MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

La règle des partis et la ruine des joueurs

Mathématiques et sciences humaines, tome 9 (1964), p. 3-13

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__9__3_0>

G. Th. GUILBAUD

LA REGLE DES PARTIS ET LA RUINE DES JOUEURS

I - LA REGLE DES PARTIS*

Si de grands mathématiciens, tels Galilée, Képler, Jérôme Cardan, s'étaient appliqués avant Pascal à énumérer et dénombrer les chances, il n'en reste pas moins que c'est très précisément en 1654, dans un échange de lettres entre Pascal et Fermat, que naquit la Théorie de la Décision englobant à la fois la Théorie des Probabilités et la Théorie des Jeux.

L'occasion en fut un problème de "partis" (aujourd'hui nous dirions: de partage) posé par le Chevalier de Méré. On sait quel était le problème de Méré: un jeu, constitué d'une suite de coups ("parties" dans les textes de Pascal), prévoit selon des règles bien définies, comment partager les enjeux dans chaque issue possible du jeu. Or ces règles ne prévoient nullement une interruption du jeu avant sa fin régulière. Cependant il se peut que, pour force majeure, le jeu doive être interrompu: quel est alors le "parti" (ou le partage)? Il ne serait pas juste que les joueurs reprennent leurs mises respectives; "l'argent que les joueurs ont mis au jeu ne leur appartient plus car ils en ont quitté la propriété" selon les termes mêmes de Pascal. Et pourtant il faut bien prendre une décision. La règle du jeu ne permettrait-elle pas de décider encore dans ce cas non explicitement prévu, selon un principe analogue à celui du Code civil selon lequel "les conventions obligent non seulement à ce qui y est exprimé, mais encore à toutes les suites que l'équité, l'usage ou la loi donnent à l'obligation"?

La solution de Pascal est en effet fondée sur cette convention initiale. La règle des partis qu'il énonce spécifie donc que si les joueurs ont bien quitté la propriété des enjeux, "ils ont reçu en revanche le droit d'attendre ce que le hasard peut leur donner, suivant les conditions dont ils sont convenus d'abord.

"Mais comme c'est une loi volontaire, ils peuvent la rompre de gré à gré, et ainsi en quelque terme que le jeu se trouve, ils peuvent le quitter, et au contraire de ce qu'ils ont fait en y entrant, renoncer à l'attente du hasard, et rentrer chacun en la propriété de quelque chose; et en ce cas, le règlement de ce qui doit leur appartenir doit être tellement proportionné à ce qu'ils avaient droit d'espérer de la fortune, que chacun d'eux trouve entièrement égal de prendre ce qu'on lui assigne, ou de continuer l'aventure du jeu: et cette juste distribution s'appelle le parti" (1).

Prenons garde au caractère arbitral de cette solution; loin de la soumettre

---

(1) Pascal: "Traité du triangle" (usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties).

* Cet article a été rédigé avec la collaboration de Monsieur M. Eytan.

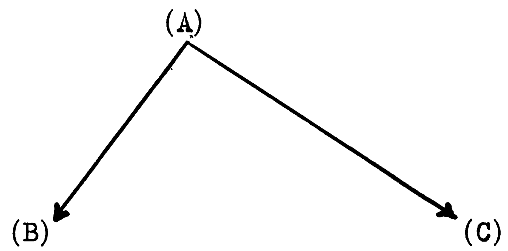
à l'avis des joueurs (et de prévoir alors un marchandage), on l'impose, comme conséquence logique de la règle du jeu.

"Le premier principe", dit Pascal (1), "qui fait connaître de quelle sorte on doit faire les partis est celui-ci:

Si l'un des joueurs se trouve en telle condition que, quoi qu'il arrive, une certaine somme doit lui appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard puisse la lui ôter; il ne doit en faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée, parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti.

Le second est celui-ci. Si deux joueurs se trouvent en telle condition, que si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre; si le jeu est de pur hasard, et qu'il y ait autant de hasard pour l'un que pour l'autre, et par conséquent non plus de raison de gagner pour l'un que pour l'autre, s'ils veulent se séparer sans jouer, et prendre ce qui leur appartient légitimement, le parti est qu'ils séparent la somme qui est au hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne".

