MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

Qu'y a-t-il sur la couverture ? (feuilleton, quatrième épisode)

Mathématiques et sciences humaines, tome 11 (1965), p. 23-24
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__11__23_0>

QU'Y A-T-IL SUR LA COUVERTURE ?

(feuilleton, quatrième épisode)

Nos lecteurs nous auront compris: c'est par économie que la couverture de ce bulletin porte, quelle que soit la saison, le même dessin. Si nous étions moins pauvres, non seulement on pourrait changer de couleurs, comme font la nature végétale et les dames élégantes, mais le dessin lui-même devrait se transformer. C'est en effet un dessin dont la signification est mathématique: il ne faut donc pas s'arrêter aux détails, mais chercher l'architecture abstraite. Il faut, pour ainsi dire, voir d'un seul coup d'oeil tous les dessins analogues. Mais nous ne sommes pas riches et ne pouvons faire défiler la série des variantes imaginables: petit malheur, que pallie l'imagination de nos fidèles abonnés. Une autre façon de "voir" ce qu'il faut réellement voir: essayer de "dire". Ce pourrait être un exercice typiquement mathématique: essayer de transmettre, par téléphone, une figure géométrique; il faudrait bien savoir découvrir l'essentiel, et laisser de côté les accidents "insignifiants".

Dans les précédentes livraisons (N° 8, p.38; N° 9, p.39; N° 10, p.72) on a tâché d'orienter la recherche d'un tel discours descriptif. Il y a des lignes droites, au nombre de dix; en étant d'abord uniquement attentif à leur rôle essentiel de droites géométriques, on relève ce qui a bien des chances d'être voulu: droites concourantes par trois (il y a dix tels concours). Si l'on admet que ces convergences ne sont pas un hasard, c'est bien par là qu'il faut commencer: c'est sur cette architecture combinatoire que repose tout le reste, dont on parlera après (les couleurs soulignent des pentagones, les droites peuvent être, soit prolongées ce qui fait voir des faisceaux, soit au contraire limitées, de façon à dessiner des polygones, etc...).

Pour dire comment sont agencées les convergences remarquables, il faut nommer les lignes droites. Le lecteur qui a suivi notre feuilleton jusqu'à aujourd'hui sait comment tout dire en très peu de mots: 1°) Les droites sont étiquetées par un ensemble de deux symboles, deux lettres par exemple (on notera que ces étiquettes ne sont pas des "mots" au sens habituel, parce que l'ordre des lettres n'est pas significatif: ab et ba, désigneront la même ligne). 2°) Trois droites sont concourantes si leurs étiquettes ne font apparaître, ensemble, que trois lettres (ainsi ab, ac et bc) et seulement dans ce cas.

N'a-t-on pas envie de réfléchir à cette étonnante correspondance entre deux architectures combinatoires: l'une réalisée graphiquement par le moyen de traits rectilignes et l'autre par le moyen de combinaisons de lettres. Commençons par la dernière: on prend un ensemble de lettres qui sera l'alphabet et on établit la liste des combinaisons (ou parties, ou sous-ensembles) de deux éléments. On introduit ensuite une relation ternaire entre ces combinaisons. Cette relation peut être décrite de plusieurs façons équivalentes:

$$\text{cardinal } (A \cup B \cup C) = 3$$

A, B, C étant des parties telles que:

$$\text{card } (A) = \text{card } (B) = \text{card } (C) = 2$$

ou bien en utilisant la différence symétrique (ensemble des éléments qui ne figurent que dans un seul ensemble):

$$A \oplus B = C$$

ou plus équitablement:

$$A \oplus B \oplus C = \text{vide}$$

On pourrait donner une autre forme, encore plus "algébrique": soit l'alphabet: (a, b, c, d, e). On désignera la partie (a,b) par le vecteur (1, 1, 0, 0, 0) où 1 désigne la présence et 0 l'absence. Et on définit l'addition vectorielle comme l'addition des composantes de même place, en stipulant que: $1 + 0 = 1$, et: $1 + 1 = 0$. Alors la relation en vue s'écrit: $A + B + C = 0$; par exemple: $A = 11000$, $B = 10010$, $C = 01010$.

Quel que soit le mode d'écriture, il faut bien voir que cette relation est très simple et très maniable - on commencera par s'y exercer.

Alphabet de trois lettres: une seule relation $ab + ac + bc = 0$ (1)

quatre lettres: $ad + ac + cd = 0$ (2)

$ad + ab + bd = 0$ (3)

$bc + bd + cd = 0$ (4)

cinq lettres: six relations supplémentaires

$ae + ab + be = 0$ (5)

$ae + ac + ce = 0$ (6)

$ae + ad + de = 0$ (7)

$be + bc + ce = 0$ (8)

$be + bd + de = 0$ (9)

$ce + cd + de = 0$ (10)

et l'on peut continuer.

Ces architectures combinatoires étant définies en un langage quelconque (soit combinatoire traditionnel, soit ensembliste, soit algébrique) on peut en chercher des "réalisations". Il faut d'abord choisir des "éléments" ou les "ingrédients"; ce seront des couleurs, ou bien des notes musicales, etc... Puis on fabrique des "combinaisons" en associant <u>deux</u> éléments. Enfin des "mélanges" en juxtaposant <u>trois</u> combinaisons. Et parmi ces mélanges, certains seront distingués: ceux qui sont "équilibrés" en ce sens que les trois combinaisons ont, deux à deux, un élément commun.

Parmi toutes les réalisations possibles, Desargues nous a montré une réalisation géométrique: les combinaisons y sont des lignes droites, et les mélanges sont des faisceaux de trois droites convergentes. Pour fabriquer de telles configurations il suffit de prendre pour "éléments" des plans dans l'espace à trois dimensions, de voir "en relief", comme dit Bosse.

(à suivre)