MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

Qu'est-ce qu'un quantificateur ? Le point de vue de l'algèbriste

Mathématiques et sciences humaines, tome 10 (1965), p. 47-65

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__10__47_0>

M. EYTAN

QU'EST-CE QU'UN QUANTIFICATEUR ? LE POINT DE VUE DE L'ALGEBRISTE

Résumé :

On décrit la logique proportionnelle à partir de la notion de valeur logique. On passe ensuite à la logique propositionnelle déductive, dont un modèle algébrique fidèle est la structure d'algèbre de Boole. Puis vient la description de la logique fonctionnelle et de la logique fonctionnelle déductive; la structure algébrique représentative est celle d'algèbre monadique.

Depuis les Grecs la mathématique se veut déductive et rigoureuse. Or, on est en droit de se demander ce qui constitue une démonstration et ce qu'on entend par la rigueur. Répondre à cette question est le principal objectif de la Logique. Pour y parvenir elle utilise un langage mathématique; on la désigne alors par Logique mathématique. Survient alors l'algébriste : devant cet objet mathématique qu'est la Logique, il cède à son penchant naturel et essaye de la caractériser d'un point de vue purement algébrique. Suivre ses premiers pas dans cette voie sera notre but dans ces quelques pages.

1.- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

1.1.- Proposition. Valeur logique

Lorsque nous nous exprimons nous utilisons des phrases. Si l'on fait abstraction de la structure interne de la phrase, de sa forme grammaticale, etc., ne gardant comme caractéristique que sa vérité ou sa fausseté, on obtient la notion de proposition pouvant prendre les valeurs logiques "vrai" ou "faux". Une proposition est donc une unité indivise, un atome, susceptible d'être vraie (en abrégé V) ou fausse (en abrégé F). Désignons les propositions par des minuscules latines p, q, r... La valeur logique sera la valeur de la fonction ν qui à toute proposition p associe un des éléments de l'ensemble $\{V, F\}$ selon que p est vraie ou fausse resp. Ainsi soit p la proposition: "+ 2 est un entier négatif". Sa valeur logique sera: $\nu(p) = F$

1.2.- Opérations logiques, tables de vérité

Considérer les propositions prises isolément serait aussi peu utile que borner la Chimie à l'étude des atomes. Tout comme en Chimie, on a besoin de "composer" les propositions entre elles, c.à.d. associer à un certain nombre de propositions une nouvelle proposition.

Par exemple si p est la proposition:

"la fonction $f:x \leadsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur tout intervalle borné ne contenant pas un voisinage de 0";

et si q est la proposition:

"la fonction $f:x \leadsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur tout intervalle borné ne contenant pas un voisinage de 0".

Alors la proposition r:

"la fonction $f:x \leadsto \frac{1}{x^2}$ est continue <u>et</u> intégrable sur tout intervalle borné ne contenant pas un voisinage de 0"
se présente tout naturellement.

Si nous symbolisons r par: "p <u>et</u> q" alors l'opération qui au couple (p, q) associe "p et q" est une opération logique binaire. Remarquons cependant qu'une proposition est caractérisée par sa valeur logique; il est donc raisonnable d'imposer que les valeurs logiques de p et q déterminent celle de la proposition "p et q", et de façon générale celle du résultat d'une opération logique binaire quelconque portant sur le couple (p, q). Par exemple, il est raisonnable de postuler que "p et q" prenne la valeur V si et seulement si p et q prennent toutes deux la valeur V. Il en résulte que se donner la valeur logique du résultat d'une opération logique pour toutes les valeurs logiques des opérandes définit entièrement l'opération. D'où les définitions plus précises qui suivent.

Une opération logique n-aire est une loi de composition interne (portant sur n propositions) c.à.d. une application qui associe une proposition unique q au n-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ (où les p_i, $i = 1, 2, \ldots n$ sont des propositions), complètement définie par une loi de composition des valeurs logiques des n propositions p_i. La table de vérité correspondante est une table qui associe une valeur logique unique aux 2^n valeurs logiques possibles des p_i c.à.d. la table donnant la loi de composition des valeurs logiques des p_i.

Par exemple considérons l'opération logique binaire & définie par la table de vérité suivante:

(p_1, p_2)	p_1 & p_2
(V, V)	V
(V, F)	F
(F, V)	F
(F, F)	F

On reconnaît en p_1 & p_2 la proposition "p_1 et p_2".

1.3.- Opérations logiques usuelles

Nous n'allons pas considérer toutes les opérations logiques possibles, une opération n-aire donnant lieu à 2^{2^n} tables de vérité possibles, ce nombre étant donc considérable.

On va se borner en fait à une opération unaire et trois opérations binaires.

1.31.- LA NÉGATION: C'est une opération unaire (1) $p \rightsquigarrow \neg p$ définie par la table de vérité ci-dessous:

p	$\neg p$
V	F
F	V

$\neg p$ (qu'on lit "non-p") est donc vraie si et seulement si p est fausse, c'est la négation de p au sens ordinaire du mot.

1.32.- LA CONJONCTION: C'est l'opération binaire & donnée en exemple plus haut.

1.33.- LA DISJONCTION: C'est l'opération binaire $(p_1, p_2) \rightsquigarrow p_1 \delta p_2$ définie par la table de vérité:

(p_1, p_2)	$p_1 \delta p_2$
(V, V)	V
(V, F)	V
(F, V)	V
(F, F)	F

$p_1 \delta p_2$ est donc vraie si au moins l'une des deux propositions p_1, p_2 est vraie. On la lit "p_1 ou p_2", le ou n'étant pas exclusif (p_1 ou p_2 ou les deux).