Par exemple soient Primus et Secundus les deux joueurs; chacun d'eux a gagné un certain nombre de "parties", pas assez cependant pour que le jeu prenne fin. Désignons par (A) l'état actuel. Si l'on n'était obligé de s'arrêter, la "partie" suivante pourrait être gagnée soit par l'un soit par l'autre des joueurs (en supposant, pour faciliter le langage, une partie nulle impossible): désignons ces possibilités par (B) et (C). Schématiquement on a:



Supposons que le parti en (B) soit:

16 pistoles à Primus, 8 pistoles à Secundus alors que le parti en (C) est:
10 pistoles à Primus, 14 pistoles à Secundus.

Sur les 24 pistoles en jeu, Primus est sûr d'obtenir 10 "sans que le hasard puisse la lui ôter".

Il pourra donc dire à Secundus: "donnez-moi les 10 pistoles qui me reviennent quoi qu'il arrive". De même Secundus pourra revendiquer les 8 pistoles qu'il est certain d'obtenir. Quant aux 6 pistoles qui restent ils les séparent par la moitié, c'est-à-dire 3 pistoles chacun.

Le parti en (A) sera donc:

13 pistoles à Primus, 11 pistoles à Secundus.

Ainsi le processus séquentiel qu'est le jeu, permet, par une méthode de récurrence, de connaître le parti en une situation donnée à condition de le connaître aux moments immédiatement ultérieurs. Or il est une situation privilégiée où le parti est connu de par la règle même du jeu: c'est la situation finale.

(1) Pascal: "Traité du triangle" (usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties).

Remontant alors de proche en proche la généalogie des situations, le parti pourra être calculé dans une situation quelconque du jeu (y compris, d'ailleurs, la situation initiale où les joueurs n'ont encore rien fait d'autre que quitter la propriété de l'argent mis en jeu).

La méthode équivaut à faire la moyenne arithmétique des partis en (B) et (C) pour obtenir celui en (A). Représentant un parti par un vecteur ligne (le premier nombre indiquant la part de Primus, le deuxième celle de Secundus), on a: $((16,8) + (10,14))/2 = (13,11)$.

La méthode se généralise aisément: supposons qu'il y ait n joueurs (le parti sera donc un vecteur ligne à n nombres), les r éventualités (E_1), (E_2), ..., ..., (E_r) succédant immédiatement à la situation (A) avec des probabilités p_1, p_2,..., p_r. Le parti en (A) est alors:

$$p_1\ (a_1,\ b_1,\ \ldots,\ l_1) + p_2\ (a_2,\ b_2,\ \ldots,\ l_2) + \ldots + p_2\ (a_r,\ b_r,\ \ldots,\ \ r)$$

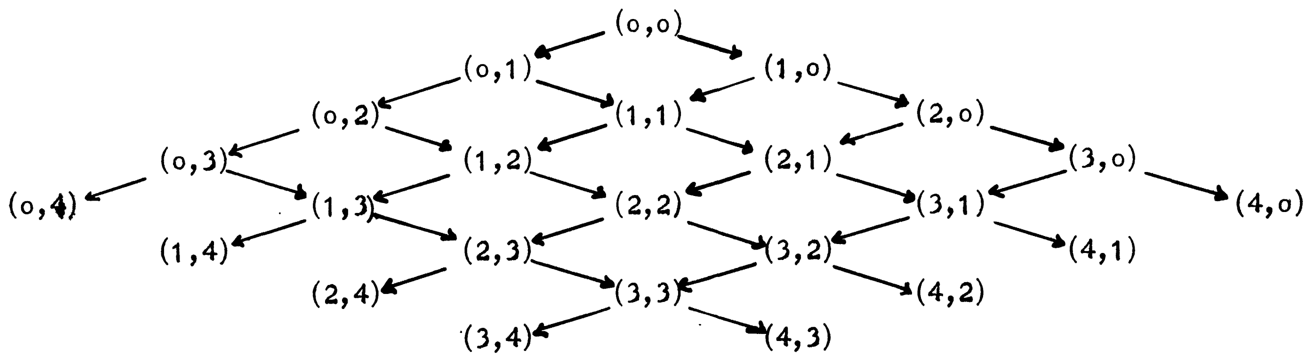
où $(a_i,\ b_i,\ \ldots,\ l_i)$ est le parti en (E_i), le premier joueur recevant a_i pistoles, le second b_i, ..., le $n^{\text{ième}}$ l_i pistoles. Le parti en (A) est donc la moyenne pondérée (par les probabilités) des partis aux situations immédiatement ultérieures à (A).

