Problèmes d’enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 12 (1965), p. 37-42
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__12__37_0>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

M. BARBUT

MORPHISMES D'ALGEBRES DE BOOLE

VOCABULAIRE ET QUELQUES EXERCICES

1. - Une Algèbre de Boole: un ensemble B, comportant deux éléments distingués, ou pôles de l'algèbre, $\bigvee$ et $\bigwedge$, et sur lequel sont définies deux opérations binaires $\vee$ et $\wedge$ (lire resp. sup. - supremum - et inf. - infimum), et une opération unaire ('), la complémentation. Avec comme règles d'emploi celles des opérations $\bigcup$ et $\bigcap$ (union et intersection) entre parties d'un ensemble pour $\vee$ et $\wedge$, celle du passage à la partie complémentaire pour ', et celles de la partie pleine pour $\bigvee$ et de la partie vide pour $\bigwedge$. On trouvera la liste de ces règles dans le bulletin n° 10, pages 54 et 55.

Une algèbre de Boole est finie si B n'a qu'un nombre fini d'éléments. On sait (ici, on l'admettra) qu'alors B est toujours représentable par l'ensemble des parties d'un ensemble fini, muni des opérations usuelles rappelées ci-dessus, ou simplexe. Le nombre d'éléments de B est donc une puissance de 2, et à chaque puissance de 2 : 2,4,8,16, ... correspond une et une seule algèbre de Boole. (Sur les simplexes, voir les notes de P. Rosenstiehl, bulletins n° 9, 10 et 11).

2. - Un morphisme (ou homomorphisme) booléen: une application d'une algèbre de Boole B sur une algèbre de Boole B_o

$$f : B \longrightarrow B_o$$

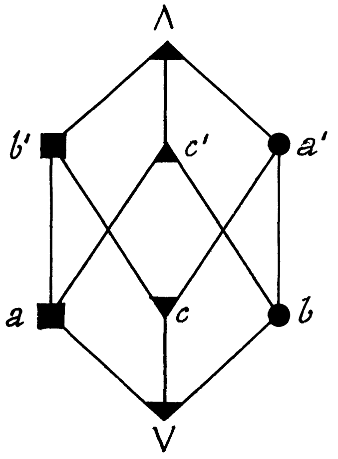
qui "conserve" la structure :

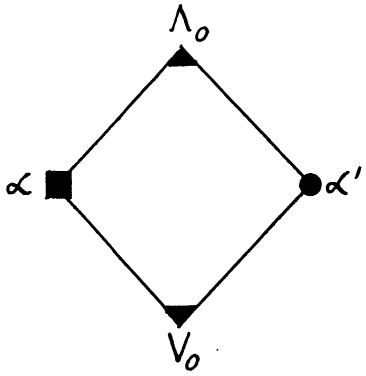
$$\forall x, \forall y \in B, \quad f(x \vee y) = f x \vee f y$$
$$f(x \wedge y) = f x \wedge f y$$
$$\forall x, \quad f x' = (fx)'$$
$$f \bigvee = \bigvee_o$$
$$f \bigwedge = \bigwedge_o$$

$\bigwedge_o$ et $\bigvee_o$ étant les pôles de B_o.

Exemples :

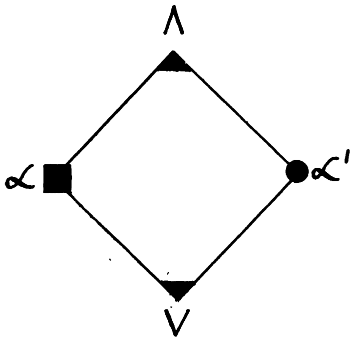
1) B : Algèbre à 8 éléments
B_0: Algèbre à 4 éléments.

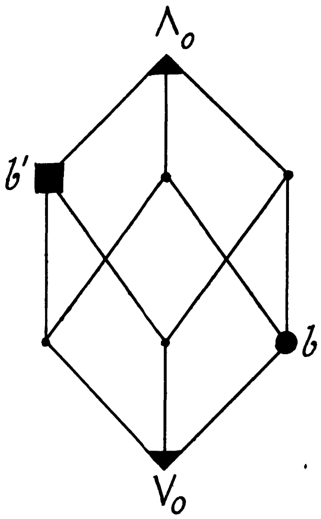




	$\xrightarrow{f}$
V	V_0
a	α
b	α'
c	V_0
a'	α'
b'	α
c'	Λ_0
Λ	Λ_0

2) B: Algèbre 4; B_0: Algèbre 8.





