MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

R. D. LUCE

# Les mathématiques utilisées en psychologie mathématique

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 13 (1965), p. 23-39

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__13__23_0>

R.D. LUCE

# LES MATHEMATIQUES UTILISEES EN PSYCHOLOGIE MATHEMATIQUE*

*Traduit de l'anglais par P. Bovet **

## POURQUOI CET ARTICLE ?

L'utilisation des mathématiques en psychologie a connu ces dernières années des progrès considérables, à tel point que l'on a été obligé de créer une nouvelle expression, la "psychologie mathématique", pour désigner le domaine de recherche où l'intégration des mathématiques et de la psychologie est la plus poussée, c'est-à-dire où l'hypothèse du chercheur revêt un aspect complétement formalisé et où cette représentation mathématique constitue un élément essentiel du schéma explicatif. Quelles sont les parties des mathématiques qui servent le plus souvent en psychologie mathématique? Cette question, deux catégories de lecteurs de Mathématiques et Sciences Humaines peuvent tout particulièrement se la poser : d'une part, des chercheurs en psychologie travaillant sur un problème et cherchant à acquérir une spécialisation mathématique qui leur permette de formuler leur problème en termes formalisés; d'autre part, des mathématiciens de métier en possession d'un outil, désireux de faire "travailler" cet outil en l'appliquant à l'étude des problèmes psychologiques où il a le plus de chance d'être efficace.

Pour répondre à cette question, nul n'était plus qualifié que le professeur Luce, dont les contributions importantes et nombreuses à la psychologie mathématique sont bien connues : qu'il suffise de rappeler ici que le Professeur Luce a dirigé la publication du récent et monumental **Handbook of Mathematical Psychology** (1).

Dans l'article que l'on va lire, on trouvera un exposé d'ensemble, d'une part des divers domaines actuels de la psychologie mathématique, d'autre part, des divers secteurs des mathématiques, envisagés au point de vue de leurs applications en psychologie. Certaines opinions émises seront pêut-être contestées en particulier, on peut critiquer une restriction trop sévère du domaine de la psychologie mathématique à la psychologie expérimentale . Mais l'exposé constitue dans l'ensemble une source d'information remarquablement précise et objective; c'est pourquoi nous pensons que sa publication dans cette revue pourra constituer un encouragement efficace à tous ceux qui sont décidés à utiliser la mathématique comme instrument de recherche dans une science humaine.

H. ROUANET

(1) Analysé dans un des numéros précédents de M.S.H.

(*) Chercheur au Laboratoire de Psychologie Expérimentale de la Sorbonne.

**N.D.L.R.* *Nous remercions l'auteur et les éditeurs d'avoir autorisé la publication dans M.S.H. de cet article dont l'original est paru dans "American Mathematical Monthly" 1964 vol. 71 n° 4.*

## INTRODUCTION

Les questions fondamentales qui se posent aujourd'hui et probablement pour quelque temps encore, dans l'application des mathématiques à des problèmes psychologiques, sont des questions relatives à la formulation de ces problèmes en termes mathématiques. La résolution de problèmes mathématiques difficiles ainsi que l'analyse de situations expérimentales complexes en termes de théories précises, constituent des tâches relativement secondaires dans la mesure où problèmes et théories sont correctement formulés. Notre domaine n'est pas encore balisé par les concepts et les variables de base qui devraient guider l'insertion des mathématiques; de telle sorte que celle-ci ne suit pas une démarche sans problème, comme c'est actuellement devenu le cas dans la plupart des sciences physiques. En fait, nous sommes approximativement dans la situation des sciences physiques du XVIe siècle (ou du XVIIème en étant optimiste), mais l'analogie est loin d'être parfaite. Dans nos efforts, souvent tâtonnants et toujours longs, pour isoler et épurer des variables fondamentales parmi les innombrables mais vagues idées et concepts de la psychologie du sens commun, nous sommes proches des premiers physiciens. Mais nous différons d'eux par l'étendue des techniques à notre disposition.

En effet, les nouvelles réalisations électroniques - en particulier les calculateurs extrêmement rapides - nous permettent un contrôle des conditions expérimentales et une capacité de calcul dans l'analyse des données, incomparablement plus vastes et plus pénétrants que ceux dont devaient se contenter ces physiciens. D'autre part, la plupart des mathématiques que nous utilisons aujourd'hui étaient pratiquement inconnues il y a trois siècles.

## DES APPLICATIONS À QUELLE PSYCHOLOGIE?

On utilise aujourd'hui les mathématiques dans certains secteurs du domaine psychologique, mais dans certains secteurs seulement. En effet, pour la plus grande joie de tous ceux qui ne voient pas d'un bon oeil la complexité mathématique croissante de la littérature psychologique, d'immenses secteurs de la psychologie, en recherche fondamentale comme en recherche appliquée, restent pratiquement en marge de toute incursion mathématique. Les seuls domaines importants qui aient été atteints sont ceux que l'on rassemble d'ordinaire sous la bannière de la psychologie expérimentale. Le terme de psychologie "expérimentale" est d'ailleurs impropre, car le champ des recherches où l'on réalise des expériences dépasse très largement le domaine réputé expérimental. En fait, on entend par psychologie expérimentale un ensemble de recherches de base sur des processus psychologiques fondamentaux, comme l'apprentissage, la sensation, la perception et la motivation. Quant à ce qui constitue la psychologie dans son acception courante (c'est-à-dire la psychopathologie, la psychologie de l'enfant, la psychologie de la personnalité et une grande partie de la psychologie sociale), elle n'a pas subi d'autres influences mathématiques sérieuses que celle de la statistique classique. On utilise en particulier abondamment (sinon judicieusement) les épreuves de signification au travers de toute la psychologie. (Je ne parlerai pas plus ici du rôle des statistiques que de celui des ordinateurs dans les recherches de psychologie. Bien qu'ils soient tous deux extrêmement importants, et que, en un certain sens, l'ensemble des mathématiciens soit bon gré mal gré inéluctablement impliqué dans les problèmes qu'ils ont enfantés, nous nous contenterons dans cet article d'envisager les seules applications des mathématiques).

