Platon pour qui la Mathématique est un moyen d'accès à la "vérité en soi" et s'occupe d'objets ayant une existence dans le monde des idées. "Il faudrait avoir tout à fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échappent" dit Pascal. Or les raisonnements utilisés dans les paradoxes sont irréprochables; que faire alors? Plusieurs solutions ont été proposées: les unes partent de l'idée que justement les raisonnements utilisés (c'est-à-dire les principes de la logique classique) sont faux, les autres repoussent la décision sur la "vérité" au delà de la Mathématique, soutenant que celle-ci ne peut être fondée sur un appel, explicite ou non, à l'intuition.

C'est la deuxième solution, dite formaliste, que nous esquisserons. Le formalisme extrême considère que "l'exactitude mathématique réside dans le développement de la suite des relations, et est indépendante de la signification que l'on pourrait vouloir donner à ces relations ou aux entités qu'elles relient" (Brouwer, cité dans [1]). Aussi va-t-il fonder la théorie des ensembles sur une base axiomatique analogue à celle de la géométrie élémentaire, où peu importe de savoir définir les objets que l'on appelle ensembles ou ce que signifie la relation d'appartenance, pourvu que l'on sache quelles sont les conditions auxquelles ils doivent obéir (de même qu'en géométrie on ne définit pas ce que sont un "point", une "droite", et "l'incidence", mais on leur impose d'obéir à des conditions telles que: "il y a une droite et une seule incidente à deux points").

Ainsi on renonce à définir un ensemble ou la relation entre un ensemble et ses éléments: on part d'une relation binaire indéfinie, l'appartenance, et d'objets indéfinis, les ensembles. Certains énoncés contenant la relation d'appartenance (et d'autres définies à partir de celle-ci) sont introduits sous le nom d'axiomes. Dès lors une proposition de la théorie des ensembles sera vraie si et seulement si elle peut être déduite des axiomes par un raisonnement logique. Bien entendu, pour que "du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser", il faut qu'une axiomatique correcte permette de retrouver le résultat de la théorie naïve, tout en excluant les ensembles "paradoxaux" tel l'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas. Autrement dit, nous serons toujours obligés, dans cette perspective, d'éliminer certains objets que la théorie naïve appelait ensembles, mais qui n'en sont plus dans notre théorie.

2.2. Le système d'axiomes de Zermelo-Fränkel

Le premier système d'axiomes fut donné par Zermelo en 1908; il exclut des "ensembles" (au sens naïfs) qui sont "trop grands" à l'aide d'un axiome de sélection (Aussonderung), un prédicat $A(x)$ ne déterminant un ensemble que si $A(x)$ entraîne déjà une relation de la forme $x \in E$.

Cependant ce système n'était pas tout à fait satisfaisant en ce qu'il donnait une définition vague de ce qu'est un prédicat $A(x)$ (cf. plus loin). Aussi Fränkel a-t-il apporté quelques modifications en 1922. Le système est appelé système de Zermelo-Fränkel et est couramment adopté. Aujourd'hui lorsqu'un mathématicien parle d'ensemble il entend généralement ce terme au sens d'objet défini par les axiomes de Zermelo-Fränkel. Les voici, avec quelques définitions et commentaires:

On considère un domaine non vide d'objets, les ensembles (de même qu'en géométrie on considère points et droites sans définir ce que sont un point et une droite). Entre les objets du domaine est donnée une relation d'appartenance (de même qu'en géométrie est donnée une relation d'incidence entre points et droite, relation définie par les axiomes); si x appartient à y on note $x \in y$. La relation $x \in y$ sera supposée vraie ou fausse, tertium non datur. On supposera connues les règles habituelles, mais l'égalité entre ensembles sera définie (cf. déf. 2).

Définition 1 : si pour tout x, $x \in s$ implique $x \in t$, alors s est <u>inclus</u> dans t (on dit encore que s est une <u>partie</u> de t), et on écrit $s \subset t$.

