MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Topologie générale et algèbre de Kuratowski

Mathématiques et sciences humaines, tome 12 (1965), p. 11-27
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__12__11_0>

M. BARBUT

TOPOLOGIE GENERALE ET ALGEBRE DE KURATOWSKI

Résumé :

A partir des propriétés topologiques classiques de la droite, on dégage les notions de base de la topologie: ouverts, fermés, etc... Puis on examine l'algèbre des opérations "intérieur" et "fermeture" (algèbre de Kuratowski) et on donne un aperçu sur la définition axiomatique d'une topologie, et les rapports entre topologie et sciences sociales.

I - CONCEPTS INTUITIFS DE LA TOPOLOGIE USUELLE DE LA DROITE

Sur une droite D, on appelle intervalle <u>ouvert</u> a b, noté] a, b[, l'ensemble des points x tels que : $a < x < b$; c'est le segment a b, <u>bornes non comprises</u>.

Graphiquement, on figure souvent l'intervalle ouvert] a, b [comme ci-contre.

L'intervalle <u>fermé</u> a b, noté [a, b] , est le segment <u>bornes comprises</u> :
$[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.
Graphiquement, on adoptera la fituration :

L'intervalle <u>semi-ouvert à droite</u> est le segment a b, a compris et b exclu; o
on le note [a,b[, et on le figurera ici :

En dualité, l'intervalle <u>semi-ouvert à gauche</u>]a, b] est l'ensemble
$\{x : a < x \leqslant b\}$:

En particulier, si a = b, l'intervalle fermé [a,a] se réduit au point a; les trois intervalles]a,a[, [a,a[,]a,a] sont vides.

Intérieur

Soit A un ensemble de points de la droite. Un point a est dit <u>intérieur</u> à A s'il existe un intervalle ouvert I tel que a appartienne à I et tout point de I soit point de A :

$$a \in I \qquad \text{et} \qquad I \subset A$$

Par exemple, tous les points de l'ensemble A constitué par un intervalle ouvert $]u, v[$ sont intérieurs à A; il en est de même de tous les points d'un ensemble A constitué par l'union d'intervalles ouverts.

Par contre, un intervalle fermé $[u,v]$ possède des points intérieurs si $u < v$ (tous les points x tels que $u < x < v$), mais u et v ne sont pas intérieurs. En particulier, tout ensemble A constitué par un seul point a :

$$A = \{a\}$$

n'a pas de points intérieurs, puisque l'intervalle $]a,a[$ est vide; plus généralement tout ensemble A discret n'a pas de point intérieur.

Ouvert

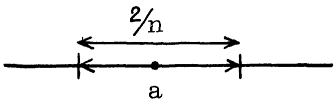
Un ensemble A est dit ouvert si tous ses points sont intérieurs: par exemple, l'union d'intervalles ouverts constitue un ensemble ouvert; autre exemple, une demi-droite ouverte

$$\mathcal{S}\, a = \{x : \ a < x\}$$

Il résulte immédiatement de cette définition que toute union d'ensembles ouverts est un ouvert: donnons nous en effet une famille quelconque d'ouverts; tout point x de l'union V des ensembles de la famille appartient (par définition de l'union) à au moins un ensemble A de la famille; A est ouvert, donc x est intérieur à A; comme $A \subset V$, x est a fortiori intérieur à V.

Si A et B sont deux ouverts, leur intersection $A \cap B$ est un ouvert: cela résulte de ce que l'intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert (si elle n'est pas vide). De même, l'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert.

Mais l'intersection d'une famille infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert: considérons par exemple, a étant un point de la droite, la famille constituée par les intervalles ouverts $]a - \frac{1}{n}, \ a + \frac{1}{n}[$, où $n = 1,2,3, \ldots$. L'intersection de cette famille est l'ensemble $\{a\}$, qui n'est pas ouvert.



Les ensembles ouverts se comportent donc différemment vis-à-vis de l'union et de l'intersection: stabilité pour l'union (finie ou infinie), mais stabilité pour la seule intersection finie. De façon que ces règles de stabilité ne soient jamais violées, on est amené à poser :

L'ensemble vide ϕ est un ouvert (l'intersection de deux ouverts peut en effet être vide).

L'ensemble plein (la droite toute entière) est un ouvert: deux demi-droites ouvertes $\{x : a < x\}$ et $\{x : x < b\}$ telles que $b > a$ ait pour union la droite entière.

Fermé

En dualité avec la notion d'ouvert, nous avons celle de fermé; nous avons vu comment se comportent les ouverts par rapport aux deux opérations binaires de l'algèbre de Boole: union et intersection. Par rapport à l'opération unaire, la complémentation, il n'y a pas stabilité; le complémentaire d'un ouvert n'est pas nécessairement ouvert:

(par exemple, le complémentaire de l'union des deux demi-droites ouvertes figurées ci-contre est l'intervalle [a,b] fermé, dont on a vu qu'il n'est pas ouvert).