Si nous limitons notre attention aux tentatives d'analyse mathématique des données fournies par les expériences de laboratoire destinées à éclaircir les processus psychologiques fondamentaux, nous devons préciser certaines caractéristiques de ces expériences d'une incidence très importante sur les mathématiques que nous utilisons. Les conduites observées en laboratoire diffèrent sur un certain nombre de points des conduites de la vie courante. En effet, bien que l'on puisse citer des exceptions, le temps est en règle générale transformé en variable discrète dans les situations expérimentales, c'est-à-dire que l'ensemble des événements est organisé, d'une façon ou d'une autre, en un certain nombre d'essais. (Notre vécu quotidien n'est évidemment pas découpé aussi soigneusement). Ainsi, la situation stimulante présentée au sujet (en fait, le sujet doit prêter attention non pas à l'environnement total mais à certains de ses aspects seulement) lui est généralement fournie sous forme de phénomènes discontinus et répétés, d'une nature ou d'une autre. D'autre part, les réponses du sujet, qui peuvent être soit des réponses précisées par la consigne, soit des réactions observables prévues par l'expérimentateur, sont fréquemment limitées à un ensemble discret (fini et restreint dans la plupart des cas). Bien sûr ici encore il est possible de trouver des exemples naturels analogues, mais ils ne constituent certainement pas la règle générale. En effet, la plupart des situations habituelles sont difficiles à étudier parce qu'elles comportent une certaine ouverture ou liberté des réponses. Tandis que dans nos laboratoires la vie a été suffisamment appauvrie pour que ce qu'il en reste supporte les outils conceptuels que nous avons prévus. Enfin, les informations rétroactives et les issues gratifiantes ou pénalisantes d'une expérience sont en général discontinues et délivrées au sujet immédiatement après sa réponse. Cette caractéristique ne se retrouve assurément pas dans la vie moderne, où rétroactions et récompenses nous apparaissent continuellement avec des délais appréciables, le plus souvent d'ailleurs de façon diffuse. (Pour plus de détails sur ce type d'expérience voir [4]).

Il n'est donc pas douteux qu'il existe des différences significatives entre ces expériences de laboratoire que l'on s'efforce de concevoir en termes mathématiques et notre comportement quotidien. Bien sûr, la plupart des psychologues espèrent que les faits et lois découverts au moyen de plans d'expérience limités et souvent artificiels serviront un jour à mieux comprendre des comportements socialement signifiants, mais les différences considérables qui existent entre ces deux types de conduites constituent une âpre vérité que l'on ne peut nier, dans la mesure où les ponts qui devraient les rejoindre n'apparaissent pas chose facile à construire.

Les raisons essentielles du caractère abstrait de l'expérimentation ne sont pas d'origine mathématique, bien que la vulgarisation des mathématiques élémentaires parmi les scientifiques ait pu avoir un certain retentissement sur la mise au point d'expériences. En fait, généralement, ce sont les expérimentalistes eux-mêmes qui ont imposé ces exigences de discontinuité du temps, des stimulus, des réponses et des issues. Et ceci pour que 1) on puisse réaliser des expériences de durée raisonnable, et que 2) on puisse recueillir les résultats de façon fidèle et compatible avec certains types d'analyse. Il est d'ailleurs assez troublant de constater que la plupart des faits et gestes d'un chercheur de laboratoire lui sont imposés par des problèmes de recueil et d'analyse de données.

Du point de vue du mathématicien, cette manière d'agir a pour conséquence de limiter quelque peu le genre de mathématiques qu'il peut utiliser efficacement.

Les mathématiques continues de l'analyse classique ne sont en effet pas spécialement bien adaptées à la discontinuité de la plupart des expériences faites en psychologie. Par exemple, les problèmes psychologiques sont rarement formulés sous forme d'équations différentielles; toutefois de telles équations apparaissent accidentellement lors de la résolution d'un problème posé en d'autres termes. Mais, dans la mesure où il s'agit de la formulation essentielle d'un problème, les méthodes fondamentales de la physique classique sont très peu utilisées, ou, si elles le sont, ne conduisent que rarement à des résultats intéressants.

## OÙ LES NOMBRES FONT LEUR APPARITION

J'ai été, en un sens, un peu rapide dans mon exposé, car parler de formulation de problèmes en termes d'analyse classique sous-entend que les variables peuvent être représentées sous la forme de nombres ou de vecteurs. Dans la plupart des sciences physiques, cela est considéré comme acquis, mais en psychologie, et de façon générale dans toute science comportementale ou sociale, l'introduction de nombres qui veuillent dire quelque chose est un des problèmes les plus compliqués. Peut-être ne faut-il pas que, esclaves d'une habitude, nous nous efforcions d'introduire des nombres partout; d'ailleurs il se peut qu'en définitive, la matière sur laquelle nous travaillons nous impose d'autres représentations mathématiques. Mais dans l'état actuel des choses, nous nous sentons plus ou moins impuissants tant que nous n'avons pas de représentations scalaires ou vectorielles à notre disposition. En fait, nos efforts pour représenter avec des nombres certaines notions psychologiques ne sont vraisemblablement pas complètement absurdes. Bien sûr la nature vectorielle ou scalaire des variables que nous utilisons est beaucoup plus douteuse que pour des variables comme la masse, la vitesse, etc... Cependant des concepts comme ceux d'utilité d'un article commercial, d'intensité perçue d'un son ou d'une lumière (notions subjectives qui correspondent à peu près aux attributs objectifs de valeur monétaire et d'énergie acoustique ou lumineuse), semblent tous d'une nature intensive rappelant les échelles numériques utilisées en physique. Les chercheurs en psychologie mathématique et domaines apparentés consacrent actuellement beaucoup d'efforts à vérifier la valeur de cette analogie, ou, en d'autres termes, à préciser les cas où l'affectation de nombres à des stimulus ou à des réponses est justifiée, de façon à pouvoir construire d'efficaces échelles d'utilité, de sensation, ou de concepts similaires. C'est à dessein que je parle "d'affectation de nombres justifiée". Les psychologues qui singeraient la forme classique des problèmes de physique en énonçant: soit Hi la quantité d'hostilité que renferme le sujet i, soit Aij la quantité d'agression manifestée par i envers j, etc..., feraient un travail inutile sinon nuisible. Il n'y a en effet à mon avis aucune raison de supposer que l'une ou l'autre de ces notions, l'hostilité ou l'agression (ou bien d'autres du même genre) constitue une quantité scalaire. Entamer un problème de cette façon équivaut à se débarrasser d'une partie très importante du-dit problème. Et dans l'état actuel de nos connaissances, "supposer" l'absence d'un problème de la mesure est de l'ordre de la mauvaise plaisanterie.

Chercher si nous pouvons raisonnablement représenter certains concepts psychologiques de façon numérique, constitue donc l'une de nos préoccupations essentielles. Cette représentation est en fait tentée par deux approches principales: l'une utilise des concepts probabilistes, et a suscité la plupart des développements de la psychologie mathématique; l'autre, dont le rôle a été bien plus accessoire, tache de se constituer en une démarche plus fondamentale. C'est celle-ci que nous envisagerons en premier lieu.