Pascal, ayant trouvé cette méthode, communiqua le problème à Fermat. Celui-ci, par une méthode un peu différente, retrouva la solution du problème posé par de Méré. Voici ce qu'en dit Pascal dans sa lettre du 29 Juillet 1654 (la précédente étant perdue):

"... je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas loisir de m'étendre; mais en un mot vous avez trouvé les deux parties des dés et des parties dans la parfaite justesse: j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous ... M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des parties, ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion".

Les deux autres lettres de Pascal à Fermat en notre possession contiennent outre le problème de la poule, des discussions techniques sur la règle des partis et la solution donnée par Fermat.

Voyons donc de plus près la solution détaillée du problème: deux joueurs, Primus et Secundus, misent 64 pistoles dans un jeu qui consiste en une succession de parties où chacun d'eux peut gagner un point. Le jeu se termine lorsque l'un des joueurs obtient 4 points. Soit (x,y) la marque, c'est-à-dire soit x le nombre de points de Primus, y celui de Secundus. La succession des parties peut être représentée par un réseau où l'on inscrit la marque correspondante à chaque sommet:



Pour les situations finales (sommets pendants du réseau), nous connaissons les partis. Représentons-les encore par un vecteur-ligne (u,v), u étant la part du Primus, v celle de Secundus.

Pour les marques:

(0,4) ; (1,4) ; (2,4) ; (3,4)

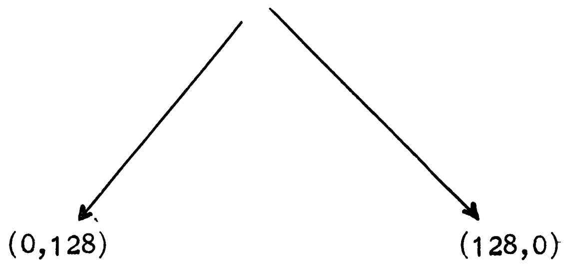
le parti est : (0,128).

Pour les marques:

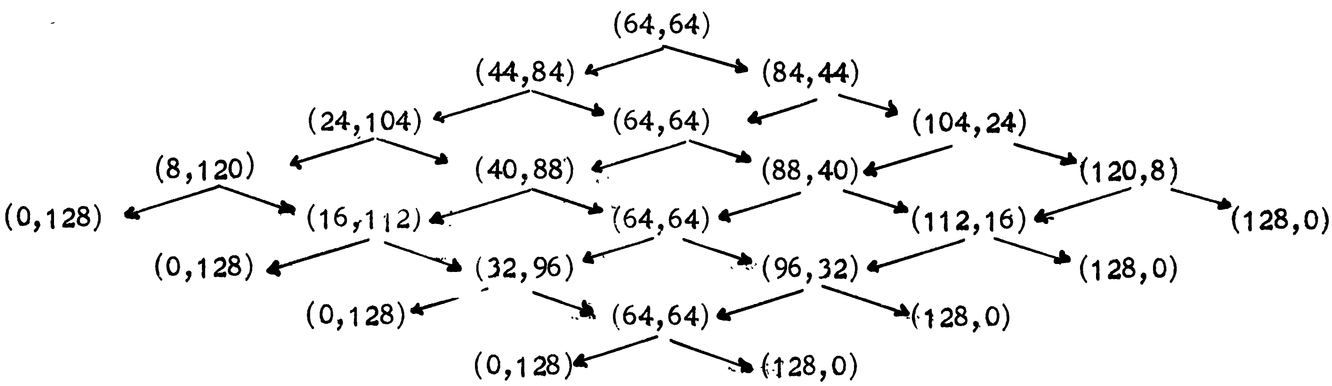
(4,3) ; (4,2) ; (4,1) ; (4,0)

le parti est : (128,0).