On appelle fermé tout ensemble complémentaire d'un ouvert: tout intervalle fermé, tout ensemble réduit à un point, tout ensemble discret sont des fermés.

Bien entendu, les propriétés des fermés par rapport à l'union et l'intersection sont duales de celles des ouverts: toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé; l'union finie de fermés est un fermé.

En outre, ϕ est fermé (son complémentaire, le plein, est ouvert); de même le plein est fermé.

A partir de la notion d'intervalle ouvert et de point intérieur à un ensemble, nous sommes donc en mesure de qualifier certains ensembles de points:
- les ouverts - tous leurs points sont intérieurs,
- les fermés - complémentaires des ouverts,
- les ouverts et fermés - ϕ et plein en particulier.

Il reste que la plupart des ensembles ne sont ni ouverts ni fermés, tels les intervalles semi-ouverts, ou l'ensemble des points à abscisse rationnelle (lorsqu'on a muni la droite d'une origine, d'un sens et d'une unité); ou l'ensemble des points à abscisse décimale, etc... Ces deux derniers exemples montrent des ensembles dont aucun point n'est intérieur (tout intervalle contient une infinité de points d'abscisse irrationnelle, et une infinité de points d'abscisse non décimale), et dont le complémentaire possède la même propriété (tout intervalle contient une infinité de points d'abscisse rationnelle et une infinité de points d'abscisse décimale).

Ces exemples nous serviront dans la suite.

II - INTERIEUR, EXTERIEUR, FRONTIERE, FERMETURE

Intérieur

Appelons intérieur d'un ensemble A, et notons iA, l'ensemble des points x intérieurs à A. iA est par définition un sous-ensemble ouvert de A, puisque tous ses points sont intérieurs. C'est même le sous-ensemble ouvert maximum (par rapport à l'ordre d'inclusion) contenu dans A: la démonstration en est immédiate.

Si en particulier A est ouvert, il est son propre intérieur. On a donc :

$$A \in \text{Ouvert} \Longleftrightarrow iA = A.$$

Et, puisque iA est ouvert, quelque soit A :

$$iiA = i^2A = iA.$$

Ce qui s'énonce: l'intérieur de l'intérieur, c'est l'intérieur.

"Prendre l'intérieur" de chaque ensemble de points de la droite D définit une application i de l'ensemble 2^D des parties de D dans lui-même :

$$i : 2^D \longrightarrow 2^D$$

Nous venons de voir que cette application a deux propriétés remarquables :

$$\forall A \in 2^D : iA \subset A$$
$$\forall A \in 2^D : i^2A = iA$$

Cette propriété est nommée idempotence de l'application i : i est égale à ses propres puissances puisque de :

$$i^2 = i$$

on déduit immédiatement :

$$i^3 = i\,i^2 = i\,i = i^2 = i$$
$$i^4 = i\,i^3 = i\,i = i^2 = i \qquad \text{etc...}$$

L'application i a d'autres propriétés; l'une est évidente: c'est la monotonie; si $A \subset B$, alors $iA \subset iB$. L'autre l'est moins: l'intérieur de l'intersection de deux ensembles est l'intersection des intérieurs:

$$\forall A, \forall B : i(A \cap B) = iA \cap iB$$

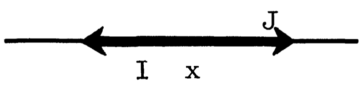
D'après la monotonie, il est évident en effet que :

$$i(A \cap B) \subset iA$$
$$i(A \cap B) \subset iB$$

donc :

$$i(A \cap B) \subset iA \cap iB$$

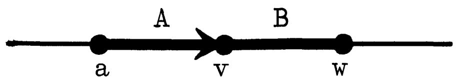
L'inclusion duale se voit en considérant que si x est intérieur à A et à B, il existe un intervalle ouvert contenant x et inclus dans A, soit I; un intervalle ouvert contenant x et inclus dans B, soit J. L'intervalle $I \cap J$ est ouvert, contient x et est inclus dans $A \cap B$. Donc x est intérieur à $A \cap B$.



L'application i est donc un homomorphisme pour l'intersection. Par contre, elle ne conserve pas l'union, et l'on a simplement :

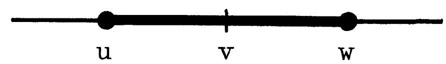
$$i(A \cup B) \supset iA \cup iB$$

en raison de la monotonie; mais l'inclusion est en général stricte. Par exemple :

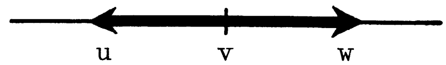


$A = [u, v[$ $\qquad$ $B = [v, w]$

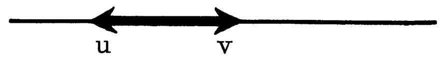
$A \ B = [u, w]$



$i\,(A \cup B) = \,]u, w[$
(y compris le point v)

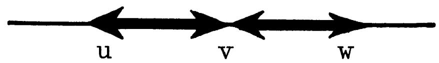


$iA = \,]u, v[$



$iB = \,]v, w[$

$iA \cup iB$ = l'intervalle ouvert u,w privé du point v



Autre exemple, plus frappant :

$A = \{$les rationnels de D$\}$ $\qquad$ $iA = \phi$ $\qquad$ Pourquoi ?
$B = \{$les irrationnels de D$\}$ $\qquad$ $iB = \phi$ $\qquad$ Pourquoi ?
$A \cup B = D$ (le plein)
$i\,(A \cup B) = D$ (D est un ouvert)
$iA \cup iB = \phi \cup \phi = \phi$

Résumons en un tableau les quatre propriétés trouvées pour l'application i : prendre l'intérieur.