## LA MESURE FONDAMENTALE

Lorsqu'on examine les théories de la mesure (1) en physique, par exemple en suivant le plan de l'ouvrage de N.R. Campbell [6], on trouve une distinction très importante entre mesure fondamentale et mesure dérivée. La caractéristique essentielle de la mesure fondamentale est que les hypothèses que l'on y fait ne concernent que des observations qualitatives: les axiomes théoriques sont vierges de tout nombre. A partir de ces hypothèses, on démontre l'existence d'une représentation numérique des observations. Les axiomes s'appliquent à des qualités observables, telles que l'inclinaison du fléau d'une balance lorsque des objets sont placés sur ses plateaux. Le système le plus connu, appelé système de mesure extensive, fut mis au point pour rendre compte des mesures de masse, de longueur, etc... Il comprend un ensemble $\Omega$ d'objets à mesurer, une opération binaire o de "combinaison" ou "concaténation" (2) de deux objets quelconques de $\Omega$ en un troisième, et une ordination $\geqslant$ en "non moindre que sur $\Omega$ du type de celle établie par l'inclinaison d'une balance. Voici quelques axiomes typiques: si a et b appartiennent à $\Omega$, alors a o b appartient aussi à $\Omega$ ; la relation $\geqslant$ est une ordination faible de $\Omega$ ; si a $\geqslant$ b, alors a o b $\geqslant$ b o c pour tout c de $\Omega$ ; etc... Finalement, on énonce un ensemble d'axiomes qui suffisent à fonder un théorème de représentation et d'unicité du type suivant. Il existe une fonction $\phi : \Omega \rightarrow R$ (nombres réels) telle que

i : a $\geqslant$ b (qualitativement) si et seulement si $\phi(a) \geqslant \phi(b)$ (numériquement)

ii : pour tout a, b de $\Omega$, $\phi(a \text{ o } b) = \phi(a) + \phi(b)$

iii : si $\phi$ et $\phi'$ sont deux fonctions qui satisfont toutes deux (i) et (ii), alors il existe une constante positive $\alpha$ telle que $\phi' = \alpha\phi$ c'est-à-dire que la représentation est unique à une transformation de similitude près, ou, pour employer le langage de la théorie moderne de la mesure, que la variable étudiée peut être représentée sous la forme d'une échelle de rapports.

Il serait très commode pour la psychologie de disposer d'une théorie analogue dans laquelle les axiomes se trouveraient être des propositions empiriquement vérifiables concernant le comportement de sujets humains ou animaux. Malheureusement, on ne peut apparemment pas réinterpréter de façon simple les axiomes d'une mesure extensive en termes psychologiques. Car s'il est facile de donner des interprétations psychologiques sensées de $\Omega$ et de $\geqslant$, il est beaucoup moins aisé de trouver une signification naturelle à l'opération de concaténation. Le fait que

(1) Nous traduisons le terme "measurement theory" par "théorie de la mesure", le contexte écartant toute confusion avec la théorie de la mesure classique des mathématiques appelée en anglais "measure theroy". (N.d.T.).

(2) Nous avons respecté le mot "concatenation" du texte original bien que l'expression "loi de composition" soit plus conforme à la terminologie habituelle (N.d.T.).

nous n'arrivons pas à trouver des interprétations d'une mesure extensive qui soient empiriquement vérifiables alors que nous sentons fortement que la mesure fondamentale doit être possible, nous a obligé à reconsidérer certaines des idées de Campbell [28]. Celui-ci semblait considérer que mesure fondamentale est synonyme de mesure extensive, c'est-à-dire d'un système aboutissant aux trois assertions ci-dessus. Il est généralement admis aujourd'hui que Campbell se trompait sur ce point. J'ai personnellement proposé de considérer la mesure fondamentale comme impliquant un système d'axiomes, système construit sans aucune référence aux nombres réels, système d'autre part admettant une représentation empirique qui permette de vérifier directement les axiomes, système enfin, à partir duquel il soit possible d'établir une représentation numérique de ses propres éléments et relations indéfinis, telle que la condition (i) soit remplie, que (ii) soit remplacée par quelque condition appropriée, et que (iii) soit légèrement affaiblie pour être ramenée à un autre groupe de transformations raisonnablement restrictif, par exemple aux transformations linéaires positives. La mesure extensive est ainsi un cas particulier de la mesure fondamentale; il y en a d'autres.

La plupart des exemples de mesure fondamentale non-extensive que l'on peut trouver proviennent de travaux mettant en jeu des préférences, c'est-à-dire d'un domaine qui concerne l'économie et la statistique aussi bien que la psychologie. Les premières recherches de ce type se sont développées sous l'impulsion des travaux de von Neumann et Morgenstern [33] relatifs à l'hypothèse de l'utilité attendue. En fait, la théorie de ces auteurs n'est pas un exemple de mesure fondamentale (car l'établissement des axiomes fait appel à des probabilités), mais la généralisation de Savage [26] en est un (elle assure même simultanément une mesure fondamentale de l'utilité et une mesure fondamentale des probabilités subjectives). Suppes et ses collaborateurs [9], reprenant une idée du philosophe Ramsey [24], ont mis au point pour la mesure fondamentale de l'utilité, un système qui se distingue de celui de Savage par l'utilisation d'un seul événement aléatoire. Pfanzagl [23] a proposé une axiomatisation assez différente, qui comprend essentiellement la notion de bissection de deux stimulus, et qui se rapproche ainsi beaucoup de l'axiomatisation des moyennes proposée par Aczél [1]. Très récemment, Tukey et moi-même [20] avons développé un système de mesure fondamentale basé, principalement, sur une ordination faible d'objets présentant au moins deux composantes indépendantes. Si nous cherchons dans le domaine physique un exemple concret qui satisfasse à nos axiomes tout en respectant les lois de la physique classique, on peut imaginer l'ordination d'objets selon leur moment, contrôlée par exemple à l'aide d'un pendule balistique. Dans ce cas les deux composantes de l'objet correspondent en utilisant des notions simples, à leur masse et à leur vitesse. Les exemples psychologiques que l'on peut imaginer (on n'a encore réalisé aucune expérience dans ce domaine) comprennent des ordinations subjectives de stimulus ayant au moins deux dimensions. Un exemple pourrait consister à faire choisir des rats entre deux issues, composées chacune d'une certaine quantité de nourriture couplée avec un choc électrique d'une certaine intensité. Nous avons montré que si l'ordination satisfait à certains axiomes "raisonnables", il existe une représentation numérique, additive au niveau des composantes et unique à une transformation linéaire positive près. Lorsque les deux composantes sont identiques, on peut considérer la théorie de la mesure extensive comme un cas particulier, qui nécessite l'adjonction d'un axiome supplémentaire (faisant appel à l'existence d'un objet nul).

Les travaux que nous avons passés en revue, travaux qui je crois, auront à terme une certaine importance dans l'établissement des variables de base de la psychologie, ne constituent qu'une toute petite partie des recherches poursuivies en psychologie mathématique. Dans la plupart des cas, l'intervention des nombres est tout autre, quelque peu analogue d'ailleurs à la "mesure dérivée" de Campbell. Dans le domaine physique, la densité et les moments constituent des exemples typiques de mesure dérivée. Ces mesures sont en effet exprimées à l'aide de deux quantités (ou plus) qui ont déjà fait l'objet d'une mesure fondamentale. Mais ce concept de mesure dérivée devrait être légèrement élargi pour pouvoir s'appliquer à l'ensemble de notre domaine; c'est pourquoi je ne reprendrai pas cette idée par la suite.

## LES MODELES PROBABILISTES

Les fréquences relatives de réponses et les temps qui s'écoulent avant l'apparition de réponses constituent les principales sources de nombres pour la plus grande partie de la psychologie mathématique. Les fréquences relatives de réponses, qui sont de loin le type de mesure le plus utilisé, sont considérées comme l'estimation des probabilités conditionnelles correspondantes. On est ainsi directement amené à s'intéresser à des théories probabilistes du comportement. Ces théories sont, sur le plan conceptuel, distinctes, et même souvent très différentes, des théories admises en statistique comme fondant les tests de signification, les analyses de variance, etc...