Pour les situations qui précèdent immédiatement une situation finale, la règle des partis donne immédiatement le résultat; par exemple pour la marque (3,3) la situation précède celle où les partis sont respectivement (0,128) et (128,0) :



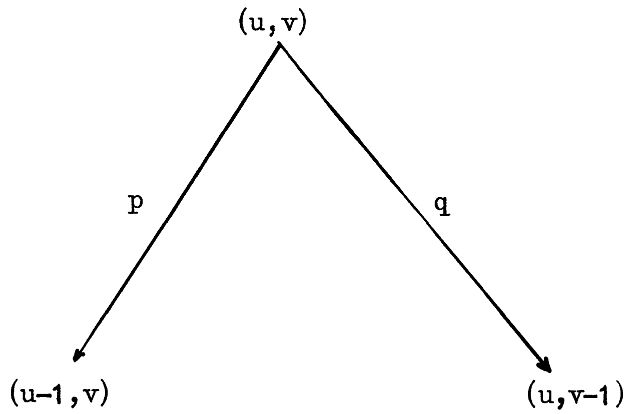
Les chances étant égales, le parti est: ((0,128) + (128,0))/2 = (64,64). Faisant ainsi le calcul de proche en proche on obtient le réseau suivant:

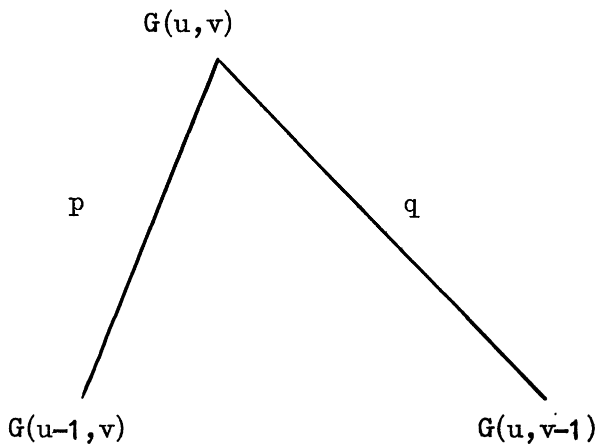


On remarque que le parti est connu même au départ: le jeu sera donc équitable si chacun des joueurs doit miser 64 pistoles. Le parti prend donc la signification suivante: c'est la valeur du jeu, la somme qu'un joueur doit équitablement verser pour participer au jeu. Sur le réseau on voit non seulement le parti, mais encore ce que chacune des parties à venir rapporte aux joueurs. Il est remarquable que quel que soit le nombre de parties d'un jeu, les deux premières ont la même valeur, c'est-à-dire procurent le même gain à l'un ou l'autre des joueurs. Dans notre exemple le gain est de 20 pistoles dans chacune des deux premières parties (étant entendu que le joueur gagnant ne fait que gagner au cours de ces deux parties).

Exprimons sous forme algébrique la règle des partis. Pour cela introduisons le manque en une situation: si (x,y) est la marque, et a le nombre de points nécessaire afin de gagner le jeu, le manque sera (a-x, a-y). Soit alors une partie, où la situation de manque (u,v) conduit (avec des probabilités respectives p et q) aux situations de manque (u-1, v) et (u, v-1). Soit G la part de Primus; la règle des partis conduit à écrire:

$$\boxed{G(u,v) = p.G(u-1,v) + q.G(u,v-1)}$$





Si l'on considère G comme un vecteur (le vecteur parti), alors cette équation de récurrence est valable pour chacun des joueurs.

Tracer le réseau des partis d'une partie revient en fait à donner la solution de l'équation de récurrence en chaque situation, avec les conditions aux limites:

a) G(0,v) = E pour tout v < a (Primus emporte l'enjeu E s'il obtient a points, c'est-à-dire si son manque est 0).

b) G(u,0) = 0 pour tout u < a (Primus n'obtient rien si son adversaire a un manque de 0 points).