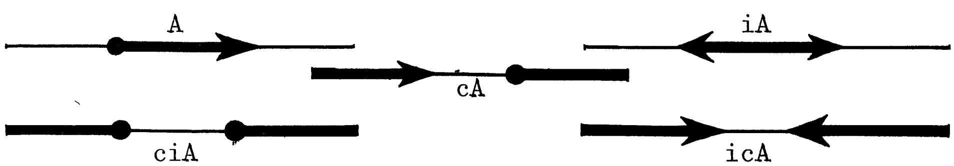
$i : 2^D \longrightarrow 2^D$

(i)	(1) $\forall A, \forall B, A \subset B$	$\Longrightarrow iA \subset iB$	monotonie
	(2) $\forall A$	$iA \subset A$	
	(3) $\forall A$	$i^2A = iA$	idempotence
	(4) $\forall A, \forall B$	$i(A \cap B) = iA \cap iB$	

Extérieur

Nous venons de voir comment joue l'application i par rapport à l'union et l'intersection; par rapport à la troisième opération booléenne, la complémentation (nous noterons dans la suite cA le complémentaire d'un ensemble A de points de D), les choses sont moins simples.

D'abord, parlera-t-on de l'intérieur du complémentaire (icA) ou du complémentaire de l'intérieur (ciA)? Ce sont en général deux ensembles distincts comme le montre l'exemple ci-dessous :



icA est d'ailleurs toujours ouvert (c'est un intérieur);
ciA est toujours fermé (c'est le complémentaire de l'ouvert iA).
icA est l'ensemble des points intérieurs au complémentaire de A; un tel point sera dit extérieur à A, et icA, noté de façon plus brève eA, est l'extérieur de A :

$$\mathrm{icA} = \mathrm{eA} = \{ x : \quad x \text{ extérieur à } A \}$$

Quant à ciA, nous verrons plus bas son interprétation.

Les propriétés (1), (2), et, (4) de l'application i ont, compte-tenu des lois de Morgan sur la complémentation, leurs correspondantes pour l'application e :

(1) $A \subset B \Longrightarrow eA \supset eB$

(2) $A \cap eA = \phi$

(4) $e\,(A \cup B) = eA \cap eB$

Mais la propriété (3) d'idempotence n'a pas de correspondante simple.

Frontière

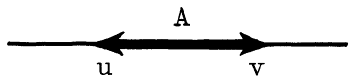
Intérieur, extérieur d'un ensemble A; bien entendu, il y a ce qui est entre les deux, ni intérieur, ni extérieur, et qu'on appelle la frontière de A, et que nous noterons bA.

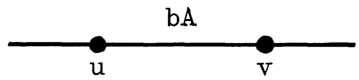
La frontière de A, c'est par définition: le complémentaire de $iA \cup eA$

$$bA = c(iA \cup eA) = ciA \cap ceA$$

Une façon simple de caractériser les points de la frontière est de dire que si $x \in bA$; tout intervalle ayant x à son intérieur possède des points de A et des points du complémentaire de A.

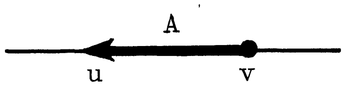
On remarquera que la frontière de A peut ne comprendre aucun point de A, comme dans l'exemple ci-dessous:

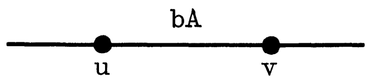




$A = \,]u,v[$ $\qquad$ $bA = \{u,v\}$

et plus généralement dans le cas des ensembles ouverts; ou bien être incluse dans A, pour les ensembles fermés; Si A est en plus discret, il est sa propre frontière. Si A n'est ni ouvert, ni fermé, sa frontière comprend des points de A et des points de son complémentaire





La frontière de A peut même être D (le plein) toute entière comme dans le cas où A est l'ensemble des points à abscisse rationnelle.