Une intéressante controverse (qui n'est que très partiellement publiée) a pu se développer au sujet du bien-fondé des modèles probabilistes en psychologie. Certains psychologues s'inquiètent de la généralisation des théories probabilistes car, font-ils remarquer, ces théories sont tout disposées à intégrer nos confusions, ommissions ou erreurs de manipulation, dans ce qui prétend être une description du comportement du sujet. Mais, dans la mesure où il est très difficile de définir avec précision les conditions dans lesquelles il est légitime de considérer un organisme comme un mécanisme probabiliste, l'intérêt de ces critiques est difficile à apprécier aux yeux de beaucoup d'entre nous. D'une façon ou d'une autre, nous devons compter avec le fait que, même dans une situation expérimentale soigneusement contrôlée, aucun des sujets ne répondra de façon invariable à la présentation répétée d'un stimulus et d'une issue pourtant toujours semblables. Le procédé utilisé en physique classique qui consiste à ajouter à un modèle déterministe une touche de la théorie probabiliste des erreurs, ne s'est en général pas révélé très efficace. Les conduites humaines ou animales semblent en effet mettre en évidence une structure probabiliste trop complexe, pour pouvoir être épuisée par des modèles déterministes agrémentés d'une marge de faits aléatoires répartis de façon plus ou moins régulière. C'est pourquoi, nous sommes si nombreux à avoir été conduits à étudier des modèles probabilistes. C'est en connaissance de cause que je dis que nous y avons été conduits, car, pour ma part en tous cas, j'étais à l'origine très réservé à l'égard de ces modèles. Quelques exemples nous permettront d'illustrer le genre de mathématiques utilisées dans cette approche.

## LES MODELES D'APPRENTISSAGE

Considérons d'abord une situation "d'apprentissage simple". Il faut entendre ce terme avec une certaine liberté, car la plupart des expériences d'apprentissage n'ont qu'un rapport assez éloigné avec ce que l'on appelle ordinairement apprentissage, à savoir: une acquisition de concepts, de connaissances, ou de symboles. En fait, la situation typique à laquelle on soumet le sujet, est une situation de choix répétés, dans laquelle les réponses sont récompensées de façon différentielle. On étudie alors dans le détail, l'évolution des choix effectués par le sujet à mesure que se déroule devant lui la distribution des récompenses. Si cette évolution se fait trop rapidement, on réorganise l'expérience et on ralentit suffisamment l'évolution pour pouvoir observer le développement de ce comportement transitoire. Le problème consiste alors, en la formulation des lois selon lesquelles les probabilités des réponses changent d'un essai à l'autre, en fonction des événements enregistrés par le sujet *au cours de l'expérience.*

On a proposé plusieurs théories, qui suscitent actuellement des recherches importantes; j'en mentionnerai trois. La première, désignée par le nom de théorie de l'échantillonnage du stimulus est due principalement à W.K. ESTES ([10] ; résumé en [3]). Cette théorie postule un mécanisme selon lequel le sujet extrairait de l'environnement, des "échantillons" d'indices qui seraient chacun "conditionnés" ou "reliés" à des réponses particulières; le choix d'une réponse à partir des indices sélectionnés étant décrit par une règle de décision. Ensuite, selon l'issue qui apparaît, le conditionnement reliant indices et réponses se modifierait en conséquence. Ces mécanismes appellent l'utilisation des chaînes de Markov, pour décrire les modifications des probabilités des réponses; et l'on peut considérer que l'ensemble de cette théorie, bien développée aujourd'hui, est impliqué ici. On s'est beaucoup penché sur le détail des propriétés séquentielles des réponses qui constituent véritablement un problème très complexe; et la précision avec laquelle certains modèles rendent compte des données dans leurs subtilités est vraiment étonnante.

Les hypothèses de la seconde catégorie de modèles d'apprentissage, se placent d'emblée au niveau du changement des probabilités des réponses, d'un essai à l'autre. BUSH et MOSTELLER [5] par exemple, ont étudié les processus stochastiques engendrés par des opérateurs linéaires indépendants du passé (1), et par la suite, divers auteurs ont considérablement approfondi la connaissance que nous pouvons avoir de ce type de processus (voir [27]). Si $p_n$ (r) représente la probabilité de la réponse r à l'essai n, l'hypothèse faite alors est que

$$p_{n+1}(r) = (1 - \theta)\, p_n(r) + \theta \lambda,$$

où $\theta$ et $\lambda$ sont des constantes qui dépendent de la réponse et de l'issue apparues à l'essai n. La linéarité du modèle est évidente. Son caractère d'indépendance à l'égard du passé signifie que l'on fait l'hypothèse que l'empreinte de tout le déroulement antérieur du processus est parfaitement résumée par la probabilité de réponses $p_n$ (r) et les évènements apparus à l'essai n. Ce type de processus stochastiques non-stationnaire est relativement compliqué, et on ne connaît bien, en fait, que quelques cas simples. C'est ainsi que bien que l'on sache, par exemple, qu'il existe une moyenne asymptotique, nous n'avons d'elle aucune expression explicite dans le cas, très général, d'une situation à deux réponses.

Les modèles de réponses commutatifs, que j'ai étudié en [16] et [19], constituent une autre classe de modèles d'apprentissage avec indépendance à l'égard du passé. Ils sont représentés dans leur forme la plus simple par l'équation

$$f\,(p_n + 1) = \beta f\,(p_n),$$

(1) Nous traduisons "path-independant" par "indépendant du passé". On peut aussi utiliser dans cette optique l'épithète "markovien"; mais il faut alors préciser que ceci n'implique pas que nous ayons affaire à un processus markovien au niveau des réponses observables (N. du T.).

où f est une transformation strictement monotone de l'intervalle (0, 1) et une constante positive dépendant de la réponse et de l'issue à l'essai n. La forme de l'opérateur montre clairement le caractère à la fois indépendant du passé et commutatif de cette classe de modèles. En utilisant des équations fonctionnelles, on a pu formuler des résultats assez généraux relatifs à ce type d'opérateur. ACZEL, en particulier, dans son récent ouvrage sur les équations fonctionnelles [2] en expose quelques-uns.

Une fois que l'on a formulé un modèle stochastique d'apprentissage, il reste à trouver des expressions explicites (c'est-à-dire calculables) concernant ses diverses propriétés, expressions que l'on puisse utiliser pour évaluer des paramètres à partir des données et juger de l'adéquation du modèle. Moyennes asymptotiques, variances, prédiction du nombre de fois où une certaine réponse sera choisie, prédiction du nombre de séquences de réponses d'une certaine longueur etc..., constituent des propriétés typiques. Dans le cas d'un modèle linéaire, il est courant d'établir l'expression manifeste de la variable aléatoire recherchés, et de calculer ensuite son espérance à partir de la structure du processus décrit par le modèle. Lorsque cette méthode réussit, on le doit principalement au fait que les opérateurs sont linéaires: car cela ne réussit pratiquement jamais avec des modèles non linéaires. Dans le cas des modèles commutatifs, il est possible d'établir et de résoudre des équations fonctionnelles au niveau de certaines propriétés remarquables (voir [13] et [29]). On a obtenu certains résultats asymptotiques en utilisant une technique reposant sur des chaînes d'ordre infini [15].