1.34.- L'IMPLICATION: C'est l'opération binaire $(p_1, p_2) \rightsquigarrow p_1 \supset p_2$ définie par la table de vérité:

(p_1, p_2)	$p_1 \supset p_2$
(V, V)	V
(V, F)	F
(F, V)	V
(F, F)	V

$p_1 \supset p_2$ est donc toujours vraie sauf si p_1 est vraie et p_2 est fausse. On la lit "p_1 implique p_2", et elle a le sens intuitif qu'on donne à l'implication(2) à ceci près qu'une proposition fausse implique n'importe quelle proposition, que cette dernière soit vraie ou fausse.

1.4.- Expressions logiques

En itérant plusieurs fois chacune des opérations logiques définies ci-dessus, ou en les combinant entre elles, on obtient une expression logique.

(1) Ou encore "unitaire".

(2) "Si p_1 alors p_2".

Par exemple: $(p \& q) \& r$
$(\neg p)\ \delta\ q$
$(p \supset q) \& (q \supset p)$

sont des expressions logiques.

Plus précisément on peut définir de façon récurrente les expressions logiques de la façon suivante:

a) p, $\neg q$, $p \& q$, $p\ \delta\ q$, $p \supset q$ sont des expressions logiques;

b) Si X est une expression logique, $\neg X$ est une expression logique;

c) Si X et Y sont des expressions logiques,
$X \& Y$, $X\ \delta\ Y$, $X \supset Y$ sont des expressions logiques;

d) les seules expressions logiques sont celles données par les critères a), b), c).

Par exemple, soit Z l'expression: $p \& (q \& (\neg r))$ qui est de la forme:
$p \& Y$ où Y est $q \& (\neg r)$

Or $q \& (\neg r)$ est de la forme $q \& X$ où X est $\neg r$.

X est une expression logique en vertu de a);

Y l'est en vertu de c), donc $p \& Y$ l'est aussi en vertu de c), c.à.d. Z l'est aussi.

Par contre $\neg (\& p)$ n'est pas une expression logique car $\& p$ ne l'est pas.

1.5.- Tautologie et contradiction. Equivalence logique

Par la façon même dont on a défini les opérations logiques usuelles, nous savons calculer la valeur logique de leur résultat. On pourra donc, de proche en proche, calculer la valeur logique ν (X) de toute expression logique X, étant donné la valeur logique de ses constituants (propositions dont est formé X par les règles a), b), c), du § 1.4). On pourra par exemple dresser la table de vérité de X de proche en proche.

Reprenons l'expression logique: $p \& (q \& (\neg r))$ désignée par Z

(p, q, r)	$\neg r$	$q \& (\neg r)$	$p \& (q \& \neg r)$
(V, V, V)	F	F	F
(V, V, F)	V	V	V
(V, F, V)	F	F	F
(V, F, F)	V	F	F
(F, V, V)	F	F	F
(F, V, F)	V	V	F
(F, F, V)	F	F	F
(F, F, F)	V	F	F

Pour calculer la valeur logique de Z on a cherché ses constituants, dressé les $2^3 = 8$ possibilités des valeurs logiques du triplet (p, q, r) puis calculé de proche en proche, en se servant du § 1.3, les valeurs logiques des expressions partielles constituant Z.

1.51.- TAUTOLOGIE: Soit une expression logique X, p_1, p_2, ..., p_n ses constituants. On dira que X est une tautologie si $v(X) = V$ quelles que soient les valeurs logiques de p_1, p_2, ..., p_n. Autrement dit une expression logique est une tautologie si elle est vraie quelles que soient les valeurs de ses constituants. Si on dresse la table de vérité de X on reconnaîtra que c'est une tautologie au fait que la colonne X ne comporte que des V.

Par exemple soit X l'expression $p \, \delta \, (\neg p)$. La table de vérité de X est:

p	$\neg p$	$p \, \delta \, (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

Donc X est une tautologie. Par contre l'expression Z vue plus haut n'est pas une tautologie.

Quel est le sens intuitif d'une tautologie? L'énoncé qu'elle représente ne fournit aucun renseignement sur les valeurs logiques à donner à ses propositions constituantes pour qu'elle soit vraie, puisque de toute façon cet énoncé est toujours vrai. Mais c'est justement là tout son intérêt: une tautologie est vraie par sa forme même, indépendamment de tout contenu; or la Logique s'intéresse au formel, indépendamment du contenu. La recherche des tautologies est donc une des tâches de la Logique propositionnelle.

1.52.- CONTRADICTION: de même qu'une tautologie était une expression logique toujours vraie, une contradiction Y est une expression logique toujours fausse. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que Y soit de la forme $\neg X$, où X est une tautologie. Ceci résulte immédiatement de la considération de la table de vérité de Y et de X.

Par exemple on a vu que $p \, \delta \, (\neg p)$ est une tautologie; donc $\neg (p \, \delta (\neg p))$ est une contradiction.

Autre exemple: $p \, \& \, (\neg p)$ est une contradiction. Pour le voir, dressons sa table de vérité:

p	$\neg p$	$p \, \& \, (\neg p)$
V	F	F
F	V	F

1.53.- ÉQUIVALENCE LOGIQUE: Soient X et Y deux expressions logiques. On dira que X est logiquement équivalent à Y, et on le notera $X \equiv Y$, si l'expression $(X \supset Y) \, \& \, (Y \supset X)$ est une tautologie, c.à.d. lorsque X implique Y et Y implique X quels que soient les valeurs de leurs constituants.

On vérifie sans peine (et le lecteur pourra s'y exercer avec profit) que:

a) $X \equiv X$ quelle que soit l'expression logique X;

b) si $X \equiv Y$ alors $Y \equiv X$ quelles que soient X et Y;

c) si $X \equiv Y$ et $Y \equiv Z$ alors $X \equiv Z$ quelles que soient X, Y, Z.

Ainsi l'équivalence logique est une relation d'équivalence. Intuitivement elle signifie que deux expressions logiques équivalentes sont toutes deux simultanément vraies ou simultanément fausses.

Du point de vue formel, qui est celui de la Logique, on peut donc les confondre.

