MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 11 (1965), p. 25-27
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__11__25_0>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

QUELQUES EXERCICES A TRAITER SUR SIMPLEXES
(suite*)

Toujours sur le thème des objets simpliciaux, évoquons l'un des problèmes économiques les plus célèbres: le problème du commis voyageur. Il s'agit de trouver le plus court circuit entre n villes. Ici nous prendrons six villes.

On donne la table des distances - ou des coûts de passage de toute ville x vers toute ville y :

TABLE DES COUTS DE PASSAGE DE LA VILLE-LIGNE A LA VILLE-COLONNE

	a	b	c	d	e	j
a		2	2	7	2	1
b	2		4	8	3	1
c	3	3		6	9	8
d	5	7	6		7	4
e	2	4	8	7		2
f	1	1	9	4	3	

le circuit facdebf par exemple coûte

$$1 + 2 + 6 + 7 + 4 + 1 = 21.$$

Les données sont élémentaires. Disons tout de suite que le commis voyageur astucieux fera mieux, il ne dépensera que 18 unités.

On peut convenir que pour écrire un circuit - et pour en calculer le coût - on commence arbitrairement par la ville f, si bien que le circuit ci-dessus peut s'écrire simplement: a c d e b

D'une façon générale, il y a autant de circuits entre n villes qu'il y a de permutations à (n - 1) lettres.

Ceci étant dit, le problème n'est pas pour autant résolu. Comment isoler celle des (n - 1)! permutations qui est la plus courte? On ne connait pas d'algorithme de calcul efficace pour ce problème, d'où sa réputation. Proposons une méthode de calcul par récurrence sur simplexe, à laquelle on peut recourir, si n toutefois ne dépasse pas la vingtaine.

*Voir nos articles à la même rubrique dans les N°s 9 et 10 du bulletin.

Rappelons qu'on appelle simplexe S_n l'ensemble des 2^n parties d'un ensemble E de n lettres, organisées par la relation d'inclusion.

L'une des représentations les plus commodes de cette structure abstraite est le diagramme en flèches du type présenté ci-dessous, constitué de sommets représentant les 2^n parties de E, et de flèches telles ($X \longrightarrow Y$), signifiant que la partie Y est constituée des lettres de X et d'une autre lettre en plus.

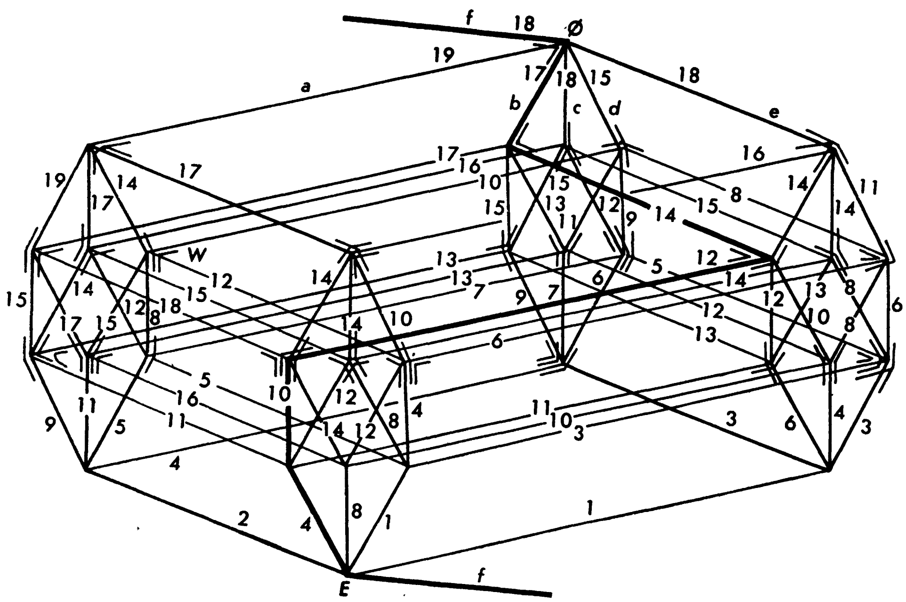
Toutes les flèches correspondant à l'adjonction de la même lettre seront dites équivalentes, et tracées parallèles sur le diagramme. Un tel diagramme en flèches s'appelle suivant les contextes, squelette d'hypercube à n dimensions, ou générateur du treillis simplicial à n lettres. Nous l'appellerons ici simplement S_n, comme le simplexe abstrait qu'il représente.