Bien que l'estimation de paramètres et la mise à l'épreuve de l'ajustement soient des problèmes que toute théorie rencontre lorsqu'elle est confrontée aux données, ces problèmes deviennent particulièrement importants et gênants dans le cas des processus stochastiques appliqués à l'apprentissage. En effet, les problèmes mathématiques se compliquent très souvent lorsque l'on recherche des estimations optima, et on a pu montrer que même des procédures très simples conduisaient parfois à des confusions et à des interprétations erronées des données [27]. Ce dernier point interfère avec la question de l'adéquation d'un modèle à un ensemble de données, question qui n'est encore pas du tout clairement formulée. Certaines évaluations ont été faites, la plupart "ad hoc" et intuitivement, mais bien que tout le monde reconnaisse que ces tentatives ne sont pas vraiment satisfaisantes. la littérature statistique semble être très pauvre à ce sujet. Il y a là pour quelqu'un ayant de solides dispositions pour la statistique, et attiré par des problèmes complexes, non encore formulés, matière à un très intéressant travail.

## LES MODELES DE COMPORTEMENT DE CHOIX

Les études expérimentales des comportements de choix présentent une particularité intéressante: les issues et les stimulus de la situation expérimentale constituent un seul ensemble, ou deux ensembles extrêmement proches. A chaque essai on présente au sujet un ensemble d'issues possibles parmi lesquelles il doit choisir. En retour apparaît l'issue choisie, ou bien, dans le cas de la situation dite de "choix avec risque", une issue qui est déterminée par un système probabiliste, intermédiaire.

Les statisticiens et les économistes ont étudié divers modèles algébriques se rapportant aux comportements de choix. Parmi ces modèles figurent le modèle de l'utilité attendue de Von NEUMANN et MORGENSTERN et la généralisation que SAVAGE en a faite, cités plus haut. Les psychologues qui se sont intéressés aux problèmes des comportements de choix, se sont eux principalement orientés vers les modèles probabilistes. Et ceci d'abord, parce que les données expérimentales mettaient en évidence certains types d'incohérence qu'il était difficile d'intégrer dans un cadre déterministe. Ces tentatives des psychologues peuvent être schématiquement classées en deux types d'approche. La première approche consiste à définir en termes de probabilités observables de choix, des propriétés que l'on prévoit facilement observables. Mais ceci ne constitue pas une théorie psychologique complète. Ou plutôt, il ne s'agit que de propositions vérifiables, qui peuvent devenir des théorèmes dans le cadre d'une théorie psychologique plus complète. Un exemple simple nous est donné par la transitivité stochastique forte, c'est-à-dire une des nombreuses possibilités de généralisation de la transitivité courante. Cette transitivité stochastique forte signifie que si l'on appelle $p(a,b)$ la probabilité de choisir a plutôt que b, alors $p(a,b) \geqslant 1/2$ et $p(b,c) \geqslant 1/2$ entraîne $p(a,c) \geqslant \max\left[p(a,b),\ p(b,c)\right]$. La deuxième approche tente une formulation de théories psychologiques plus complètes. La classe des modèles d'utilité aléatoires constitue un exemple classique de cette approche. Dans ces modèles, on considère que les choix du sujet sont à chaque instant déterminés par une fonction numérique d'utilité qui varie de façon aléatoire d'instant en instant. C'est l'issue qui a l'utilité momentanée la plus grande qui est l'issue momentanément préférée. Certains chercheurs, dont je suis, ont essayé de déduire de ces différents modèles des propriétés vérifiables, pour établir un réseau de relations au niveau des modèles et des propriétés, et pour faire surgir des formulations nouvelles mais équivalentes de ces modèles. Parallèlement, des expérimentalistes se sont efforcés de découvrir quelles étaient les hypothèses les plus conformes aux comportements observés. Mais, pour le moment, les résultats sont plutôt incertains. Et je suis porté à croire que les études expérimentales réalisées sur les comportements de choix ne sont pas encore prêtes à répondre à toutes les questions qui nous préoccupent.

## LES MODELES PSYCHOPHYSIQUES

Le psychophysique, c'est-à-dire l'étude de la relation de dépendance des réponses par rapport aux caractéristiques physiques continues du stimulus, constitue la branche de la psychologie la plus ancienne, et celle qui a toujours utilisé les mathématiques de la façon la plus régulière. Les expériences de psychophysique sont toujours constituées de la même façon: on présente au sujet un stimulus, choisi à chaque essai parmi un ensemble de stimulus possibles, et le sujet répond en utilisant un ensemble de réponses qui sont en relation systématique avec les caractéristiques physiques des stimulus. L'exemple le plus simple nous est peut-être donné par une expérience de détection, dans laquelle chaque essai se compose soit de la présentation d'un stimulus d'intensité faible soit d'une absence de stimulus, le sujet devant en retour répondre pour "oui" ou par "non" selon qu'il pense que le stimulus a été présenté ou non.

Un bon exemple des problèmes auxquels le théoricien est confronté, nous est donné par la représentation graphique de la probabilité conditionnelle d'une réponse de présence lorsque le stimulus est présent, en fonction de la probabilité conditionnelle de cette même réponse lorsqu'il est absent. Si l'on fait varier les issues proposées au sujet, ou bien la probabilité de la présentation du stimulus, on trouve que les points obtenus semblent s'ordonner selon une courbe théorique allant de (0,0) à (1,1) dans le carré unité, et disposée au-dessus de la ligne d'équi-probabilité: $y = x$. En fait les différentes théories attachées au processus de décision prédisent bien l'existence d'une telle courbe, mais chacune prédit une courbe différente. Par exemple la théorie de la détectabilité du signal (résumés en [11] et [18]) annonce que la courbe devient une droite si l'on représente les probabilités en coordonnées binormales, tandis que la théorie des seuils "faibles" [17], [18], qui postule le caractère discret du processus sous-jacent, prévoit en coordonnées ordinaires, une décomposition de la courbe en deux segments de droite. Bien que ces deux prédictions découlent de conceptualisations très différentes, la décision en faveur de l'une plutôt que de l'autre nécessite une masse énorme de données.

Il existe aujourd'hui une très grande variété de modèles correspondant aux différentes procédures psychophysiques, que l'on s'efforce actuellement de systématiser et d'unifier. La théorie de l'information sembla pendant quelque temps fournir une possibilité d'unification, mais les travaux récents laissent à penser que l'unité n'était qu'apparente.