Voici quelques résultats:

(1) $p \equiv (\neg(\neg p))$;

(2) $(p \,\delta\, p) \equiv p \qquad (p \,\&\, p) \equiv p$ (idempotence);

(3) $(\neg (p \,\delta\, q)) \equiv ((\neg p) \,\&\, (\neg q)) \qquad (\neg (p \,\&\, q)) \equiv ((\neg p) \,\delta\, (\neg q))$ (lois de Morgan);

(4) $(p \,\delta\, q) \equiv (q \,\delta\, p) \qquad (p \,\&\, q) \equiv (q \,\&\, p)$ (commutativité);

(5) $(p \,\delta\, (q \,\delta\, r)) \equiv ((p \,\delta\, q) \,\delta r) \qquad (p \,\&\, (q \,\&\, r)) \equiv ((p \,\&\, q) \,\&\, r)$; (associativité);

(6) $(p \,\delta\, (q \,\&\, r)) \equiv ((p \,\delta q) \,\&\, (p \,\delta\, r)) \qquad (p \,\&\, (q \,\delta\, r)) \equiv ((p \,\&\, q) \,\delta\, (p \,\&\, r))$ (distributivité);

(7) $(p \supset q) \equiv ((\neg p) \,\delta\, q)$;

(8) $(p \,\&\, q) \equiv \neg ((\neg p) \,\delta\, (\neg q))$;

(9) s'il y a un s tel que $(p \,\delta\, (\neg q)) \equiv (s \,\delta\, (\neg s))$, alors $(p \,\delta\, q) \equiv p$;

(10) si $(p \,\delta\, q) \equiv p$ alors $(p \,\delta\, (\neg q)) \equiv (s \,\delta\, (\neg s))$ pour tout s;

(11) si $p \equiv q$ alors $(\neg p) \equiv (\neg q)$;

(12) si $p \equiv q$ alors $(p \,\delta\, r) \equiv (q \,\delta\, r)$;

"quels que soient p, q, r".

L'ensemble de toutes les expressions logiques (considérées comme indiscernables si elles sont logiquement équivalentes), muni des opérations logiques que nous avons définies (qui d'après (7) et (8) peuvent se ramener à la négation et la disjonction), constituent la Logique propositionnelle. L'étude de la Logique propositionnelle consiste essentiellement, nous l'avons dit (1), en la recherche des tautologies. Cependant, procéder comme nous l'avons fait jusqu'ici, par l'étude des tables de vérité, est fastidieux. Le moyen de trouver les tautologies nous est donné par la déduction, vers laquelle nous nous tournons maintenant, en accentuant encore plus le caractère formel de ce que nous faisons.

2.- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE DEDUCTIVE

Nous allons partir d'expressions primitives, ou atomes, que nous allons composer entre elles par des opérations pour obtenir des expressions, construites suivant certaines règles. D'autre part, on va poser un ensemble de thèses primitives ou axiomes, ce seront des tautologies particulières, et des règles de déduction permettant de dériver toutes les autres tautologies appelées théorèmes ou thèses.

2.1.- Atomes

On se donne un ensemble $S = \{p, q, r, \dots\}$ d'atomes représentant des propositions.

(1) Cf. § 1.51.

2.2.- Opérations

On se donne les opérations $\neg$, &, δ, $\supset$ (en fait on sait bien que $\neg$ et δ suffiraient (1), mais le fait de se donner les deux autres opérations allège l'écriture) c.à.d. des symboles n'appartenant pas à S et qui serviront à former les expressions (cf. ci-dessous).

2.3.- Expressions, critères de formation

On forme des expressions par des assemblages (c.à.d. des suites d'éléments de S et d'opérations juxtaposés) d'après les critères suivants, dits critères de formation (2) :

F1 - tout élément p de S est une expression;

F2 - si X est une expression $\neg X$ est une expression;

F3 - si X et Y sont des expressions, $X \& Y$, $X \delta Y$, $X \supset Y$ sont des expressions;

F4 - les seules expressions sont les assemblages formés d'après les critères F1, F2, F3.

2.4.- Axiomes (3)

A1 - $(p \delta p) \supset p$

A2 - $p \supset (p \delta q)$

A3 - $(p \delta q) \supset (q \delta p)$

A4 - $(p \supset q) \supset \Big((r \delta p) \supset (r \delta q)\Big)$

On reconnaît là des tautologies particulières. Les autres s'en déduiront par les critères de déduction.

2.5.- Critères de déduction

D1 - A1, A2, A3, A4 sont des thèses (4);

D2 - si Y désigne X, alors $X \supset Y$ est une thèse et $Y \supset X$ est une thèse;

D3 - si X est une thèse et si $X \supset Y$ est une thèse, Y est une thèse aussi;

D4 - les seules thèses sont celles obtenues par les critères D1, D2, D3.

On voit aisément que le critère capital est D3, dit règle d'inférence ou de détachement; c'est lui qui permet de progresser en augmentant la liste des thèses.

---

(1) Cf. les équivalences (7), (8), § 1.53.

(2) En toute rigueur, il faudrait aussi énoncer les règles ou critères de substitution de variables. Nous laisserons ce point de côté. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [DMF].

(3) Cf. [GTL] et [AL]

(4) Les thèses sont des tautologies.

