MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

# Problèmes d'enseignement

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 9 (1964), p. 41-46
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__9__41_0>

# PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

## QUELQUES EXERCICES A TRAITER SUR SIMPLEXES

Il se peut pour certains problèmes économiques (décryptage, transport de marchandises, tournée économique) que la meilleure feuille de calcul soit encore un simplexe. Selon la dimension du calcul le simplexe est donné par

un réseau comme on le fera ci-dessous

un tableau

un ensemble d'instructions permettant toute exploration locale.

Dans tous les cas le simplexe sert de support au calcul.

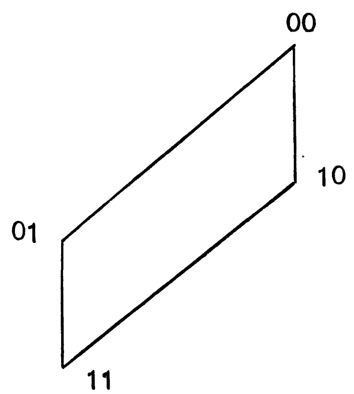
On rappelle que l'on entend par simplexe $S_n$, l'ensemble des parties d'un ensemble quelconque à n éléments organisées par la relation d'inclusion.

Exemple: pour construire $S_2$ on se donne un ensemble à deux éléments noté par exemple " $\{a,b\}$"; on peut aussi le noter simplement "11", ce qui revient à identifier chaque élément par son rang dans un mot.

Les parties de "11" sont notées par les mots

oo, ol, lo, 11

où un zéro au rang k signifie que l'élément de rang k n'est pas retenu pour constituer la partie en question. On donne ci-contre, un schéma d'inclusion des quatre parties de "11", en omettant toutefois toute barre d'inclusion qui serait une conséquence transitive des barres qui y figurent.