La plupart des recherches mathématiques en psychophysique, ont ceci d'agréable par rapport à d'autres domaines: elles utilisent des mathématiques relativement simples et cependant, elles apportent à la psychologie de réelles contributions que l'on ne pourrait probablement pas obtenir d'une autre façon. Ainsi, l'introduction de la psychophysique dans l'enseignement de la psychologie mathématique semble particulièrement appropriée, ainsi que son utilisation comme source de problèmes de difficulté faible ou moyenne, dans l'enseignement des mathématiques destiné aux chercheurs en sciences humaines.

## LES MODELES DE TEMPS DE LATENCE (1)

Nous avons déjà fait remarquer plus haut que le temps qui s'écoule avant qu'apparaisse une réponse - la latence de la réponse - est une source numérique importante pour le psychologue. La situation la plus simple consiste à présenter un stimulus au sujet, et à lui demander de répondre à cette présentation le plus rapidement possible. Si l'expérience est menée avec beaucoup de soin et si le sujet est dans de bonnes conditions physiques et psychologiques, les distributions des latences des réponses peuvent être régulières et constantes. Les restrictions ci-dessus sont importantes car un temps de latence est un type de mesure beaucoup plus capricieux qu'une fréquence de réponse, et qui, corrélativement, nécessite beaucoup plus de soin lors de l'enregistrement des données.

Le problème théorique qui se pose, revient à imaginer des mécanismes hypothétiques qui rendraient compte des caractéristiques des distributions observées, et qui nous permettraient ainsi, de faire quelques suppositions sur la nature des processus supportant l'information sensorielle. L'hypothèse principale faite jusqu'à présent, consiste à considérer que le temps de latence observé est constitué d'une chaîne d'évènements aléatoires, de nature exponentielle le plus souvent

(1) Nous traduisons "latency" par "latence" (ou "temps de latence"), bien que les recherches visées dans ce paragraphe s'attachent principalement à des mesures de temps de réaction, c'est-à-dire à un cas particulier de temps de latence (N. d. T.).

(voir [21] ). L'orientation de ce genre de théories est très comparable à celle de la théorie mathématique des files d'attente, les premières utilisant parfois des résultats de la seconde. Mais à tout prendre, c'est la transformation de Laplace dans son sens général, qui apparaît comme le modèle mathématique le plus influent. J'ai l'impression toutefois que de nouvelles idées risquent d'apparaître bientôt: en effet on a montré récemment, que si l'on paie les sujets d'une façon différentielle en rapport avec leurs temps de latence, les distributions présentent un mode très pointu et une queue de distribution importante (de la forme $t^{-\delta}$ plutôt que $s^{-\lambda t}$). Or il n'est pas sûr que de telles distributions puissent provenir de chaînes additives de variables indépendantes aléatoires. On peut prévoir que toute idée nouvelle s'efforçant de rendre compte de ce type de données, aura beaucoup d'influence sur notre conceptualisation des processus de choix mis en oeuvre dans l'apprentissage, les préférences et la psychophysique.

## LES MODELES PSYCHOMETRIQUES

Vers les années 1930 à 1940, le champ d'application principal des psychologues intéressés par les mathématiques était constitué par la psychométrie, c'est-à-dire quelque chose qui ressemble à la fois à la psychophysique et à la statistique. La plupart des modèles psychométriques sont, dans leur forme générale, identiques à ceux de la psychophysique [32] ; les autres, en particulier ceux qu'utilisent les théories relatives à l'emploi des tests, sont principalement des modèles statistiques à plusieurs variables [30] , [31] . A travers la psychométrie, on ne peut recueillir, avec un nombre relativement grand de sujets, qu'un nombre relativement petit de données sur chacun des sujets. Mais on tire avantage de la mise en évidence de constantes et de corrélations à l'intérieur de la population des sujets, la méthode impliquant l'hypothèse d'une structure sous-jacente commune à tous les sujets, qui ne différeraient entre eux que par la valeur de certains paramètres. On peut opposer cette approche à celle utilisé couramment en psychophysique, par exemple, qui obtient une quantité relativement grande de données à partir de sujets relativement peu nombreux. Dans ce cas, chaque sujet fait l'objet d'une étude individuelle détaillée. Les techniques psychométriques, dans l'ensemble, postulent que l'on peut représenter les sujets par des points dans un espace vectoriel euclidien. C'est donc évidemment l'algèbre matricielle qui constituera le fond des mathématiques utilisées. Le langage matriciel permet en effet, une exposition très appropriée des analyses factorielles et des autres procédures de mesure multi-dimensionnelles, tout en ne nécessitant l'utilisation que de résultats moyennement profonds de la théorie matricielle.

## LES MODELES NON-NUMERIQUES

Les nombres n'interviennent pas dans la dernière catégorie de modèles que je mentionnerai. Cette catégorie n'étant ni spécialement cohérente ni spécialement importante, je ne donnerai d'elle que deux exemples.

Etudiant dans des recherches de psycholinguistique les interférences entre l'orateur, l'auditeur, et la langue utilisée, Chomsky et Miller ( [8] ; voir aussi [7] et [22] ) pour ne citer qu'eux, ont utilisé certaines formes d'algèbre abstraites pour décrire des aspects de la structure grammaticale de base du langage. Plus précisément, ils ont considéré la grammaire comme un système de concaténations algébriques, et ont utilisé certains résultats théoriques du domaine des fonctions récursives. En impliquant profondément les mathématiques, ils ont pu mettre en évidence de nombreux résultats originaux. En fait il y a beaucoup d'interférences entre les recherches de psycholinguistique purement théoriques et celles qui s'occupent des problèmes de l'automation. Toutefois ces structures mathématiques séduisantes n'ont donné lieu qu'à peu d'hypothèses justiciables d'une expérimentation, et n'ont encore provoqué qu'un nombre relativement faible d'expériences. Mais actuellement, on travaille activement dans ce domaine, et on a des chances de voir apparaître dans les années à venir d'importants développements.

Dans le domaine dit sociométrique, que l'on peut définir grossièrement comme l'étude de la structure des relations qualitatives entre personnes, c'est d'autres types de modèles structureux qui ont été retenus. Dans l'élaboration théorique de ce domaine, des chercheurs comme Harary [12] ont utilisé, principalement, la théorie topologique des graphes (résumé en [25] ). Les résultats se présentent bien sous des allures mathématiques, mais ces théories n'ont qu'une efficacité relative au niveau d'une mise en relation systématique entre les mathématiques et les données expérimentales. Je crois que la difficulté essentielle provient de l'impossibilité d'introduire dans le modèle des hypothèses propres au comportement. Les hypothèses structurales émises ne caractérisent guère les entités que représentent les êtres humains, symbolisés par les points du graphe; d'où la faiblesse de ces modèles sur le plan prédictif.

## QUELQUES REMARQUES POUR CONCLURE

Jusqu'à présent, nous avons considéré les applications des mathématiques à la psychologie selon le point de vue du psychologue. Changeons d'optique maintenant, pour rechercher brièvement dans quelle mesure chacune des différentes catégories de mathématiques a été utilisée.