Ainsi contrairement à la méthode cantorienne on ne peut définir des parties de t en "groupant" certains de ses éléments, à moins qu'on ne sache déjà qu'un tel "groupement" est un ensemble. La définition 1 implique par ailleurs que l'inclusion est réflexive et transitive.

Définition 2 : si $s \subset t$ et $t \subset s$, alors $s = t$; sinon $s \neq t$

Ainsi deux ensembles ne sont égaux que s'ils contiennent les mêmes objets; de plus l'inclusion est anti-symétrique. Cette définition montre que $x \in s$ et $s = t$ entraînent $x \in t$, i.e. l'égalité des ensembles permet de les substituer à la droite du signe $\in$. Pour la gauche, nous ne savons rien aussi doit-on postuler l'

<u>Axiome d'extension:</u> $x \in s$ et $x = y$ entraîne $y \in s$.

Si deux ensembles sont égaux tout ensemble ayant pour élément l'un a aussi pour élément l'autre; des objets (ensembles) égaux sont contenus dans les mêmes ensembles.

Un ensemble étant défini par ses éléments (et inversement), on notera l'unique ensemble contenant a, b, c, ... par le symbole $\{a, b, c, \dots\}$ sans égard pour l'ordre des éléments.

Procédons maintenant à fabriquer de nouveaux ensembles à partir d'ensembles donnés. On commence par l'

<u>Axiome des paires</u>: deux ensembles distincts quelconques a, b, étant donnés, il y a un ensemble auquel ils appartiennent tous deux, noté $\{a, b\}$.

Ne nous arrêtons pas en si bon chemin.

<u>Axiome des unions</u>: pour tout ensemble s d'ensembles, il y a un ensemble contenant tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles de s, dit union des ensembles de s et noté Us. En général on n'écrit pas Us mais $U\{x: x \in s\}$ ou plus souvent encore $\underset{x \in s}{U} x$. Dans le cas particulier de $U\{x: x \in \{a,b\}\}$ on utilise la notation $a \cup b$; de même pour $U\{x: x \in \{a,b,c,\dots\}\} = a \cup b \cup c \cup \dots$

Jusqu'à présent on n'est jamais parvenu à construire un ensemble non dénombrable à partir d'une suite d'ensembles dénombrables (la définition de suite et dénombrable est donnée plus loin). Voici pour y remédier l'

<u>Axiome des parties</u>: pour tout ensemble s il y a un ensemble $\mathfrak{P}$(s) d'ensembles qui a pour éléments toutes les parties de s, dit ensemble des parties de s.

Le nouvel ensemble fabriqué ne contient que des parties de s, i.e. des objets que l'on sait déjà être des ensembles. Aussi une méthode plus puissante de formation de parties d'un ensemble est-elle nécessaire: la voici

<u>Axiome de sélection</u> ("Aussonderung"): pour tout ensemble s et tout prédicat A(x) bien défini ("definit") pour tous les éléments de s, il y a un ensemble t contenant précisément ceux des éléments x de s qui vérifient A(x), noté $\{x \in s: A(x)\}$.

Dans la formulation initiale de Zermelo un prédicat bien défini ("definite Eigenschaft") doit être tel que les axiomes et règles logiques permettent de décider si un x le vérifie ou non. Il est clair qu'une telle définition est vague. Fränkel propose de définir un prédicat de cette espèce comme une formule bien formée (well formed formule) de la logique fonctionnelle du premier ordre i.e. une proposition formée à partir des propositions de base en itérant les opérations de conjonction, négation et quantification selon les règles de formation bien connues. Le symbole A(x) est destiné à souligner que l'occurrence de x dans A(x) est libre i.e. non précédée de "pour tout x" ou "pour quelque x".

On démontre alors aisément:

1) Il existe un ensemble (et un seul) vide, noté $\emptyset$.

2) Pour tout ensemble non-vide t, il existe un ensemble unique dont les éléments sont communs à tous les éléments de t, appelé intersection des ensembles de t et noté $\bigcap t$ ou $\bigcap\{x: x \in t\}$ ou encore le plus souvent $\bigcap\limits_{x \in t} x$.