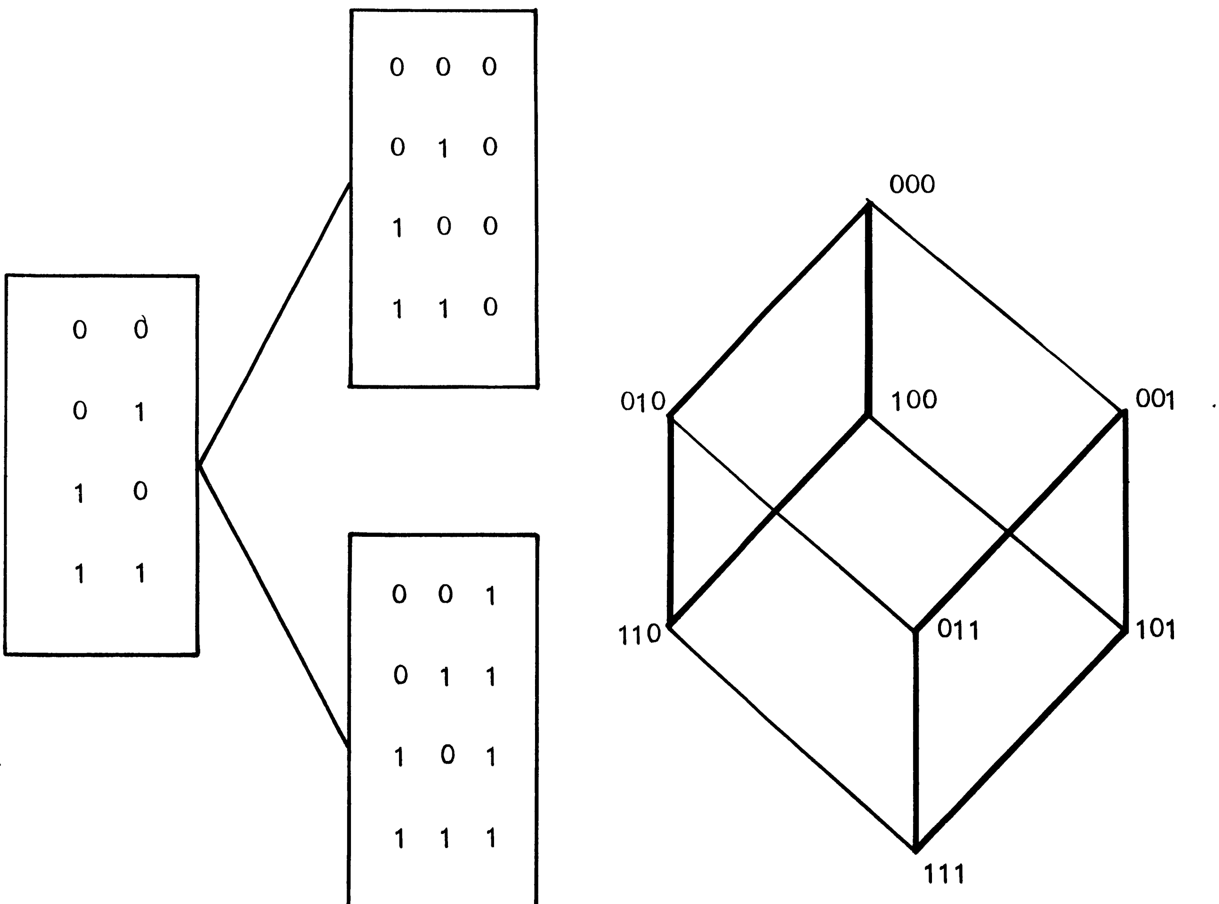

Simplexe $S_2$

Avant de poser un calcul à traiter sur simplexe jetons un coup d'oeil sur la lignée des simplexes $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, ..., et plus précisément recherchons des correspondances entre simplexes de rangs distincts.

## 1. LA REGLE DU DEDOUBLEMENT

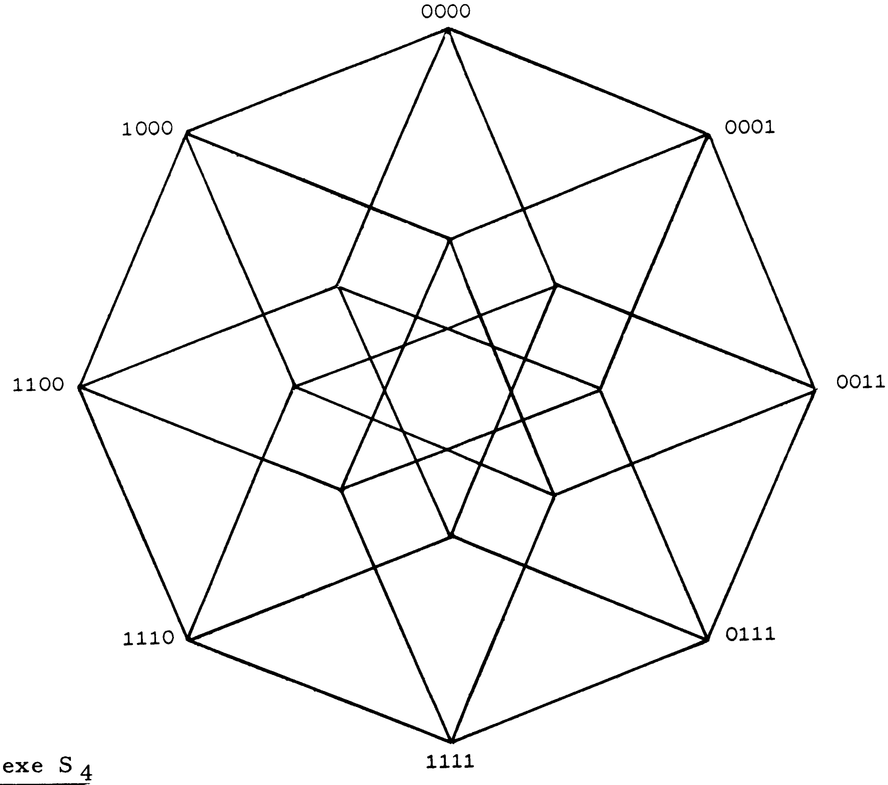
On donne $S_2$ et on demande de construire $S_3$.

Dans nos notations en mots, il ne s'agit que d'ajouter une troisième coordonnée:

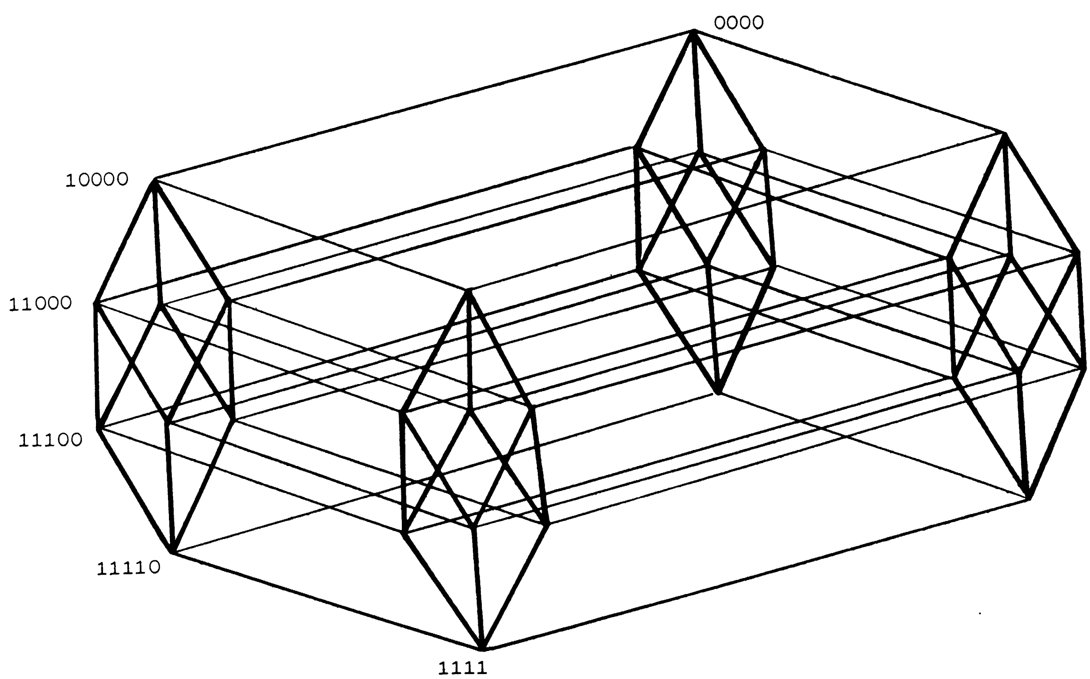



$S_2$ se dédouble et donne $S_3$

Si nous sommes bon dessinateur, il n'est pas impossible de tracer $S_4$, $S_5$, $S_6$, et même $S_7$. Nous donnons ci-dessous $S_4$ et $S_5$




Simplexe $S_4$




Simplexe $S_5$

Inversement on peut se demander comment séparer un simplexe en deux parties isomorphes: il suffit pour cela de choisir une coordonnée et de séparer les mots pour lesquels cette coordonnée est égale à 1 de ceux pour lesquels elle est égale à 0.

On exhibe la lignée des simplexes $S_0$, $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ en dépliant $S_0$ n fois, on peut inversement replier $S_n$ en n opérations, en respectant ou non l'ordre des coordonnées adopté pour déplier $S_0$.

Si la règle du dédoublement est caractéristique du simplexe on peut toutefois en donner un énoncé plus riche.

## Homorphismes de $S_n$ dans $S_k$ (lorsque $k < n$)

Considérons par exemple le simplexe $S_5$, c'est-à-dire les $2^5$ mots à 5 coordonnées égales à 0 ou 1. Nous l'avons tracé ci-dessus.

Intéressons-nous au seul point de vue suivant: première et cinquième coordonnée des mots. Nous définissons ainsi pour S une relations d'équivalence dont les classes peuvent s'écrire:

| | | |
|---|---|---|
| 0 ... 0 | | 0 0 |
| 0 ... 1 | ou simplement | 0 1 |
| 1 ... 0 | | 1 0 |
| 1 ... 1 | | 1 1 |

En d'autres termes ses classes constituent un $S_2$, et chaque classe (remplir les pointillés) est un $S_3$.

Disons aussi que nous avons appliqué $S_5$ dans $S_2$ et que la partition de $S_5$ afférante à cette application est constituée de quatre $S_3$. Cette application est un homorphisme pour l'inclusion car il est évident que les classes de deux éléments de $S_5$, inclus l'un dans l'autre, sont incluses l'une dans l'autre. Nous avons un homorphisme pour l'inclusion et partant pour toute opération de treillis déduite de l'inclusion.