Fermeture

La notion d'intérieur d'un ensemble nous a permis de définir en outre l'extérieur et la frontière. Nous avons vu qu'elle est liée à la notion d'ensemble ouvert par l'équivalence :

$$A \in \text{Ouvert} \Longleftrightarrow iA = A$$

Autrement dit, les <u>ouverts sont les éléments invariants de l'application i.</u>

De même que la notion d'ouvert a sa duale, celle de fermé, celle d'intérieur a une duale, celle de <u>fermeture</u> ou <u>adhérence.</u> De façon naturelle, l'application "fermeture" dans l'ensemble 2^D des parties de D, notée f, est la transmuée de l'application "intérieur" par passage aux complémentaires, selon le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, squiggly, "f"] \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "c"'] & cicA = fA \arrow[d, dashed, leftrightarrow, "c"] \\
cA \arrow[r, "i"'] & icA = eA
\end{tikzcd}$$

La fermeture de A, c'est le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A, ou encore le complémentaire de l'extérieur de A.

Une façon plus intuitive de la voir, c'est de considérer qu'elle est l'union de A et de sa frontière :

$$fA = A \cup bA$$

On peut aussi bien dire que la frontière de A est l'intersection de la fermeture de A et de celle du complémentaire de A.

$$bA = fA \cap fcA$$

ou encore, la fermeture de A moins l'intérieur de A :

$$bA = fA - iA$$

et l'on remarquera d'ailleurs que l'égalité fondamentale :

$$\boxed{cic = f}$$

Peut aussi bien s'écrire (voir le diagramme)

$$\boxed{ci = fc}$$

Ce qui nous donne l'interprétation annoncée de l'application ci : complémentaire de l'intérieur; c'est la fermeture du complémentaire.

D'autres relations algébriques entre les applications i,c,f,e sont faciles à établir :

$e^2 = if$, $f = ce$, $i = cfc$

$cf = ic$, $e = cf$

On voit par là que la seule donnée de c et de l'un quelconque des trois autres : i,f,e, permet de les définir toutes.

Pour en revenir à f, ses propriétés sont les duales de celles de i, à savoir :

$$A \in \text{Fermé} \Longleftrightarrow fA = A$$

Les ensembles fermés sont ceux qui sont leur propre fermeture. D'autre part :

(f)	(1)	$\forall A, \forall B,$	$A \subset B \Longrightarrow fA \subset fB$	monotonie
	(2)	$\forall A,$	$fA \supset A$	
	(3)	$\forall A,$	$f^2A = fA$	idempotence
	(4)	$\forall A, \forall B$	$f(A \cup B) = fA \cup fB$	

fA peut enfin être considéré comme le plus petit fermé contenant A.

III - ALGEBRE DE KURATOWSKI

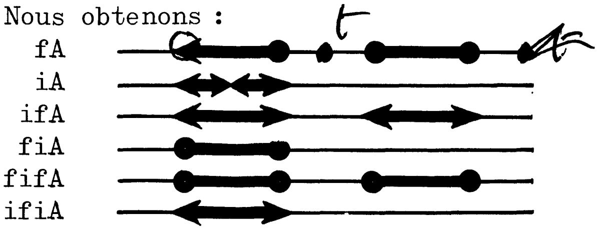
Un ensemble A, son intérieur, sa fermeture, avec la double inclusion :

$$iA \subset A \subset fA$$

On peut ensuite recommencer à partir de iA et de fA, et s'amuser à construire fiA (fermeture de l'intérieur), ifA (intérieur de la fermeture), fifA (c'est trop long à dire), etc... Essayons sur un exemple :

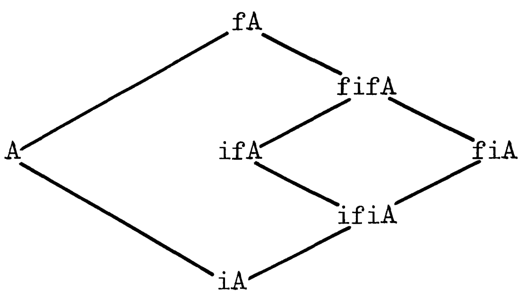
A comprend l'intervalle fermé $[x,z]$ privé du point y, le point isolé t, et tous les points d'abscisse rationnelle de l'intervalle $[u,v]$.

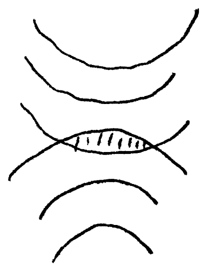
Nous obtenons :



Soit déjà six ensembles distincts (7 si l'on comprend A) avec, entre ces ensembles, le diagramme d'inclusion :

f=fif

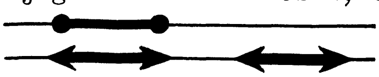




Dans notre exemple, il n'apparaît d'ailleurs pas d'ensemble nouveau si l'on continue à conjuguer les f et les i, car :

fifiA c'est fiA

ififA c'est ifA



et par suite :

$$\begin{aligned} ififiA &= ifiA \\ fififiA &= fifiA = fiA \\ ifififiA &= ifi\,A \end{aligned}$$

etc...

Par passage au complémentaire de A, nous aurions obtenus 7 nouveaux ensembles; nous voyons donc la possibilité, au moyen des applications topologiques i,f,c, et de l'application identique, d'engendrer à partir d'un ensemble 14 ensembles au moins.