	$\xrightarrow{f}$
Λ	Λ_0
α	b'
α'	b
V	V_0

3) B: Algèbre 32; B_0: Algèbre 4.
Voir Bull. n° 9, pages 43 à 45.

3. - Un morphisme est dit (ici) <u>épi</u> (épimorphisme) s'il est surjectif, c'est-à-dire si chaque élément de B_0, algèbre d'arrivée, est image d'au moins un élément de B, algèbre de départ.

Inversement, un morphisme est un <u>mono</u> (monomorphisme) si chaque élément de B_0 est image d'au plus un élément de B.

Les morphismes exemples 1 et 3 ci-dessus sont épi (ou "épis"?); le morphisme exemple 2 est mono.

Exercice à faire avant d'aller plus loin: chercher sur les diagrammes simpliciaux correspondants tous les mono d'une algèbre 2 dans une algèbre 8; d'une algèbre 4 dans une algèbre 8. Tous les épi d'une algèbre 8 dans une algèbre 4, dans une algèbre 2. Chercher un morphisme de 8 dans 4 et un morphisme de 8 dans 8 qui ne soient ni épi, ni mono.

4. - Vous avez travaillé, et vous venez de trouver un seul mono de 2 dans 8, et 6 monos de 4 dans 8. Dans chaque cas, l'ensemble des images des éléments de B forme un sous-ensemble de B_0 qui est lui-même une algèbre de Boole, réplique de l'algèbre de départ B. Sur la figure de l'exemple 2, on voit que l'image de B est constituée par les deux pôles de B_0, un élément autre que les pôles, et le complémentaire de ce dernier : c'est une sous-algèbre de B_0.

Sous-algèbre d'une algèbre de Boole: partie de cette algèbre qui soit elle-même une algèbre de Boole, c'est-à-dire qui contienne les pôles, et soit stable pour les opérations v, $\wedge$ et '. Et on a la propriété générale :

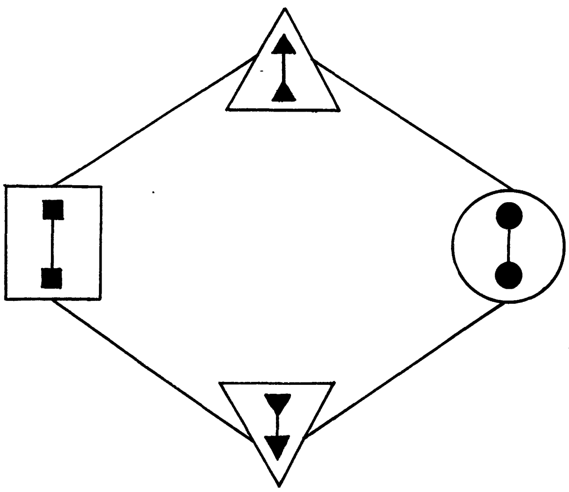
Si $$m : B \longrightarrow B_0$$

est un mono (morphisme), l'image de B par m est une sous-algèbre de B_0, réplique de B.

Exercice : Prouver cette propriété.

5. - De même qu'aux mono est associée la notion de sous-(algèbre), aux epi sera par dualité (renverser le sens des flèches, regarder le morphisme de l'arrivée B_0 vers le départ B) associée la notion d'algèbre quotient.

Prenons l'épi donné en exemple 1 (on n'importe lequel de ceux que vous avez construits): les 8 éléments de B sont rangés en quatre classes, selon l'élément de B_0 sur lequel ils sont appliqués, et chaque classe comprend deux éléments exactements. Identifions tous les éléments d'une même classe: il reste, entre classes une algèbre à 4, réplique de B_0. L'exemple 3 fournit une autre image du passage au quotient: une algèbre 32 sur une algèbre 4; 4 classes, chacune organisée comme une algèbre 8.