2.6.- Démonstration

Toute suite d'expressions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ telle que X_1 soit une thèse et que X_{i+1} s'obtienne à partir de X_i par un critère de déduction ($i=1, \ldots n-1$) est une démonstration de X_n. Procéder de la sorte alourdirait cependant les textes. Aussi établit-on à partir de théorèmes déjà déduits, de nouvelles règles d'inférence que l'on utilise ensuite au même titre qu'un des critères D. Par exemple:

	$(p \supset q) \supset ((r \,\delta\, p) \supset (r \,\delta\, q))$	A4
	$(p \supset q) \supset ((\neg s) \,\delta\, p) \supset ((\neg s) \,\delta\, q))$	$\neg$ s remplace r
	$(p \supset q) \supset ((s \supset p) \supset (s \supset q))$	$u \supset v$ désigne $(\neg u) \,\delta\, v$
(i)	$((p \,\delta\, p) \supset p) \supset ((p \supset (p \,\delta\, p)) \supset (p \supset p))$	$p \,\delta\, p$ remplace p, p remplace q, s
	$(p \,\delta\, p) \supset p$	A1
	$(p \supset (p \,\delta\, p)) \supset (p \supset p)$	D3 appliqué à (i) et A1
(ii)	$p \supset (p \,\delta\, q)$	A2
(iii)	$p \supset (p \,\delta\, p)$	q remplacé par p
	$p \supset p$	D3 appliqué à (ii) et (iii)
(iv)	$(\neg p) \,\delta\, p$	signification de $\supset$ en termes de $\neg$ et δ
(v)	$((\neg p) \,\delta\, p) \supset (p \,\delta\, (\neg p))$	A3 avec $\neg p$ au lieu de q
(vi)	$p \,\delta\, (\neg p)$	D3 appliqué à (iv) et (v)

On reconnait sur cette dernière formule le célèbre principe du tiers exclu.

$(\neg q) \,\delta\, (\neg (\neg q))$	$\neg$ q remplace p dans (vi)
$q \supset (\neg (\neg q))$	signification de $\neg$ et δ en termes de $\supset$

On reconnait partiellement le principe de double négation.

3.- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE DEDUCTIVE ET ALGEBRE DE BOOLE

3.1.- Algèbre de Boole (1)

On appelle algèbre de Boole la donnée d'un ensemble B, muni d'une opération unaire $p \leadsto p'$ et d'une opération binaire $(p, q) \leadsto p \vee q$ vérifiant les axiomes suivants (2):

B0 – B contient au moins deux éléments;

B1 – $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$;

B2 – $p \vee q = q \vee p$;

B3 – s'il y a un s tel que $p \vee q' = s \vee s'$ alors $p \vee q = p$;

B4 – si $p \vee q = p$ alors $p \vee q' = s \vee s'$ pour tout s;
quels que soient p, q, r.

(1) Cf. [LBA]
(2) Il y a beaucoup d'autres systèmes d'axiomes possibles, celui-ci est commode pour notre exposé.

On pose alors:

(1) $u \vee u' = 1 \quad u \wedge u' = 0$ (ces éléments sont indépendants de u)

(2) $p \wedge q = (p' \, b \, q')'$

(3) $(p \longrightarrow q) = p' \vee q$

et on montre que les propriétés suivantes sont vérifiées:

(4) $0' = 1$ $\qquad 1' = 0$

(5) $p \wedge 0 = 0$ $\qquad p \vee 1 = 1$

(6) $p \wedge 1 = p$ $\qquad p \vee 0 = p$

(7) $p \wedge p' = 0$ $\qquad p \vee p' = 1$

(8) $(p')' = p$

(9) $p \wedge p = p$ $\qquad p \vee p = p$

(10) $(p \wedge q)' = p' \vee q'$ $\qquad (p \vee q)' = p' \wedge q'$

(11) $p \wedge q = q \wedge p$ $\qquad p \vee q = q \vee p$

(12) $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$ $\qquad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

(13) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $\qquad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

quels que soient $p, q, r \in B$.

Exemple d'une algèbre de Boole: l'ensemble B des parties d'un ensemble E, où "p'" est le complémentaire de la partie p de E, "$p \vee q$" est l'union $p \cup q$ de p et q, "$p \wedge q$" est leur intersection $p \cap q$, 0 est l'ensemble vide $\emptyset$, 1 l'ensemble E tout entier.

3.2.- Algèbre de Boole libre

Les éléments d'une algèbre de Boole satisfont à diverses conditions algébriques (par exemple les axiomes B1, B2, B3, B4) du seul fait qu'ils appartiennent à une algèbre de Boole. Si les éléments d'une partie S de B ne satisfont pas à d'autres conditions que celles qui découlent nécessairement des axiomes, on dit qu'elle est libre. Ceci est valable en particulier lorsque S = B et l'algèbre est alors dite libre. Schématiquement on peut dire que les éléments de S ne satisfont à aucune condition spéciale c.à.d. qu'on peut les plonger dans une algèbre de Boole quelconque, de façon arbitraire, et sans risque de contradiction.

Pour exprimer ceci de façon précise, nous allons supposer que S engendre B, c.à.d. B est la plus petite algèbre de Boole contenant S, ou encore B est l'ensemble de toutes les expressions que l'on peut former avec les opérations ', et v appliquées autant de fois que l'on voudra aux éléments de S.

Un ensemble de générateurs S de B sera dit libre si toute application de S à une algèbre de Boole quelconque A peut-être étendue à un homomorphisme (application conservant les opérations ' et v de chacune des algèbres) de B dans A. En d'autres termes S est libre si toute application g de S dans une algèbre de Boole A quelconque admet une extension f unique qui applique B dans A de façon que:

$$\begin{cases} f(p') = (f(p))' \\ f(p \vee q) = f(p) \vee f(q) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad f(r) = g(r) \quad \text{pour tout } r \in S.$$

L'algèbre de Boole B est dite libre si elle possède un ensemble de générateurs libre S.

On peut schématiser cette définition par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\mathbb{1}"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, dashed, "f"] \\ & A \end{tikzcd}$$

$\mathbb{1}$ est la fonction identique définie par E à valeurs dans B, et telle que:

$\mathbb{1}(p) = p$ pour tout $p \in E$.

Ceci exprime le fait que E est une partie de B. g est une application quelconque de E dans A; f est l'extension de g dont il est question dans la définition. On l'a indiquée en pointillé, car elle "complète" le diagramme qui est commutatif au sens que $(f \circ \mathbb{1})(p) = g(p)$ pour tout $p \in E$. Enfin pour indiquer que E engendre B (ce qui n'est pas indiqué par le diagramme), on peut exiger l'unicité de f.