Mais en fait, ce nombre 14 est un maximum; nous allons voir que le diagramme d'inclusion donné ci-dessus est général (c'est-à-dire, est valable quelque soit l'ensemble A), et que l'on a pour tout A :

$$\begin{aligned} fifiA &= fiA \\ ififA &= ifA \end{aligned}$$

D'où résulte immédiatement que pour tout A :

$$(fif)\ (fif)\ A = fif^2 ifA = f\ (ifif)\ A = fifA$$

et de même pour ifi.

Autrement dit, non seulement i et f sont des applications idempotentes :

$$i^2 = i \qquad\qquad f^2 = f$$

mais aussi les 4 autres applications qu'elles engendrent par composition :

$$\begin{aligned} (if)^2 &= if & \qquad (fi)^2 &= fi \\ (fif)^2 &= fif & \qquad (ifi)^2 &= ifi \end{aligned}$$

Démontrons d'abord les inclusions; l'inclusion :

$$\boxed{fA \supset A}$$

valable quel que soit A (propriété (2) de f) implique :

$$ifA \supset iA \qquad\qquad \text{(i est monotone)}$$

et d'où :

$$\boxed{fifA \supset fiA} \qquad\qquad \text{(f est monotone)}$$

Cette même inclusion, écrite :

$$fX \supset X$$

appliquée à $X = ifA$
fournit :

$$\boxed{fifA \supset ifA}$$

D'autre part, l'inclusion :

$$X \supset iX$$

implique, appliquée à $X = fA$

$$fA \supset ifA \qquad \text{(monotonie de } f\text{)}$$

Donc :

$$\boxed{fA = f^2A \supset fifA} \qquad \text{(monotonie et idempotence de } f\text{)}$$

Les autres inclusions du diagramme, obtenues en échangeant f et i, se démontrent de même.

Bien entendu, il pourra arriver que pour certains ensembles, les six ensembles que l'on peut obtenir ne soient pas distincts; pour celui qui nous a servi d'exemple, si l'on en supprime la partie constituée par les rationnels de l'intervalle $[u,v]$, on a alors :

$$if = ifi$$
$$fi = fif$$

Passons maintenant à l'idempotence de fi (démonstration analogue pour celle de if).

On a d'après le diagramme d'inclusion :

$$ifiA \supset iA$$

d'où :

$$fifiA \supset fiA \qquad \text{(monotonie de } f\text{)}$$

D'autre part, d'après le même diagramme :

$$ifiA \subset fiA$$

d'où :

$$fifiA \subset f^2iA = fiA \qquad \text{(monotonie et idempotence de } f\text{).}$$

Finalement :

$$fifiA = fiA$$

Nous sommes maintenant en mesure de dresser la table de composition des six applications topologiques i, f, if, fi, fif, ifi; on aura par exemple, compte tenu des propriétés d'idempotence :

$$(if)\ (fif) = ifif = if$$

	i	f	if	fi	ifi	fif
i	i	if	if	ifi	ifi	if
f	fi	f	fif	fi	fi	fif
if	ifi	if	if	ifi	ifi	if
fi	fi	fif	fif	fi	fi	fif
ifi	ifi	if	if	ifi	ifi	if
fif	fi	fif	fif	fi	fi	fif

Il s'agit du monoïde (l'opération de composition est associative) idempotent à deux générateurs (ici f et i); il suffit en effet pour le construire de se donner :

- deux lettres: i et f
- on écrit des mots au moyen de ces lettres,
- cette écriture est associative: si x, y et z sont trois mots, $(xy)z = x(yz)$
- elle est idempotente: pour tout mot x, $xx = x^2 = x$.

Les quatre règles énoncées montrent qu'il n'y a que six mots qui se composent entre eux selon la table écrite.

Ce monoïde est souvent appelé algèbre de Kuratowski, du nom du topologiste polonais qui a mis en évidence les propriétés que nous venons de décrire.

IV - DES FACONS DE DÉFINIR UNE TOPOLOGIE

Ces propriétés topologiques, établies ici pour la droite, permettent de définir une topologie pour un ensemble E quelconque; et elles le permettent de plusieurs manières, équivalentes entre elles.

Première manière, la plus classique, de définir une topologie sur un ensemble E : <u>les ouverts</u>. On se donne une famille $\mathcal{O}$ de parties de E :

$$\mathcal{O} \subset 2^E$$

telle que* :

(a) $\phi \in \mathcal{O}$

(b) $E \in \mathcal{O}$

(c) si les $A_i \in \mathcal{O}$, $\bigcup A_i \in \mathcal{O}$
les A_i étant en nombre fini ou infini

(d) si les $A_i \in \mathcal{O}$, $\bigcap A_i \in \mathcal{O}$,
les A_i étant en nombre <u>fini</u>.

Nous avons vu que les ouverts de la droite possédaient ces quatre propriétés; on appellera alors ouvert de E tout élément de $\mathcal{O}$.