3) Pour tout ensemble t dont les éléments sont disjoints (intersections deux à deux vides), il y a un ensemble unique dont les éléments sont les ensembles qui contiennent un seul élément de chaque ensemble de t, appelé produit cartésien des ensembles de t et noté $\prod t$ ou $\prod\{x: x \in t\}$ ou encore le plus souvent $\prod\limits_{x \in t} x$.

Manifestement, si $\emptyset \in t$, le produit cartésien t est vide. Peut-on affirmer inversement que $\emptyset \in t$ implique $t \neq \emptyset$? Si tel est le cas, on peut "choisir" un élément arbitraire dans chaque $x \in t$. D'où l'

<u>Axiome du choix</u> (Auswahl): pour tout ensemble t dont les éléments sont disjoints, si $\emptyset \notin t$ alors le produit cartésien $\prod t$ est non-vide.

Remarquons que l'ensemble défini par cet axiome (i.e. un élément de $\prod t$) n'est pas unique.

Cet axiome a fait couler beaucoup d'encre en son temps, et bien que de nos jours il ne soit plus sérieusement contesté, on a pris l'habitude de préciser dans chaque démonstration si on y a fait appel ou non. Disons simplement qu'on en a fait un usage considérable dans toutes les branches de la Mathématique.

Au point où nous en sommes, on ne peut démontrer l'existence d'un ensemble infini. D'où l'

<u>Axiome d'infinité</u>: il y a au moins un ensemble v ayant les propriétés suivantes:

(i) $\emptyset \in v$
(ii) si $x \in v$ alors $\{x\} \in v$ aussi.

Un tel ensemble v est donné en particulier par $v_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$ que l'on peut considérer comme l'ensemble des entiers naturels. Au lieu de cet axiome on peut en introduire un autre qui est moins simple mais plus naturel

Axiome* de l'infinité: il y a au moins un ensemble v* ayant les propriétés
(i*) $\emptyset \in v^*$
(ii*) si $x \in v^*$ alors $x \cup \{x\} \in v^*$ aussi.

En particulier:
$v_0^* = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$ est un tel ensemble, que l'on peut identifier avec les entiers naturels (le successeur de x est alors $x \cup \{x\}$).

Ces sept axiomes, dus à quelques modifications près à Zermelo, ne suffisent pas tout à fait. Ainsi un ensemble qui contiendrait en plus d'un ensemble infini (par exemple v_0) l'ensemble des parties de chaque ensemble de v. Fränkel introduisit donc l'

Axiome de substitution: pour tout ensemble s et pour toute fonction f d'une seule variable définie sur s, il existe un ensemble unique contenant tous les f(x), $x \in s$.

Autrement dit si le domaine de définition d'une fonction est un ensemble, son arrivée est un ensemble aussi.

Le système ainsi constitué permet de développer une théorie des ensembles, celle qui est usuellement adoptée par les mathématiciens. On consultera avec profit l'excellente introduction [4], dont une traduction française est sous presse.

(à suivre)

BIBLIOGRAPHIE PARTIELLE

[1]. BOURBAKI: Note historique (Chap. 1 à 4) in Eléments de Mathématique, Livre I, Chap. 4, Structures (Hermann, Paris, 1958).

[2]. WANG Hao and McNAUGHTON R.: Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles - Paris et Louvain, 1953.

[3]. BOURBAKI: Eléments de Mathématique, Livre I, Fascicule de résultats (Hermann, Paris, 1958).

[4]. HALMOS: Naive Set Theory (Van Nostrand, Princeton, 1960)
Trad. française sous presse, chez Gauthier-Vilars.

[5]. FRAENKEL A.A.: Abstrait Set Theory Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, 1953.

[6]. FRAENKEL A.A. and BAR-HILLEL Y.: Foundations of Set Theory, Studies in Logic, North-Holland, Amsterdam, 1958.