On montre que la solution de l'équation de récurrence est:

$$G(u,v) = E.p^u \sum_{i=0}^{v} \binom{u+i-1}{i} q_i$$

(Jordan: "Calculus of finite difference" Chelsea).

L'importance de la règle des partis dépasse la seule théorie des Jeux: se donner en effet une loi qui à la situation (A) fait succéder les situations (E_1), (E_2), ..., (E_r) et une loi de composition linéaire des partis conduit à identifier le problème des partis et celui de la composition des chances. Pascal lui-même en fut parfaitement conscient. Dans une lettre adressée à Celeberrimae Matheseos Academiae Parisiensi, datée de 1654, il expose son programme: "Novissima autem ac penitus intentatae materiae tractatio, scilicet de compositione aleae in ludis ipsi subjectis, quod gallico nostro idiomate dicitur *faire les partis des jeux...*"

Dans un réseau quelconque, dont les sommets portent des probabilités élémentaires données, on pourra aisément calculer le parti initial P_0 en fonction des partis P_k aux sommets pendants. La loi de composition étant linéaire, on aura:

$$P_o = \sum_k a_k P_k$$

Les a_k pourront alors être interprétés comme des probabilités composées (a_k est la probabilité du sommet pendant k lorsqu'on se place à l'origine).

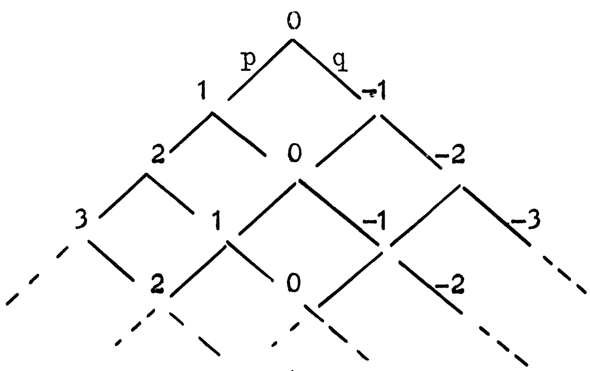
Le calcul des espérances (le "droit d'attendre" de Pascal) conduit donc à la compositio aleae. Il n'est nullement nécessaire pour cela de spécifier les P_k : on aurait un calcul symbolique permettant de manipuler les probabilités a_k dont la nature importe, au fond, assez peu, pourvu qu'on sache les combiner entre elles.

- - - - - - - - - - - - -

2 - LE PROBLEME DE LA RUINE DES JOUEURS

On considère un jeu où les deux adversaires, Primus et Secundus, peuvent à chaque coup gagner un point avec la probabilité p (resp. q) et perdre un point avec la probabilité q (resp. p).

Le réseau du jeu est, en portant uniquement les marques de Primus:

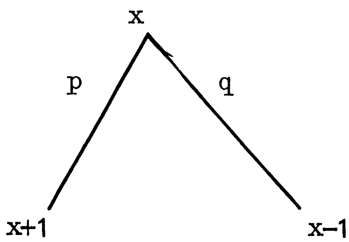


etc..

Cherchons le parti initial; la règle des partis ne peut être appliquée, car le jeu n'est pas limité, il n'y a pas de situations finales. A cela Pascal remédie en limitant le jeu à la marque 12 de la façon suivante:
- si la marque de Primus est 12, il gagne la partie (sa part est 1);
- si la marque de Primus est -12, il perd la partie (sa part est 0).

Néanmoins ce jeu présente encore, du fait de cycles dans le réseau, des séquences de longueur arbitraire. Négligeons pour l'instant cette difficulté et tournons-nous vers l'aspect algébrique de la règle des partis, pour essayer d'obtenir une solution.