Un élément $a \in E$ sera dit intérieur à la partie A de E s'il existe un ouvert O tel que :

$$a \in O \subset A$$

<u>L'intérieur iA</u> de A est l'ensemble des éléments intérieurs à A : c'est un ouvert, l'union des ouverts inclus dans A.

*En fait, les seules propriétés (c) et (d) suffisent à constituer une axiomatique des ouverts; (a) et (b) se déduisent formellement de (c) et (d) et des axiomes de la Théorie des Ensembles.

Définissons alors l'application i : $A \longrightarrow iA$ dans 2^E par :

$$iA = \bigcup_{\substack{0 \subset A \\ 0 \in \mathcal{O}}} 0$$

iA = union des ouverts inclus dans A.

L'application i ainsi définie satisfait aux <u>propriétés voulues</u> :

Si A est ouvert, iA = A (puisque A est l'un des ouverts inclus dans A) et réciproquement, si iA = A, comme iA est toujours un ouvert (une union d'ouverts est un ouvert d'après (C)), c'est que A est ouvert. On a donc bien la caractérisation : $A \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow iA = A$.

En outre :

(o)	$iE = E$	(puisque E est ouvert)
(1)	$A \supset B \Longrightarrow iA \supset iB$	(tout ouvert inclus dans B est a fortiori inclus dans A)
(2)	$iA \subset A$	(par définition)
(3)	$iiA = iA$	(puisque iA est ouvert)
(4)	$i(A \cap B) = iA \cap iB$	

Cette dernière relation se démontre ainsi :

D'après (1) : $i(A \cap B) \subset iA \cap iB$

D'après (2) : $iA \cap iB \subset A \cap B$

Mais iA et iB sont ouverts; d'après (d), $iA \cap iB$ est un ouvert; donc il est son propre intérieur :

$$i(iA \cap iB) = iA \cap iB$$

Mais d'après la dernière inclusion écrite précédemment et (1) de nouveau :

$$i(iA \cap iB) \subset i(A \cap B)$$

On définit ensuite les fermés comme étant les complémentaires des ouverts; par les lois de Morgan, on obtient immédiatement les propriétés de ceux-ci: ils constituent une famille $\mathcal{F}$ de parties de E telle que :

(a)' $E \in \mathcal{F}$

(b)' $\phi \in \mathcal{F}$

(c)' si les $A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcap A_i \in \mathcal{F}$
les A_i étant en nombre fini ou infini

(d)' si les $A_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$
les A_i étant en nombre <u>fini</u>.

L'application "fermeture", f : $A \longrightarrow f\,A$ dans les parties de E a la définition duale de celle d'"intérieur" i :

$$f\,A = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \in \mathcal{F}}} F$$ = intersection des fermés contenant A

et ses propriétés, duales de celles de i, se démontrent de même.

Enfin, la relation entre f et i :

$$f = cic$$

résulte immédiatement de la définition et des lois de Morgan :

$$f\,A = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \in \mathcal{F}}} F = \bigcap_{\substack{c0 \supset A \\ 0 \in \mathcal{O}}} c0 = c \bigcup_{\substack{0 \subset cA \\ 0 \in \mathcal{O}}} 0 = c\ i(cA)$$

Il est clair que la construction faite à partir des ouverts peut aussi bien se faire à partir des fermés. Les deux manières sont équivalentes et conduisent au même résultat; en particulier, une fois que les applications f et i sont définies, tout ce qui a été vu au paragraphe III est valable, et la composition de ces applications conduit à l'algèbre de Kuratowski.

Par contre, il convient de souligner que toutes les propriétés intuitives de la topologie usuelle de la droite ne sont pas impliquées par l'axiomatique de la "topologie générale" donnée ici; notamment, alors que chaque ensemble de la droite réduit à un point était un fermé, il n'est pas nécessaire que chaque partie $\{x\}$ de E, où $x \in E$, soit un fermé; si l'on veut qu'il en soit ainsi, il faudra le poser par un axiome supplémentaire. Ajoutons que c'est ce que l'on fait presque toujours dans les topologies effectivement utilisées pour les ensembles infinis (dans les ensembles finis, comme toute partie est union finie d'éléments, cet axiome revient à dire que toute partie est fermée; et toute partie est aussi ouverte. Pourquoi?).

Par exemple, si E est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n, \ldots.\}$ des entiers naturels, on pourra y définir une topologie en prenant pour $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de E (tous les axiomes sont respectés, et les éléments sont fermés) auxquelles on adjoint E lui-même; les ouverts sont alors les parties dont le complément est fini, souvent appelées parties cofinies.

Les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont ϕ et E; des parties telles que l'ensemble des entiers pairs ou l'ensemble des multiples de 3, etc.... ne sont ni finies ni infinies, donc ni ouvertes ni fermées. Leur fermeture (plus petit fermé les contenant) est évidemment le plein (E tout entier) et leur intérieur est donc ϕ .