1) Les mathématiques fondamentales (comprenant la théorie des ensembles, les fonctions, les relations - d'ordre en particulier - l'axiomatique, l'algèbre de Boole, etc...). On utilise les notions et les théorèmes des mathématiques fondamentales au travers de toute la psychologie mathématique; on ne peut presque rien lire de celle-ci sans posséder quelques notions de celles-là. En effet, de nombreux problèmes sont énoncés en termes d'ensembles, de relations ou de fonctions non-numériques. D'autre part, les systèmes axiomatiques ne sont pas rares, et les raisonnements utilisés sont souvent fins même s'ils sont parfois élémentaires. Toutes ces connaissances sont donc impératives, et devraient être acquises le plus tôt possible.

2) L'analyse. Elle constitue un problème singulier du fait qu'elle ne fonde que rarement la formulation de théories psychologiques. Une équation différentielle ou intégrale ne constitue pratiquement jamais un point de départ, alors que des équations aux différences finies peuvent l'être. Toutefois, les étudiants doivent en connaître au moins les formules de calcul sous peine d'être péniblement désavantagés, car personne n'a de scrupules à utiliser des dérivées ou des intégrales dans la résolution d'un problème présenté en d'autres termes. En outre, il est

impossible de comprendre dans le détail le calcul des probabilités, les processus stochastiques ou les développements approfondis de la statistique, sans de solides assises en analyse mathématique classique, en particulier en théorie des variables réelles. Nous avons vu plus haut l'importance qu'avait prise la théorie des transformations de Laplace dans l'étude des temps de réaction. Cette théorie, accompagnée de quelques notions de la théorie des variables complexes, est également importante dans l'analyse des comportement de poursuite. Mais ce domaine est encore trop particulier pour qu'il soit nécessaire que de nombreux étudiants apprennent aujourd'hui la théorie des variables complexes.

Ceci dit, il n'est pas facile de préciser à un étudiant l'analyse qu'il aurait intérêt à étudier. S'il est commode d'en avoir de bonnes notions, elle ne donne lieu jusqu'à présent qu'à peu d'utilisations pénétrantes, hormis son incidence indirecte à travers le calcul des probabilités. Néanmoins, tout étudiant devrait en fait avoir assez de connaissances, pour être capable de lire un article théorique sur les équations fonctionnelles (que l'on commence à utiliser un peu partout) ou sur les processus stochastiques. En outre, dans la mesure où l'on commence à formaliser et à étudier des processus à temps continu, l'analyse classique va se révéler essentielle. Je mentionne ceci car quelques recherches de ce type sont très récemment apparues.

3) <u>Le calcul des probabilités</u>. On peut constater en psychologie un foisonnement de concepts élémentaires du calcul des probabilités. Ceux-ci sont d'ailleurs employés sans aucun commentaire ou justification. On utilise en fait couramment certains théorèmes fondamentaux - le théorème limite central par exemple. Et tout bon chercheur de psychologie mathématique devrait avoir dans son sac un cours solide sur les probabilités et la statistique mathématique. Il serait également impératif que de nombreux étudiants, pour ne pas dire la plupart, connaissent un ouvrage supplémentaire relatif aux processus stochastiques. Ils devraient en particulier bien dominer la théorie des chaînes de Markov, surtout le cas d'un nombre fini d'états. Ces chaînes en effet, font partie intégrante de plusieurs théories des processus d'apprentissage. De plus, elles risquent d'être impliquées dans certains des processus stochastiques non-stationnaires dont on se sert aussi. Cependant, d'une façon générale, ces processus ne figurent pas encore au sommaire des ouvrages classiques. D'ailleurs, très souvent, ils n'ont pas encore été parfaitement compris; pour la théorie des processus stochastiques, la psychologie présente de nombreux et difficiles problèmes, correctement formulés mais non résolus. Dans le domaine des processus stochastiques d'apprentissage, d'intéressantes équations fonctionnelles ont été mises en évidence; elles sont peut-être destinées à jouer en psychologie le rôle des équations différentielles en Physique.

4) <u>L'algèbre</u>. On utilise l'algèbre élémentaire partout. Une aisance parfaite en ce domaine est donc requise. On emploie des matrices en psychométrie et dans des analyses à plusieurs variables, et l'algèbre des concaténations est utilisée en psycholinguistique. Cependant, on utilise peu (à l'exception des algèbres de Boole) la principale partie de l'algèbre abstraite qui comprend les théories des groupes, des anneaux, des champs, des treillis, et encore d'autres notions exotiques. Çà et là, un groupe ou un treillis surgit pourtant. Mais d'une façon générale, l'algèbre abstraite ne s'est pas révélée d'une importance particulière, sauf dans des formalisations plus ou moins théoriques directement liées à son étude.

5) <u>La topologie et la géométrie.</u> Ni l'une ni l'autre ne sont très utilisées. Le

seul effort vraiment sérieux, que je connaisse, pour employer des notions topologiques est constitué par l'application de la théorie des graphes à la sociométrie. Certains éléments de la topologie générale apparaissent de temps à autre et, à l'occasion, des théorèmes de points fixes ont été employés pour établir l'existence de tel ou tel objet. Quant à la géométrie, à côté de l'utilisation banale des notions de l'enseignement secondaire, et de certains travaux dans le domaine de la vision impliquant de la géométrie non-euclidienne, on ne peut pas dire qu'elle joue un grand rôle en psychologie mathématique.

En conclusion, il faut remarquer que l'étude des problèmes psychologiques n'a encore été à l'origine d'aucune idée mathématique vraiment nouvelle; nous sommes pour le moment parasites des mathématiques. Je doute d'ailleurs qu'il en soit toujours ainsi, mais l'écart temporel est tel, que notre contribution mathématique ne peut avoir qu'un retentissement extrêmement faible sur les recherches mathématiques actuelles. Les raisons que j'ai de croire qu'une telle influence ne pourra manquer de se produire, en fin de compte, reposent sur la double constatation suivante: D'une part, nous rencontrons des problèmes psychologiques apparemment riches de signification (bien que formulés de façon peu précise), et permettant l'expérimentation (bien que celle-ci ne soit pas encore incisive). Mais d'autre part, nous constatons que ces mêmes problèmes ne semblent pas s'ajuster commodément au langage mathématique existant. Bien sûr, dans certains cas, cela peut provenir d'un manque d'ingéniosité, mais dans d'autres cas, je serais plutôt porté à croire que les mathématiques appropriées n'existent pas encore. L'histoire de la Physique justifie une telle conviction, qui il est vrai, a la propriété équivoque de ne permettre ni preuve ni réfutation. Peut-être que quelques mots sur les problèmes qui me semblent les plus délicats, apporteront un peu de lumière sur ce point.