Soit donc x la marque de Primus, P(x) son parti en ce point. A partir de cette marque, Primus peut obtenir soit $x + 1$ avec la probabilité p, soit $x - 1$ avec la probabilité q; d'après la règle des partis, on a:



$$P(x) = pP(x + 1) + qP(x-1)$$

avec $\begin{cases} P(12) = 1 \\ P(-12) = 0 \end{cases}$ $\qquad (p \neq q)$

Portons dans l'équation de récurrence $P(x) = u^x$; on obtient

$$u = pu^2 + q$$

dont les solutions sont $u = 1$ et $u = \frac{q}{p}$.

La théorie des équations aux différences finies indique alors que la solution générale de l'équation de récurrence est:

$$P(x) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^x$$

Calculons C_1 et C_2 en écrivant que les conditions aux limites sont vérifiées:

$$\begin{cases} P(12) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{12} = 1 \\ P(-12) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^{-12} = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^{-12}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-12} - \left(\frac{q}{p}\right)^{12}} = \dfrac{p^{24}}{p^{24} - q^{24}} \\[2ex] C_2 = \dfrac{-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{-12} - \left(\frac{q}{p}\right)^{12}} = \dfrac{-p^{12}q^{12}}{p^{24} - q^{24}} \end{cases}$$

Enfin, la partie initiale de Primus est:

$$P(0) = C_1 + C_2 = \frac{p^{12}(p^{12} - q^{12})}{(p^{12})^2 - (q^{12})^2} = \frac{p^{12}}{p^{12} + q^{12}}$$

On trouverait de façon analogue que la part initiale de Secundus est :

$$Q(0) = \frac{q^{12}}{p^{12} + q^{12}}$$

De façon générale si l'on décide d'interrompre le jeu après n coups, en posant

$$\begin{cases} P(n) = 1 \\ P(-n) = 0 \end{cases}$$

le parti initial de Primus (resp. Secundus) est proportionnel à p^n (resp. q^n).

C'est le résultat donné par Pascal et par Fermat.

La dénomination "problème de la ruine des joueurs" provient de ce qu'on peut considérer la condition $P(-n) = 0$ comme signifiant que Primus est ruiné après avoir perdu n points (ou n écus ... etc..); id. pour la condition $P(n) = 1$ considérée comme la ruine de Secundus.

(rédaction par M. EYTAN
d'une leçon faite le 16 Mars 1962
par G.Th. GUILBAUD)

- - - - - - - - - - - - -

3 - HISTOIRE DU PREMIER PROBLEME DE RUINE DES JOUEURS 1656 - 1718

Extrait d'une lettre de Pierre de CARCAVY à Chr. HUYGENS, en date du 28 Septembre 1656.
(publiée par Ch. Henry dans son ouvrage sur Carcavy - se trouve aussi dans la correspondance de Huygens (1), n° 336, et dans celle de Fermat (2), n° 78).

«.... voici une autre proposition que M. Pascal a fait à M. de Fermat, laquelle il juge sans comparaison plus difficile que toutes les autres.

« Deux joueurs jouent à cette condition que la chance du premier soit "11" et celle du second "14": un troisième jette trois dés pour eux deux et quand il arrive onze, le premier marque un point, et quand il arrive quatorze, le second de son côté en marque un.

« Ils jouent en 12 points, mais à condition que, si celui qui jette les dés ramène onze et qu'ainsi le premier marque un point, s'il arrive que les dés fassent quatorze le coup d'après, le second ne marque pas mais ôte un point au premier, et ainsi réciproquement ...."

(1) Oeuvres complètes de Christiaan Huygens T. I p. 492-94.
(2) Oeuvres de Fermat T. II p. 328-331.

Le texte poursuit en donnant quelques exemples:

six fois onze suivi de trois fois quatorze : 3 points au premier
six fois onze suivi de neuf fois quatorze : 3 points au second
6 onze, 17 quatorze, 4 onze et 5 quatorze : le second gagne.

Il est clair que les chances du Onze et du Quatorze ne sont pas égales:

une énumération facile montre qu'avec trois dés il y a <u>27</u> façons d'amener Onze contre <u>15</u> façons seulement d'amener Quatorze.

Le problème posé par Pascal à Fermat revient donc à la forme suivante:

Deux événements, de probabilité donnée, soient p et q (ici: $p/q = 27/15$).