Là aussi, la propriété est générale, quoique moins aisée à démontrer que dans le cas des mono et des sous-algèbres. Si :

$$e : B \longrightarrow B_0$$

est un épi, le quotient de B par e est une algèbre réplique de B_0.

6. - Toutes les classes sont semblables (superposables sur les diagrammes); la donnée de l'une d'entre elles suffira à les déterminer toutes. Comment la choisir? Les pôles jouent un rôle distingué dans les algèbres de Boole; portons d'abord l'attention sur les classes associées aux pôles.

Celle des classes qui correspond au pôle Λ_o de l'algèbre B_o d'arrivée: ses éléments sont par définition ceux des éléments de B qui ont pour image Λ_o dans l'épimorphisme e. Désignons-la par I.

On a :

1. $\Lambda \in I$ puisque $e\Lambda = \Lambda_o$
2. $(x \in I \text{ et } y \in I) \Longrightarrow (x \vee y \in I)$
   $\left[(ex = \Lambda_o \text{ et } ey = \Lambda_o) \Longrightarrow (e(xvy) = exvey = \Lambda_o \vee \Lambda_o = \Lambda_o)\right]$
3. $(x \in I \text{ et } y \in B) \Longrightarrow (x \Lambda y \in I)$
   $\left[(ex = \Lambda_o) \Longrightarrow (e(x\Lambda y) = ex\Lambda ey = \Lambda_o \; \Lambda ey = \Lambda_o)\right]$

Toute partie d'une algèbre de Boole possédant ces trois propriétés est appelée un idéal. En dualité (booléenne), la classe des éléments envoyés par e sur V_o possède les 3 propriétés duales de celles de l'idéal; on dit que c'est un filtre.

Parmi les idéaux d'une algèbre de Boole, l'un ne sera jamais à considérer; l'idéal "trivial" I = B. Quant aux autres, il est clair d'après la propriété (2) que dans une algèbre finie (attention, ceci n'est pas vrai pour les algèbres infinies) tout idéal possède un plus grand élément i, et est constitué d'après (3) par tous les éléments de B inférieurs ou égaux à i (dans l'ordre défini dans B par la relation d'absorption $x \Lambda y = x$, qui est figurée sur nos diagrammes).

Nous aurons donc autant d'idéaux que d'éléments de B, et ce sont là tous les idéaux de B obtenus par la règle: choisir un élément i arbitraire dans B et retenir tous les éléments de B dominés par i.

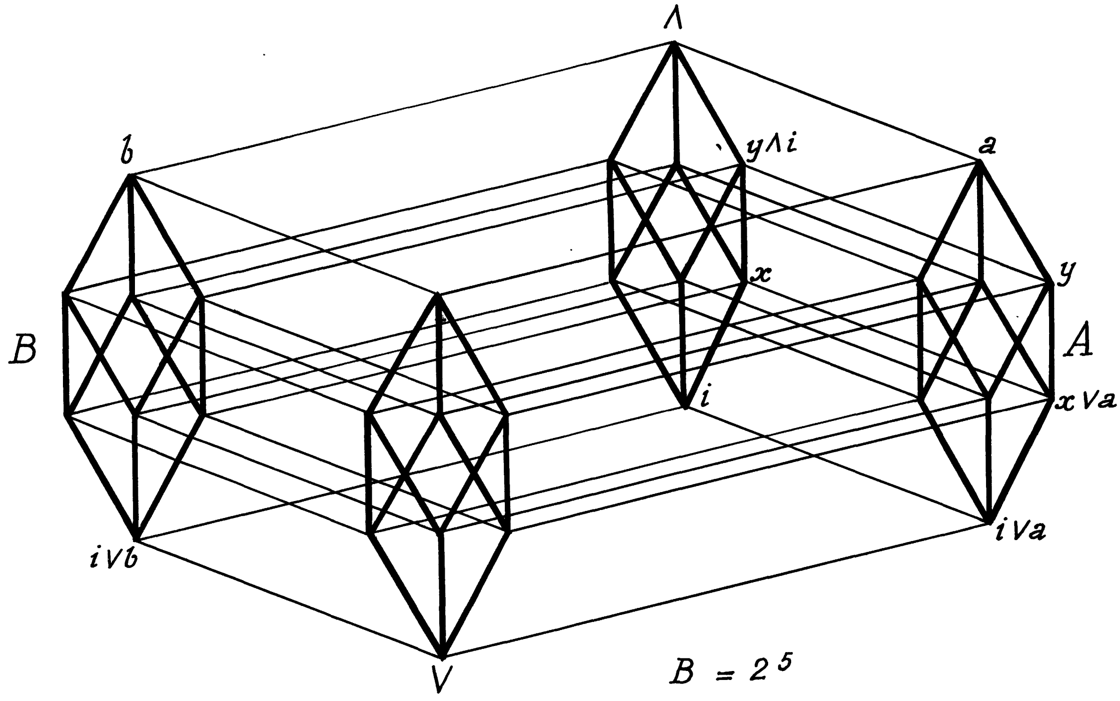
7. - Un idéal I étant choisi, les complémentaires des éléments de I constituent un filtre comprenant le complémentaire i' de i et tous les éléments de B qui dominent i'.