<u>Remarque</u>: pour les algèbres de Boole non libres, cf [A L]. Du point de vue de la Logique, une algèbre de Boole liée provient d'une libre par adjonction de tautologies supplémentaires, par exemple du type: "si (x_n) est une suite de Cauchy de nombres réels, cette suite à une limite réelle".

3.3.- Rapports avec la logique propositionnelle

Remplaçons dans le § 1.53. $\equiv$, $\neg$, &, δ, $\supset$ par $=$, $'$, $\wedge$, v, $\longrightarrow$ respectivement. Les propriétés exposées au § 1.53. deviennent celles du § 3.1. selon la table de concordance:

§ 1.53.	§ 3.1.
(1)	(5)
(2)	(6)
(3)	(7)
(4)	(8) ou B2
(5)	(9) ou B1
(6)	(10)
(7)	(12)
(8)	(11)
(9)	B3
(10)	B4
(11)	compatibilité de $\equiv$ avec '
(12)	" de $\equiv$ avec v

Ainsi, algébriquement, la logique propositionnelle est une algèbre de Boole, à une question de notation près, et cette algèbre de Boole est libre, car les propriétés (1) à (12) du § 1.53. sont des conséquences des seuls axiomes. Bien plus, on a ainsi un procédé de construction d'une algèbre de Boole **E** libre, et un théorème d'existence: il suffit de partir de l'ensemble **E** de lettres, de former toutes les expressions au moyen des opérateurs ' et v, puis de "passer au quotient" en confondant des éléments décrétés "égaux", tels $p \wedge q$ et $q \wedge p$ (qui, a priori, étaient distincts). Comment passer au quotient ? Autrement dit, comment décrire la relation d'équivalence particulière qu'est l'équivalence logique ? Si l'on se réfère à la manière traditionnelle de faire en algèbre (par exemple dans l'étude des anneaux), on voit que la procédure est la suivante: on se donne d'abord une classe d'équivalence spéciale (le noyau) et une opération particulière (la "soustraction"). Puis, on dit que deux éléments sont équivalents si et seulement si leur différence appartient au noyau. On peut procéder de façon tout à fait analogue pour l'équivalence logique. Afin de comprendre le choix du noyau et de l'opération de "soustraction", remarquons qu'une expression logique de la forme $p \wedge p'$ (ou, en notation du § 1, $p \& (\neg p)$) est une contradiction; donc $(p \wedge p')'$ est une tautologie. Le noyau est la classe d'équivalence de cette tautologie particulière (les éléments du noyau sont encore appelés des tautologies). On montre que le noyau est indépendant du choix de la proposition p. L'opération de "soustraction" est celle qui aux expressions logiques X et Y associe l'expression $(X \wedge Y')' \wedge (X' \wedge Y)'$ soit $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ ("X si et seulement si Y"). Pour que les expressions logiques T et U soient équivalentes il faut et il suffit que $(T \rightarrow U) \wedge (U \rightarrow T)$ soit une tautologie c.à.d. appartienne au noyau.

Mais on aurait pu s'y prendre autrement: on aurait pu faire la liste complète de toutes les tautologies, et définir l'équivalence à partie des tautologies en formant $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$. Bien entendu il n'est pas question de faire effectivement la liste au sens usuel du mot, elle est infinie. Mais on peut s'y prendre habilement pour décrire cette liste complètement en un nombre fini de mots. Pour cela on donne une petite liste de tautologies spéciales, avec quelques règles permettant d'en produire facilement d'autres. Les tautologies spéciales ne sont autres que les axiomes A1 à A4 décrits au paragraphe 2.4., et les règles de fabrication des autres tautologies sont les critères de déduction du § 2.5., qui se réduisent en fait à la seule règle D3. Ainsi la logique propositionnelle déductive n'est pas autre chose que la description de la procédure constructive permettant d'obtenir une algèbre de Boole libre.

Bien entendu, on aurait pu choisir d'autres axiomes et d'autres critères de déduction (1), mais ce qu'on obtient finalement est toujours une algèbre de Boole libre, qui est donc une image algébrique fidèle de la logique propositionnelle déductive (2).

4.- LOGIQUE FONCTIONNELLE

4.1.- Structure de la proposition, individus, prédicats

Dans le § 1 nous étions convenus de considérer la proposition comme un tout indivisible, un atome. Cependant lorsqu'on désire pousser l'analyse un peu plus

(1) Ils sont dus à Hilbert et Ackermann cf. [GTL]

(2) Pour les algèbres de Boole non libres et les théories logiques avec axiomes cf. [AL]

loin, il faut bien en arriver à une analyse de la proposition. Considérons par exemple la proposition:

"les points A, B sont situés entre les points B, C".

On peut y distinguer deux espèces d'objets:

a) des objets susceptibles d'être liés par la proposition: ce sont les individus (il peut n'y en avoir qu'un seul), tels "A", "B", "C", "D";

b) des objets susceptibles de lier les individus dans la proposition: ce sont les prédicats tels "... sont situés entre...".

De même la proposition:
"l'entier a divise l'entier b" est une proposition où les individus sont a et b, le prédicat étant: "... divise ...".

4.2.- Fonction propositionnelle, propriétés, relations

D'après le paragraphe précédent, nous voyons que la structure d'une proposition peut être schématisée sous la forme f (a, b, c, ...); constituée par l'assemblage d'un prédicat f et des individus a, b, c, ... On est donc amené à considérer des fonctions f qui aux individus x, y, z, ..., associent la proposition f (x, y, z, ...). Une telle fonction est une fonction propositionnelle. Par un abus de langage habituel on appelle aussi fonction propositionnelle la valeur f (x, y, z, ...) prise par f pour les individus x, y, z, ... En fait il est à noter que x, y, z, ... ne sont pas à proprement parler des individus, mais des variables d'individus c.à.d. des lettres indéterminées auxquelles on peut substituer des individus.