Une telle relation d'équivalence peut être établie sur toute partie des coordonnées. Aussi

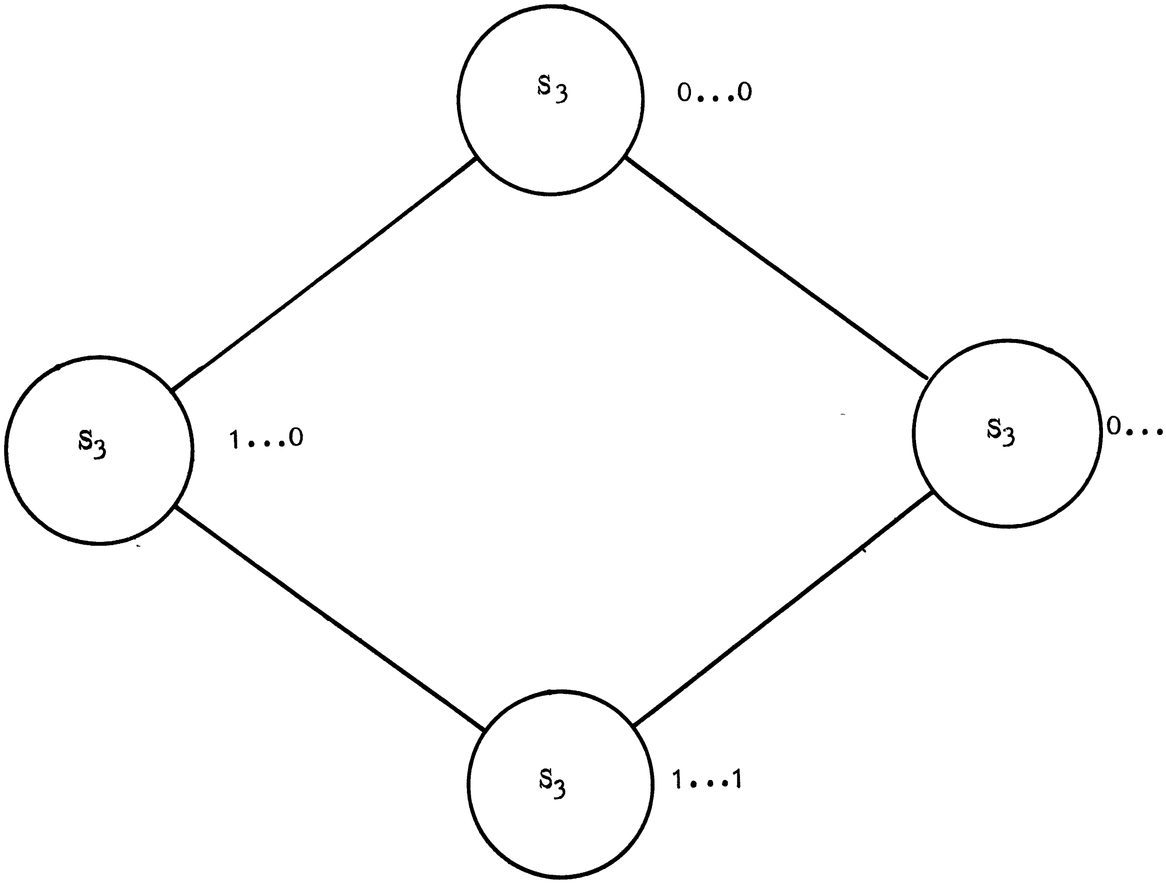
nous écrivons $S_5 = S_2 \times S_3$

et aussi $S_5 = S_3 \times S_2$

$S_5 = S_4 \times S_1$ (règle du dédoublement)

$S_5 = S_5 \times S_0$

Les simplexes se multiplient, les indices s'ajoutent. Nous avons rencontré une des procédures usuelles de l'algèbre: le produit direct.




Homorphisme de $S_5$ dans $S_2$

P. ROSENSTIEHL

(à suivre)

- - - - - - - - - -

## CHANTIERS MATHEMATIQUES

### Programme des émissions pour le 3ème trimestre

| Lundi à 17 h.55 | | Vendredi à 17 h.55 | |
|---|---|---|---|
| 26-4-65 | Equations linéaires | 23-4-65 | Algèbre des événements |
| 3-5-65 | Produits scalaires 1 | 30-4-65 | Calcul des Probabilités |
| 10-5-65 | Produits scalaires 2 | 7-5-65 | Dissection |
| 17-5-65 | Formes quadratiques | 14-5-65 | Langages machines |
| 24-5-65 | Statistique et calcul vectoriel | 21-5-65 | Egalité |
| 31-5-65 | En guise de conclusion | 28-5-65 | P. de Fermat |

Des documents d'accompagnement, par fascicules trimestriels, sont en vente à l'Institut Pédagogique National: 29, rue d'Ulm, Paris 5ème.