Le langage des ensembles ne semble pas toujours être adéquat à la formulation des problèmes psychologiques. Aussi crûment énoncée, cette proposition constitue presque une hérésie puisque, pratiquement, la théorie des ensembles est reconnue comme apte à formuler les problèmes de mathématiques, et partant ... les problèmes de mathématiques appliquées. Nous ne devons cependant pas oublier que la théorie des ensembles est relativement nouvelle (elle a moins d'un siècle d'existence), et qu'elle n'est peut-être qu'une théorie transitoire. Infailliblement, lorsque je considère certains problèmes psychologiques, je me surprend à souhaiter qu'ils soient formulés autrement. Les limites de certains des ensembles que j'utilise, ainsi que de ceux auxquels mes sujets ont affaire, sont beaucoup plus vagues que les limites que l'on définit en mathématiques. Considérons par exemple une expérience, dans laquelle on présente au sujet un ensemble de réponses possibles. C'est un ensemble établit soigneusement et sans ambiguïté, du type de ceux que nous avons tous pris l'habitude d'utiliser. Mais, lors de l'analyse théorique du comportement du sujet, il semble souvent qu'il soit beaucoup plus justifié de prendre en considération non pas l'ensemble de départ, mais celui que le sujet a lui-même pris en considération pour effectuer son choix. Mais il est bien sûr extrêmement difficile, de fixer avec précision les éléments qui font ou ne font pas partie de cet ensemble; je ne suis d'ailleurs pas sûr que cela soit théoriquement possible. On peut en effet se demander si nous manquons tout simplement de techniques adéquates pour répondre à cette question, ou si, dans son principe même la question est insoluble. Mais même si nous supposons qu'elle est insoluble, je ne pense pas que cela signifie que les tentatives d'explicitation du comportement soient dénuées de sens, alors même qu'en définitive on estimerait qu'il est impropre de s'efforcer de représenter à l'aide du langage mathématique ordinaire, une théorie psychologique.

Prenons un autre exemple: nous cherchons tous à rendre compte des incertitudes de la vie quotidienne, en utilisant des concepts extrêmement peu précis comme: "probable", "peu probable", etc... En tant que scientifiques, nous essayons souvent d'affronter ce type de conduite en les formulant en termes de probabilités. Mais avouez que le plus souvent, nous sommes conscients que le langage mathématique ne "colle" pas particulièrement bien dans ce genre de problèmes. Les différentes catégories d'incertitudes ne constituent pas des ensembles vraiment bien définis; et leur imprécision n'est pas particulièrement bien traduite par les notions du calcul des probabilités. Nous avons peut-être les moyens de poursuivre ce travail de conceptualisation, mais je doute que nous puissions nous fier entièrement à lui.

Même s'ils reconnaissent qu'il y a de réelles et profondes difficultés, les chercheurs de psychologie mathématique ne s'apprêtent pas à établir un moratoire dans l'attente d'un aplanissement des difficultés. Bien sûr, plusieurs d'entre nous, et à vrai dire la plupart, tâcheront de contourner les aspects du comportement qui présentent des difficultés particulièrement prononcées. Mais d'autres s'efforceront d'affronter ces problèmes directement. Et dans la mesure où ils réussiront, ils enrichiront les mathématiques aussi bien que la psychologie.

## BIBLIOGRAPHIE


1. J. Aczél, On mean values, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 392-400.
2. J. Aczél. Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhauser. Basel and Stuttgart, 1961.
3. R.C. Atkinson and W.K. Estes, Stimulus sampling theory. In R.D. Luce, R.R. Bush and E. Galanter (Eds) Hand book of Mathematical psychology, vol. II, Wiley, New York, 1963, 121-268.
4. R.R. Bush, E. Galanter, and R.D. Luce, Characterization and classification of choices experiments, Handbook of mathematical psychology, vol. I 77-102.
5. R.R. Bush and F. Mosteller, Stochastic models for learning, Wiley, New-York, 1955.
6. N.R. Campbell, Physics; The elements, Cambridge University Press, New-York, 1920, reprinted as Foundations of Sciences: The Philosophy of Theory and experiment. Dover, New York 1957.
7. N. Chomsky. Formal properties of grammars, Handbook of Mathematical psychology. vol. II 323-418.
8. N. Chomsky and G.A. Miller, Introduction to the formal analysis of natural languages. Handbook of mathematical psychology, vol. II, 269-321.
9. D. Davidson, P. Suppes, and S. Siegel, Decision making, Stanford University Press, 1957.
10. W.K. Estes. Toward a statistical theory of learning, Psychol. Rev., 57 (1950) 94-107. Reprinted in R.D. Luce, R.R. Luce, and E. Galanter (Eds.) Readings in mathematical psychology, vol. I Wiley, New-York, 1953, 308-321.

11. D.M. Green, Psychoacoustics and detection theory, J. Acoust. Soc. Amer., 32 (1960) 1189-1203. Reprinted in Readings in mathematical psychology, 41-66.

12. F. Harary, Graph theoretic methods in the management sciences, Management Science, 5 (1959) 387-403.

13. L. Kanal, A functional equation analysis of two learning models, Psychometrika, 27 (1962) 89-104. Reprinted in Readings in mathematical psychology, 360-375.

14. S. Karlin, Some random walks arising in learning models I, Pac. J. Math., 3 (1953) 725-756. Reprinted in Readings in mathematical psychology, 381-403.

15. J. Lamperti and P. Suppes, Chains of infinite order and their applications to learning theory, Pacific J. Math., 9 (1959) 739-754.

16. R.D. Luce, Individual choices behavior, Wiley, New-York, 1959.

17. R.D. Luce, A threshold theory for simple detections experiments, Psychol. rev., 70 (1963) 61-79.

18. R.D. Luce, Detection and recognition, Handbook of mathematical psychology, Vol. I, 103-189.

19. R.D. Luce, Some one-parameter commutative learning operators. In R.C. Atkinson (Ed.) Studies in mathematical psychology, Stanford University Press 1963.

20. R.D. Luce and J. Tuckey, Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement, J. Math. Psych., 1 (1964).

21. W.J. Mc Gill, Stochastic latency mechanisms, Handbook of mathematical psychology, vol. I, 309-360.

22. G.A. Miller and N. Chomsky, Finitary models of languages users, Handbook of mathematical psychology, vol. II, 419-492.

23. J. Pfanzagl, A general theory of measurement: application to utility, Naval Res. Logistics Quaterly, 6 (1959) 283-294.

24. F.P. Ramsey, The foundations of mathematics and other logical essays, Harcourt, Brace and Company, New-York, 1931.

25. A. Rappoport, Mathematical models of social interaction, Handbook of mathematical psychology, vol. II, 493-579.

26. L. J. Savage, The foundations of statistics, Wiley, New-York, 1954.

27. S. Sternberg, Stochastic learning theory, Handbook of mathematical psychology, vol. II, 1-120.

28. P. Suppes and J.L. Zinnes, Basic measurement theory, Handbook of mathematical psychology, vol. I, 1-76.

29. M. Tatsuoka and F. Mosteller, A commuting-operator model. In R.R. Bush and W.K. Estes (Eds) Studies in mathematical learning theory, Stanford University press, 1959, 227-247.

30. L.L. Thurstone, Multiple factor analysis, University of Chicago Press, 1947.

31. L.L. Thurstone, The measurement of values, University of Chicago Press, 1959.

32. W.S. Torgerson, Theory and methods of scaling, Wiley, New-York, 1958.

33. J. Von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1944 (Ist Ed.) 1949 (2nd Ed.).