Une suite de coups: l'événement p augmente une somme S de 1 point, l'événement q la diminue d'autant. La somme initiale est zéro. On arrête quand la somme S atteint + r ou − r (ici $r = 12$). On demande les probabilités respectives de ces façons de terminer, soient P et Q, en fonction de p, q, r.

C'est un problème de ruine.

D'après Carcavy, Pascal et Fermat savaient résoudre de tels problèmes, dès 1656 au moins.

Car sitôt le défi posé par l'intermédiaire de Carcavy (1), Fermat répond que le rapport des chances est compris en 1156 et 1157.

C'est donner la solution numérique

$$1156 < P/Q < 1157$$
$$\text{pour} \quad p/q = 27/15$$

mais ce n'est pas indiquer la méthode.

«M. de Fermat m'envoya incontinent cette solution: celui qui a la chance Onze contre celui qui a la chance Quatorze peut parier 1156 contre 1, mais non pas 1157 contre 1, et qu'ainsi la véritable raison était entre les deux par où M. Pascal ayant connu que M. Fermat avait fort bien résolu ce qui lui avait été proposé, il me donna les véritables nombres pour les lui envoyer et pour lui témoigner que de son côté il ne lui avait pas proposé une chose qu'il n'eut résolue auparavant»

Mais que va donc donner Pascal, pour montrer ce qu'il sait - puisque Fermat vient, en réponse à son défi, de lui donner le résultat numérique attendu. De nos jours, ce qu'on attendrait, en pareil cas, ce serait la "formule",

à savoir : $P/Q = (p/q)^r$

Mais tel n'est point le style de nos gentilshommes.

Pascal se contente de donner à Carcavy, pour les envoyer à Fermat, les deux nombres (2) suivants (représentant P et Q) :

150 094 635 296 999 121
et 129 746 337 890 625,

(dont le quotient, à une unité près est bien 1156).

---

(1) La réponse de Fermat ayant été envoyée à Carcavy, il est clair que celui-ci servait d'intermédiaire alors que Pascal et Fermat avaient correspondu directement en 1654.

(2) Le tome I (page 493) des oeuvres de Huygens donne, par erreur, 2 au lieu de 1 pour le dernier chiffre du premier nombre.

Qu'eussiez-vous fait à la place de Fermat ? Evidemment décomposer en facteurs premiers ces deux nombres. C'est immédiat:

$$3^{36} \quad \text{et} \quad 3^{12}\, 5^{12}$$

c'est-à-dire

$$27^{12} \quad \text{et} \quad 15^{12}$$

et c'est assez clairement dire que les chances P et Q sont proportionnelles à: p^r et q^r, puisque $p/q = 27/15$, et $r = 12$.

C'était bien là l'intention de Pascal, et non pas, comme pourrait le croire un lecteur moderne, seulement la solution numérique exacte par contraste avec la solution approchée donnée par Fermat. Pascal aurait fort bien pu donner la valeur exacte $P/Q = (27/15)^{12} = (9/5)^{12}$; c'est-à-dire:

$$2\,8\,2\,4\,2\,9\,5\,3\,6\,4\,8\,1 \;/\; 2\,4\,4\,1\,4\,0\,6\,2\,5$$

Ou bien en décimal, mais ce n'était point la coutume à l'époque:

$$(18/10)^{12}$$

$$= 1\,1\,5\,6,\ 8\,3\,1\,3\,8\,1\,4\,2\,6\,1\,7\,6$$

Si Pascal a donné, sans les simplifier, les deux termes de la proportion, c'est bien pour signifier la loi ou, comme nous dirions, la solution générale du problème, à un correspondant tel que Fermat, pour qui l'arithmétique des entiers naturels n'a plus de secrets.

Pascal ne doutait pas d'ailleurs, au témoignage de Carcavy, (cf. le passage cité plus haut), que Fermat n'ait trouvé la solution. Et Carcavy ajoutait avec confiance à l'adresse de Huygens: "Mais ce que vous trouverez de plus considérable est que le dit S^r de Fermat en a la démonstration, comme aussi M^r Pascal de son côté, bien qu'il y ait apparence qu'ils se soient servis d'une différente méthode". Le langage des nombres était pour les hommes de cette époque plus parlant que pour nous. Ce qui n'enlève rien à la constatation que nous avons soulignée: la proportion donnée par Pascal est très proprement significative.