Mais il est une seconde manière de définir une topologie, moins simple et moins classique que celle qui vient d'être exposée, mais plus "opératoire"; c'est de se donner non plus les ouverts (ou les fermés) mais l'application i (ou l'application f) avec ses propriétés.

Donnons-nous par exemple, E étant un ensemble quelconque, une application f de l'ensemble 2^E des parties de E dans lui-même satisfaisant aux propriétés* :

(o) $f\ \emptyset = \emptyset$
(1) $A \supset B \Longrightarrow f\,A \supset f\,B$
(2) $f\,A \supset A$
(3) $f^2\,A = f\,A$
(4) $f\,(A \cup B) = f\,A \cup f\,B$

* Une application de 2^E dans lui-même satisfaisant aux seules propriétés (1), (2) et (3) est appelée fermeture de Moore. Elle se rencontre constamment en algèbre; par exemple, si E est un groupe, f associe à toute partie de E le plus petit sous-groupe la contenant. En ce qui concerne la fermeture topologique dont il est question ici, on remarquera que le système (o), (1), (2), (3), (4) est redondant pour constituer une axiomatique : (1) est une conséquence immédiate de (4).

et appelons "fermés" les parties de E invariantes dans $\mathfrak{f}$:

$$\mathcal{F} = \{ X : X \subset E \ \& \ \mathfrak{f}\, X = X \}$$

La famille $\mathcal{F}$ de parties de E ainsi définit satisfait à tous les axiomes des fermés, que l'on se donne dans la "première manière" et elle comprend d'après (3) l'ensemble des images $\mathfrak{f}$ A des parties A de E par $\mathfrak{f}$. La relation (2) entraîne d'abord que $E \in \mathcal{F}$, et (o) pose que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Le fait qu'une intersection de fermés soit un fermé résulte de ce que, d'après la monotonie (1) de $\mathfrak{f}$, on a toujours, les A_1 étant des parties quelconques :

$$\forall_i, \qquad \mathfrak{f}\,(\cap A_i) \subset \mathfrak{f}\, A_i$$

D'où :

$$\mathfrak{f}\,(\cap A_i) \subset \cap\, \mathfrak{f}\, A_i$$

et d'autre part d'après (2)

$$\cap A_i \subset \mathfrak{f}\, (\cap A_i)$$

D'où la double inclusion :

$$\boxed{\cap A_i \subset \mathfrak{f}\,(\cap A_i) \subset \cap\, \mathfrak{f}\, A_i}$$

Si les A_i sont fermés, on a :

$$\forall_i : A_i = \mathfrak{f}\, A_i$$

et par suite l'égalité :

$$\cap A_i = \mathfrak{f}\,(\cap A_i)$$

Donc: $\cap A_i$ est invariant dans f, c'est un fermé.

Enfin, une union finie de fermés est un fermé; il suffit pour le montrer de prouver que l'union de deux fermés est un fermé. C'est évidemment la propriété (4) de f, celle qui porte sur $\cup$, qui nous servira.

En effet, si A et B sont fermés, on a par définition: f A = A, f B = B, donc (4) devient :

$$f\,(A \cup B) = A \cup B$$

et par suite $A \cup B$ est fermé.

Ainsi, se donner f (ou i) et ses propriétés équivaut à se donner $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{O}$) et définit une topologie sur E. Ajoutons qu'une fois que l'on a les fermés, le reste de la construction peut se faire soit comme dans la première manière, soit en définissant directement d'abord l'application i comme transmuée de f par complémentation :

$$i = c\, f\, c$$

et les ouverts comme parties invariantes dans i. La relation :

$$i\, c = c\, f$$

exprime alors qu'une partie est fermée si et seulement si sa complémentaire est ouverte.

Nous avons donc deux façons logiquement équivalentes de définir une topologie; les exemples que nous verrons dans le prochain paragraphe et dans la note de M. Eytan qui fait suite à cet exposé semblent bien montrer que c'est la seconde façon, la manière "opératoire" (par f ou i) qui soit la plus intéressante en vue d'une application éventuelle de la topologie aux Sciences Sociales.

Ajoutons qu'il y a une troisième façon, qui elle aussi pourrait être utile à ces Sciences, mais que je ne traiterai pas ici (peut-être cela fera-t-il l'objet d'un article ultérieur): c'est de partir de la notion de "voisinage" et d'une axiomatique convenable pour celle-ci.

Pour l'instant, disons simplement qu'en topologie générale, un voisinage d'un élément x de E est tout ensemble contenant un ouvert auquel x appartient; autrement dit, tout ensemble auquel x est intérieur (cette définition suppose que l'on ait préalablement défini les ouverts). Intuitivement, les voisinages permettront de généraliser le rôle primitif qu'ont joué les "intervalles ouverts" de la droite dans la description de la topologie de celle-ci qui a été donnée au paragraphe I.

V - TOPOLOGIE, LOGIQUES ET PSYCHOLOGIE ?