Lorsque la fonction f(x) est une fonction d'une seule variable on l'appelle une propriété. Ainsi si f(x) désigne "x est un entier pair", alors f(x) est une propriété.

Par contre lorsque la fonction f(x, y, z, ...) est une fonction de plusieurs variables, on l'appelle une relation (n-aire si elle porte sur n arguments). Par exemple si f(x, y, z) est la proposition "y est entre x et z" alors f(x, y, z) est une relation ternaire.

La logique fonctionnelle n'est rien d'autre que l'étude des fonctions propositionnelles.

4.3.- Quantification

Soit la fonction propositionnelle (1) "x est mortel" que nous désignerons par f(x). On peut alors être amené à considérer la proposition" pour tout x, x est mortel" (ou "tous les individus sont mortels"). Cette proposition est liée, bien entendu, à f(x). On dit qu'elle s'obtient à partir de f(x) par quantification universelle et on la note $\forall$ x f(x).

De façon générale on appelle quantificateur universel le symbole $\forall$ qui, à la fonction propositionnelle f(x) associe la proposition "pour tout x, f(x)".

---

(1) Le domaine de définition de f(x) étant les individus vivants.

Bien entendu, on peut, au lieu d'une propriété f(x), quantifier une relation n-aire f(x, y, z, ...) et obtenir la proposition $\forall x \forall y \forall z \ldots f(x, y, z, \ldots)$ qui se lit "pour tout x, tout y, tout z, ... f(x, y, z,...)".

Remarquons que la proposition $\forall x\, f(x)$ ne contient plus la variable x (1) qui est dite <u>liée</u> ou muette. Ainsi si f(x) désigne "x est mortel", alors $\forall x\, f(x)$ désigne "tout individu est mortel", qui bien entendu ne contient plus x. De même $\forall x \forall y\, f(x, y)$ ne contient plus ni x ni y.

En mathématique il arrive souvent que l'on ait affaire à des variables liées, ainsi x est lié dans l'expression $\int_a^b F(x)\, dr$, x et y sont liés dans l'expression $\lim_{x \to o} \lim_{y \to o} \frac{\delta^2 F(x,y)}{\delta x\, \delta y}$ (F est une fonction numérique de une ou deux variables respectivement), i est lié dans $\sum_{i=o}^{n} a^i$.

Reprenons la fonction propositionnelle "x est mortel" désignée par f(x). On peut être amené à lui associer la proposition "il y a au moins un individu mortel" (ou "pour au moins un x, x est mortel") que l'on note $\exists x\, f(x)$. On dit qu'elle est obtenue de f(x) par quantification existentielle.

De façon générale on appele <u>quantificateur existentiel</u> le symbole $\exists$ qui à la fonction propositionnelle f(x) associe la proposition "pour au moins un x, f(x)" notée $\exists x\, f(x)$.

On définira de façon analogue la proposition $\exists x \exists y \exists z \ldots f(x, y, z, \ldots)$ à partir de la relation f(x, y, z, ...) et on se rendra compte que dans cette proposition x, y, z, ... sont des variables <u>liées</u>. En particulier $\exists x\, f(x)$ ne contient pas x.

Dans tout ce qui suit, et pour simplifier très considérablement, on ne s'occupera plus que des propriétés, laissant de côté les relations. Disons néanmoins que la théorie (logique et algébrique) existe et est parfaitement au point. On renvoie le lecteur intéressé à [AL] et [DMF].

4.4.- Etude de la logique fonctionnelle

A partir du moment où l'on a défini les fonctions propositionnelles et les quantificateurs, on peut définir, tout comme pour la logique propositionnelle, la notion d'opérateur fonctionnel, d'expression fonctionnelle (extensions des notions d'opérateur logique et d'expression logique), celle de l'identité logique (extention de la tautologie) etc. cf. § 5.

Ce qu'il y a de neuf, par contre, ce sont les propriétés des quantificateurs. On peut montrer que, parmi d'autres, les relations suivantes sont intuitivement vraies (on utilise pour les opérations la notation des algèbres de Boole, avec la correspondance indiquée au § 3.3. entre écriture booléenne et le symbolisme du § 1):

(1) $(\forall x\, f(x)) \longrightarrow f(x)$
(2) $f(x) \longrightarrow (\exists x\, f(x))$
(3) $(\forall x\, f(x))' = \exists x\, (f(x))'$
(4) $(\exists x\, f(x))' = \forall x\, (f(x))'$

(1) Ou plus exactement la variable x est une variable factice que l'on peut remplacer par toute autre variable (ou même par un blanc) ayant le même domaine de variation que x.

5.- LOGIQUE FONCTIONNELLE DEDUCTIVE

Nous allons esquisser brièvement l'étude de la logique fonctionnelle déductive (limitée aux propriétés $f(x)$, fonctions propositionnelles d'une seule variable) sur le modèle de ce qui a été construit pour la logique propositionnelle déductive.

5.1.- Atomes

On se donne:

a) des variables de propositions $p, q, r, \ldots$;

b) des variables d'individus $x, y, z, \ldots$;

c) des variables de fonctions $f, g, h, \ldots$.

Les lettres des classes b) et c) interviennent sous la forme $f(x)$, $g(y)$, $h(g)$, ... dits éléments fonctionnels. Les atomes sont les variables de propositions et les éléments fonctionnels.

5.2.- Opérateurs

On se donne les signes $'$, $\vee$, $\wedge$ et $\longrightarrow$ qui sont les opérateurs (ces signes n'étant pas des atomes).

5.3.- Quantificateurs

On se donne les symboles:

a) $\forall$ quantificateur universel;

b) $\exists$ quantificateur existentiel:

(distincts des atomes et des opérateurs).