—— EPILOGUE ——

En 1658, Chr. HUYGENS envoya à son maître SCHOOTEN un petit traité, que celui-ci traduisit en latin sous le titre "de Ratiociniis in ludo aleae" et publia dans ses exercices de mathématique. En appendice, on trouve cinq problèmes, simplement énoncés sans solution - et annoncés par quelques lignes de la préface:

"depuis longtemps, les plus grands géomètres de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul; mais en résolvant les questions qu'ils se proposaient réciproquement, ils cachaient leurs méthodes ... on trouvera à la fin de notre ouvrage quelques uns de ces problèmes; je les ai donnés sans solution, non seulement parce que je n'aurais pu être clair sans entrer dans de trop longs détails, mais encore parce que j'ai cru devoir laisser quelque chose pour exercer les éventuels lecteurs".

Et voici le cinquième de ces exercices:

"A et B prennent chacun douze écus et jouent avec trois dés aux conditions sui-"vantes: s'il vient onze points, A donnera un écu à B, mais s'il en vient qua-"torze, B donnera un écu à A ; et celui qui le premier aura réuni tous les écus "gagnera la partie. Il se trouve que le sort de A est à celui de B comme "244140625 à 282429536481".

On reconnait le problème de Pascal relaté par Carcavy, et l'on voit aussi que Huygens en donne le résultat numérique, après simplification (voir la lettre de H. à Carcavy, 12 Octobre 1656, n° 342, p. 505 du Tome I de la correspondance de H.).

En 1713, Nicolas Bernoulli publia l'oeuvre de son oncle Jacques Bernoulli, le fameux Ars Conjectandi, dont la première partie reproduisait avec des commentaires, le petit traité de Huygens traduit par Schooten. On y trouve la solution de notre problème.

Bernoulli commence par observer les chances de A et B, qui sont indiquées par le nombre de combinaisons favorables à chacun, à savoir $a = 15$ et $b = 27$. Puis il propose un raisonnement par récurrence ("inductione") qu'il résume "sans calcul" de la façon suivante:

1°) - Si A avait tous les écus sauf un il aurait a chances de gagner, et de même, quand B a tous les écus sauf un, il a b chances de gagner.

2°) - Si A avait tous les écus sauf deux, il aurait a chances de les avoir tous sauf un, au coup suivant, c'est-à-dire a chances d'obtenir a chances de gagner, donc a^2 chances de gagner. Et si B a tous les écus sauf deux, il a b^2 chances de gagner.

3°) - Et ainsi de suite: à raison de chacun des écus qui manquent à un joueur pour terminer la partie, il y a a chances pour A et b pour B, d'être ramenés au cas antérieur.

4°) - Au commencement du jeu, chacun a douze écus, donc il manque à chacun douze écus pour gagner. Et les chances sont comme a^{12} et b^{12}.

Bien entendu, Bernoulli prévoit que ce "ratiocinium" ne satisfera pas tout le monde, et il complète par des indications très précises pour une mise en forme rigoureuse.

Enfin, notre auteur ajoute, mais sans détails, la solution du même problème lorsque les deux joueurs ne possèdent pas initialement le même nombre d'écus. Si A possède m écus et a chances d'en gagner un à chaque coup, et si B en possède n et b chances, les chances de tout gagner par A et par B sont comme les nombres:

$$a^n b^m - a^{m+n} \quad \text{et} \quad b^{m+n} - a^n b^m$$

(à condition que $a \neq b$, sinon les chances sont comme m à n).

La solution complète sera explicitée par de MOIVRE (The Doctrine of chances, 1718). J'en ai donné l'analyse dans mes leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux (Stratégie et décisions économiques, Paris, C.N.R.S. 1954) pages I/12 à I/19.

Toute la question sera reprise dans l'édition (traduite en français et commentée) de l'ARS CONJECTANDI que prépare le Centre de Mathématique Sociale.