Il me reste quelques mots à dire sur les liens entre la topologie générale et certaines préoccupations des Sciences de l'Homme.

En logique, les logiques modales* sont, en partie, une illustration de ce que nous venons de voir. On sait que ces logiques utilisent trois opérateurs élémentaires:

- la négation n
- le nécessaire N
- le possible P

Ces opérateurs sont appliqués aux propositions, de façon à les qualifier de nécessairement vraies (ou fausses), ou de peut-être vraies (ou fausses), non nécessairement vraies (ou fausses), etc....

Traduisons: n = c (complémentation)
N = i (intérieur)
P = f (fermeture)

et: "proposition" = partie d'un ensemble.

Des relations fondamentales telles que :

$f\,X \supset X$, $X \supset i\,X$ se traduisent
$X \Longrightarrow CX$: si X est vrai, il est possible que X soit vrai
$NX \Longrightarrow X$: si X est nécessairement vrai, il est vrai, qui ont un sens et sont admises dans toutes les logiques modales; de même la monotonie de f, i :

$$X \supset Y \Longrightarrow i\,X \supset i\,Y$$

* Pour une définition précise de ces logiques, et un complément sur les aperçus qui suivent, voir la note de M. EYTAN "Topologie et Logique propositionnelle Modale".

a pour traduction :

$$(Y \Longrightarrow X) \Longrightarrow (NY \Longrightarrow NX)$$

(si Y implique X, alors si Y est nécessairement vrai, X est nécessairement vrai).

Les relations d'idempotence de N et P :

$$N^2 = N \qquad P^2 = P$$

sont elles aussi toujours admises dans les logiques modales, ainsi que la relation fondamentale liant c, f, i :

$$fc = ci \qquad cf = ic$$

qui se traduit :

$$Pn = nN \qquad nP = Nn$$

- S'il se peut que non-X, alors X n'est pas nécessaire, et réciproquement.
- Si X n'est pas possible, alors nécessairement non-X, et réciproquement.

Là s'arrête, semble-t-il, ce qu'il y a de commun entre topologie et logiques modales; toutes celles-ci, en effet, n'admettront pas l'idempotence des opérateurs NP et PN (i f et f i) :

$$NP\ NP = NP$$

et d'ailleurs, cela peut-il se dire? NP, c'est ce qui est nécessairement possible; NP NP = il est nécessairement possible qu'il soit nécessairement possible. Cette phrase est impossible (nécessairement)!

De même, sera-t-on d'accord pour dire que

$$P(X \vee Y) = PX \vee PY$$

ou, de façon équivalente :

$$N(X \& Y) = NX \& NY \ ?$$

Si (X ou Y) est possible, ou X, ou Y est possible, et réciproquement; si (X et Y) est nécessaire, X est nécessaire et Y est nécessaire, et réciproquement.

Si oui, la logique modale construite est un "modèle" de la topologie générale, et en particulier la relation : NP NP = NP y est vérifiée. Sinon, elle s'en écarte.

En psychologie, on peut également se demander si certains phénomènes ne relèvent pas de ce qui vient d'être dit. On pensera aux expériences dans lesquelles on donne au sujet des objets à comparer, par exemple d'après la perception que le sujet a de leur poids.

On donne au sujet une partie A des objets (ceux-ci constituent un ensemble E), et on lui demande de mettre à part tous les objets de E qui sont nettement moins lourds que ceux de A (c'est l'opération i), tous ceux qui sont nettement plus lourds (c'est l'opération e, extérieur); ceux qui restent constituent la frontière de A.

Il est douteux, dans l'exemple choisi, que le comportement du sujet vérifie l'idempotence : $i^2 = i$, $f^2 = f$; et pourra-t-on lui faire accomplir des expériences dans lesquelles on explorerait ce que sont fi, if, fif, etc...?

Il se peut cependant qu'il y ait, dans l'ensemble des phénomènes étudiés par le psychologue expérimental, des domaines pour lesquels les axiomes des opérations topologiques soient a priori admissibles, et pour lesquels soit concevable une expérimentation permettant de vérifier que les conséquences les plus immédiates de ces axiomes ne sont pas démenties par les faits. C'est au praticien de parler.

BIBLIOGRAPHIE

Pour une initiation intuitive à la topologie :

Visual Topology par W. LIETZMANN (Chatto & Windus 1965).

Pour un exposé axiomatique, mais s'appuyant sur l'intuition :

Introduction to Topology par M.J. MANSFIELD (Van Nostrand 1964).

Sur l'algèbre de Kuratowski :

Topologie par C. KURATOWSKI (2 vol. Panstwowe Wydawnietwo Naukowe, Varsovie 1958).

Cet ouvrage est un manuel en langue française très complet sur les diverses branches de la topologie (topologie générale, topologie algébrique). Il contient en outre, à la fin du volume I une note de A. MOSTOWSKI sur "Quelques applications de la Topologie à la Logique Mathématique".