Supposons que B soit à 2^n éléments; elle comporte n atomes; si i est au niveau p dans le diagramme simplicial, I contient p atomes dont i est le sup.. Soit a l'un des n-p autres atomes; l'intervalle A = (a, i v a) est mis en correspondance bi-univoque avec I par les applications :

$$I \longrightarrow A \qquad x \rightsquigarrow a \vee x$$

$$A \longrightarrow I \qquad y \rightsquigarrow i \Lambda y$$

dont on démontre aisément que chacune est un morphisme pour les opérations V et Λ (Prouvez-le) et qu'elles sont inverses l'une de l'autre.



De même, à un autre atome b non dans I correspond une classe B constituée par l'intervalle (b, i v b); et I, A et B sont deux à deux disjointes.

On voit la suite : I jouant le rôle de pôle inf., les (n-p) classes A, B, ... celui d'atomes, l'algèbre-quotient va se constituer en définissant A V B par l'intervalle (avb, ivavb), A V B V C par l'intervalle (avbvc, ivavbvc), etc.... Ce sera une algèbre à 2^{n-p} éléments.

Si donc on veut définir un épi d'une algèbre 2^n,B, sur une algèbre 2^k,B_0,($k \leqslant n$) on procèdera en choisissant un élément arbitraire i au niveau n-k dans B, on envoie l'idéal I déterminé par i sur Λ_0, puis les k classes "atomiques", du quotient B/I sont appliquées bijectivement sur les atomes de B_0. Les images de tous les autres éléments de B sont alors univoquement déterminées.

Exercice: Compter les épi de 2^n sur 2^k.

8. - Si f est un morphisme de B à B_0 qui ne soit ni épi, ni mono, nous aurons encore, associé à f , un quotient dans B. Ce quotient sera déterminé par l'idéal I des éléments de B qui ont pour image Λ_0. Et l'algèbre quotient est une réplique de la sous-algèbre de B_0 constituée par l'image de B dans B_0. C'est la classique factorisation de f :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\text{épi}"'] & & B_0 \\ & B/I \arrow[ur, "\text{mono}"'] & \end{tikzcd}$$

Exercices en guise de conclusion :

- Montrer que le nombre de mono d'une algèbre 2^k dans une algèbre 2^n satisfait à l'équation de récurrence :

$$M_{k,n} = k\,(M_{k,n-1} + M_{k-1,n-1}) \quad (k < n)$$

- Montrer que le nombre de surjections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de k éléments satisfait à la même équation.

- Calculer le nombre d'injections d'un ensemble de k éléments dans un ensemble de n éléments $(k \leqslant n)$. Comparer au nombre d'épi de 2^n sur 2^k.

- Donner une explication des résultats (associer à un ensemble E l'algèbre de Boole de l'ensemble de ses parties; à une algèbre de Boole finie, l'ensemble de ses atomes).

Bibliographie

P.R. HALMOS. Lectures on Boolean Algèbras (Van Nostrand).