Intéressons-nous aux chemins qui, dans le diagramme en flèches S_n, joignent le pôle $\emptyset$ au pôle E, en empruntant, bien entendu, n flèches dans le bon sens. Il s'agit, remarquons-le sur un chemin particulier, de n flèches distinctes, vu que la flèche qui joint X à Y prescrit l'adjonction à la partie X d'une lettre qui n'est pas élément de X.
Un chemin $\emptyset$ E représente une permutation des n lettres de E.
Deux chemins $\emptyset$ E distincts représentent deux permutations distinctes.

Il existe un chemin qui représente toute permutation donnée.

Conclusion: l'ensemble des chemins $\emptyset$ E est une représentation de l'ensemble des permutations des éléments de E.

Pour revenir au commis voyageur, celui-ci trouvera sur le diagramme simplicial en flèches, S_5, tous les circuits possibles qu'il peut effectuer. Félicitons-nous de cette écriture relativement concise de 120 objets que l'on n'a pas habituellement le courage d'écrire. Adoptons-la comme feuille de calcul pour rechercher celui des 120 circuits qui est le plus court.



Feuille de calcul pour la recherche du plus court circuit entre six villes (le calcul procède par récurrence de E en $\emptyset$).

Notre problème est devenu un problème d'aiguillages. Il faut calculer, en tout sommet de S_5, et pour chaque flèche qui y arrive, la flèche optimale qui en part. On programmera ainsi les aiguillages de tous les sommets de S_5 en procédant par récurrence, d'un pôle à l'autre. On partira par exemple de E, puis on traitera les sommets de la génération 4 situés sur une même horizontale à 4 flèches de distance de $\emptyset$, puis les sommets de la génération 3, etc..

Les coûts optimaux de fin de circuits sont maintenant inscrits sur les flèches de S_5. Les données du calcul elles-mêmes n'ont pas été portées sur S_5.

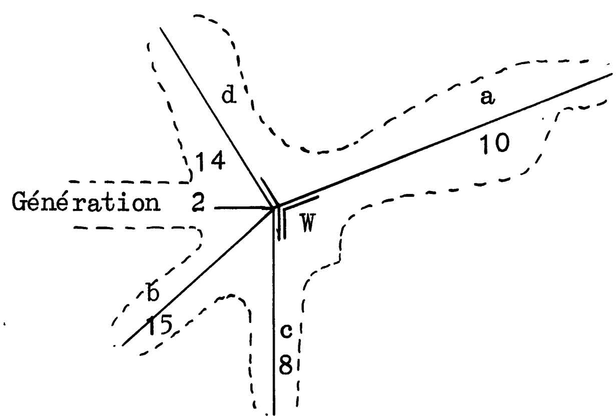
Indiquons par exemple comment procède la méthode au point marqué W.

En W, dont l'étiquette simpliciale est a, d , les villes a et d ont déjà été visitées.

Si la dernière visitée est d, j'arrive en W par d et:

soit je passe en b et ça me coûte 7, plus le coût de fin de programme soit le coût 15 qui a été calculé précédemment;

soit je passe en c et ça me coûte 6, plus le coût de fin de programme soit le coût 8 qui a été calculé précédemment.



Décisions en W d'aiguiller d sur c et a sur c.

Donc: une fois a visité, si je me trouve en d, je choisis le passage de d en c qui ne me coûte que 6 + 8 pour terminer mon cheminement. Sur la feuille de calcul j'inscris 14 sur la flèche d qui aboutit en W, et je marque à l'extrémité de cette flèche un aiguillage qui la branche sur la flèche c issue de W.

On calcule de même en W l'aiguillage optimal de la flèche a sur la flèche c.

Résultat: fbeacdf est, avec le coût 18, le circuit optimal.

Cette méthode n'est pas la seule pour résoudre le problème du commis voyageur, mais probablement l'une des plus rapides à l'heure actuelle.

P. ROSENSTIEHL.