5.4.- Critères de formation des expressions

Des expressions sont formées d'après les critères suivants (où intuitivement une variable libre est une variable non liée, c.à.d. une vraie variable):

F1 - a) p, q, r sont des expressions ne contenant aucune variable, libre ou liée;

b) $f(x), f(y), \ldots, g(x), g(y), \ldots, h(x), h(y), \ldots$ sont des expressions contenant les variables libres $x, y, \ldots$;

F2 - si X est une expression, X' est une expression contenant les mêmes variables, libres ou liées, que X;

F3 - si X, Y sont des expressions telles qu'aucune variable ne soit à la fois libre en l'une et liée en l'autre, $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \longrightarrow Y$ sont des expressions contenant les mêmes variables, libres ou liées, que X, Y;

F4 - si $X(x)$ est une expression contenant la variable libre x, $\forall x\, X(x)$ et $\exists x\, X(x)$ sont des expressions contenant la variable liée x et, par ailleurs, les mêmes variables, libres ou liées, que $X(x)$;

F5 - les seules expressions et les seules variables, libres ou liées, contenues dans une expression sont celles obtenues par application des critères F1, F2, F3, F4 (1).

5.5.- Opérateurs et quantificateurs primitifs

On peut, nous le savons, définir les opérateurs $\wedge$ et $\longrightarrow$ en fonction des seuls opérateurs $'$ et v qui seront, pour cette raison, dits primitifs; si on ne le fait pas systématiquement, c'est pour ne pas alourdir les écritures. De même la relation (3) du § 4.4. montre que le quantificateur universel $\forall$ peut se définir à partir du quantificateur existentiel $\exists$ qui est donc dit primitif.

5.6.- Axiomes

A1 - $(p \vee p) \longrightarrow p$;

A2 - $p \longrightarrow (p \vee q)$;

A3 - $(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$;

A4 - $(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((r \vee p) \longrightarrow (r \vee q))$;

A5 - $\forall x\, f(x) \longrightarrow f(y)$;

A6 - $f(y) \longrightarrow \exists x\, f(x)$;

5.7.- Critères de déduction

D1 - A1, A2, A3, A4, A5, A6 sont des thèses;

D2 - si Y désigne X, $X \longrightarrow Y$ est une thèse et $Y \longrightarrow X$ est une thèse;

D3 - si X est une thèse et si $X \longrightarrow Y$ est une thèse, Y est une thèse;

D4 - si x ne figure pas dans X et si $X \longrightarrow Y(x)$ est une thèse, $X \longrightarrow \forall x\, Y(x)$ est une thèse;

D5 - si x ne figure pas dans Y et si $X(x) \longrightarrow Y$ est une thèse, $\exists x\, X(x) \longrightarrow Y$ est une thèse;

D6 - les seules thèses sont celles formées à partir des critères D1, D2, D3, D4, D5.

6.- ALGEBRE MONADIQUE

On va se donner une image algébrique des notions définies au § 4. Le modèle du § 3 ne convient plus, en effet, dès que l'on introduit les quantificateurs.

(1) Nous laissons de côté, à nouveau, l'importante question des critères de substitution cf. [DMF]

6.1.- Fonctions propositionnelles

Les fonctions propositionnelles sont des fonctions dont les valeurs sont des propositions c.à.d. les éléments d'une algèbre de Boole B. Autrement dit, une fonction propositionnelle est une fonction définie sur un ensemble non vide quelconque X (dont les éléments sont en fait les individus dont se préoccupent les propositions de la théorie considérée) et à valeurs dans une algèbre de Boole B.

Soit A l'ensemble des applications de X sans B. On peut alors munir A, d'une façon naturelle, d'une structure d'algèbre de Boole. Il suffit de poser, pour tout $p, q \in A$:

$$p'(x) = (p(x))'$$
$$(p \vee q)(x) = p(x) \vee q(x)$$

ce qui définit les opérations ' et v sur A.

Il en est de même de certaines des parties de A. Ainsi la partie de A constituée des fonctions constantes, C (définies par $p(x) = p_0 \in B$ pour tout $x \in B$) est une sous-algèbre de A isomorphe à B. En d'autres termes, on peut considérer les propositions comme des fonctions propositionnelles particulières. Désormais on identifiera donc B à C.

6.2.- Quantification

Pour comprendre la nature algébrique d'un quantificateur, considérons la proposition "pour au moins un x, x est un entier pair" (le domaine de définition X est l'ensemble des entiers, l'arrivée B est une algèbre de Boole qu'il n'est pas nécessaire de définir). L'effet de la quantification est donc en tout premier lieu de convertir une fonction propositionnelle (élément de A) en une proposition (élément de B), soit, d'après la dernière partie du § 6.1., en fonction propositionnelle constante (élément de C qui est isomorphe à B). On conçoit donc que l'image algébrique du quantificateur existentiel doit être une application d'une algèbre de Boole (dans ce cas A) dans une de ses sous-algèbres (ici C). Nous noterons cette application $\exists$ (par un abus de notation).

Soit donc une algèbre de Boole quelconque A, et soit $\exists$ une application de A en soi-même.

Si l'on se représente A comme une algèbre de fonctions propositionnelles et $\exists$ comme un quantificateur existentiel, alors l'application $\exists$ doit vérifier certaines conditions. En voici quelques unes (p, q sont des éléments quelconques de A):

(1) $\exists 0 = 0$

En effet $0(x) = 0$ est une contradiction quelconque (de la forme $u \wedge u'$ cf. § 3.1.), par exemple prenant $X = \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels), on peut prendre "$2x = 1$" pour $0(x)$ (en fait, c'est un élément de la classe $0(x)$). Naturellement, si "$2x = 1$" est une contradiction, alors "pour au moins un x, $2x = 1$" est encore une contradiction, d'où (1).

Posons dans l'algèbre de Boole A la définition suivante:

$p \leqslant q$ est une abréviation pour $p \wedge q = p$

(c'est un moyen bien connu de définir un ordre sur une algèbre de Boole, la relation $\leqslant$ étant effectivement un ordre). Il revient au même de dire que $p \leqslant q$

est une abréviation pour $p \wedge (p \rightarrow q) = p$

car $(p \rightarrow q) = p' \vee q$, donc $p \wedge (p' \vee q) = (p \wedge p') \vee (p \wedge q)$
$= 0 \vee (p \wedge q) = p \wedge q = p$

Ceci posé, la condition suivante s'écrit:

(2) $p \leqslant \exists p$

soit $p \wedge (p \rightarrow \exists p) = p$; pour tout x, p(x) est la même proposition que p(x) et $p(x) \rightarrow \exists p(x)$. Or de p(x) et $p(x) \rightarrow \exists p(x)$ on déduit par D3, § 5.7. $\exists p(x)$, donc de p(x) on déduit $\exists p(x)$. Ce n'est autre chose que le critère A6, qui lui est admis comme une propriété du quantificateur existentiel.

(3) $\exists (p \vee q) = (\exists p) \vee (\exists q)$

car "pour au moins un x, p(x) v q(x)" est la même proposition que "(pour au moins un x, p(x))v(pour au moins un x, q(x))"; le signe v est en effet la disjonction "ou". Par exemple si x est un entier rationnel ($X = \mathbb{Z}$), si p(x) est "x est pair", si q(x) est "x est impair". Alors "pour au moins un x, x est pair ou impair" est une tautologie, de même que "(pour au moins un x, x est pair) ou (pour au moins un x, x est impair)".

(4) $\exists \exists p = \exists p$

Appliquer un quantificateur existentiel à une fonction propositionnelle déjà quantifiée donne cette fonction quantifiée, x étant une variable liée dans $\exists p(x)$. Ainsi par exemple "pour au moins un x (pour au moins un x, x est pair)" est la même proposition que "pour au moins un x, x est pair".

Les conditions (1) à (4) ne signifient pas autre chose que: $\exists$ est une fermeture (au sens algébrique). Remarquons à ce propos qu'une fermeture topologique est aussi une fermeture algébrique. La théorie algébrique des quantificateurs se réduirait-elle alors à l'étude des fermetures topologiques, c.à.d. à la topologie? Certes non; les conditions imposées à application $\exists$ jusqu'à présent ne font intervenir que l'opération v (qui peut servir à définir 0 et $\leqslant$), sans rien dire de l'opération ' (la négation).

(5) $\exists (\exists p)' = (\exists p)'$

Par exemple si X est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et p(x) la proposition "$2x = 1$", alors $(\exists p(x))'$ est "non (pour un x, $2x = 1$)" soit "pour aucun x, $2x = 1$" ce qui est bien la même chose que "pour un x, non (pour un x, $2x = 1$)" soit "il y a un x pour lequel aucun x ne vérifie $2x = 1$" (à savoir n'importe quel x).

Ce qui précède nous permet de poser la définition suivante:

un quantificateur existentiel est une application $\exists$ d'une algèbre de Boole A en elle-même vérifiant les conditions (1) à (5) ci-dessus.

Au sens de la dualité (1) des algèbres de Boole qui sont globalement invariantes par la transformation

$$p \rightsquigarrow p'$$
$$p \wedge q \rightsquigarrow p' \vee q'$$
$$p \vee q \rightsquigarrow p' \wedge q'$$ on peut poser:

(1) Cf. [IBA]

un quantificateur universel est une application $\forall$ d'une algèbre de Boole A en elle-même vérifiait les conditions:

(i) $\forall 1 = 1$

(ii) $\forall p \leqslant p$

(iii) $\forall (p \wedge q) = \forall p \wedge \forall q$

(iv) $\forall\forall p = \forall p$

(v) $\forall (\forall p)' = (\forall p)'$

On se rend aisément compte que $\forall$ est bien un quantificateur universel au sens du § 4.

Il y a une relation remarquable entre un quantificateur existentiel $\exists$ sur une algèbre de Boole A et l'application $\forall$ de A en soi-même définie par:

$$\forall p = (\exists p')';$$

c'est que $\forall$ ainsi définie est un quantificateur universel. Inversement si $\forall$ est un quantificateur universel sur A et si l'on définit $\exists$ par

$$\exists p = (\forall p')'$$

alors $\exists$ est un quantificateur existentiel.

Ceci signifie que "pour tout x, p(x)" est la même chose que "non (pour un x, non p(x))" et "pour un x, p(x)" est la même chose que "non (pour tout x, non p(x)"; ce sont d'ailleurs les propriétés (3) et (4) du § 4.4.

Vu la "réciprocité" (ou plutôt la dualité) entre les quantificateurs existentiel et universel, on peut se borner à n'étudier que l'un des deux (1). On choisit en général le quantificateur existentiel $\exists$ et on l'appelle "quantificateur" tout court.

6.3.- Algèbre monadique

Une algèbre monadique est un couple (A, $\exists$), où A est une algèbre de Boole, $\exists$ un quantificateur sur A. Monadique signifie qu'il y a une opération de plus que celles définies sur une algèbre de Boole. On peut faire l'étude complète d'une algèbre monadique par les techniques algébriques habituelles. On constate qu'elle donne une image algébrique fidèle de la logique fonctionnelle déductive.

(1) De même on peut considérer des espaces vectoriels à droite et à gauche; on choisit en général de n'étudier que les espaces vectoriels à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[DMF] N. Bourbaki: Eléments de mathématique, 1ère partie, liv. I, chap. I "Description de la mathématique formelle" (Paris, Hermann, 1954).

[GTL] D. Hilbert et W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik (Berlin, Springer, 1928).

[AL] P. Halmos: Algebraic Logic (New-York, Chelsea 1962).

[LBA] P. Halmos: Lectures on Boolean algebras (Princeton, Van Nostrand, 1963).

[LM] J. Chauvineau: Logique Moderne, Collection "Que sais-je ? " (Paris, P.U.F., 1957).