MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. BOUZITAT

Le problème de la ruine des joueurs dans les épreuves répétées

Mathématiques et sciences humaines, tome 9 (1964), p. 15-30

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__9__15_0>

J. BOUZITAT

LE PROBLEME DE LA RUINE DES JOUEURS DANS LES EPREUVES REPETEES (1)

I - INTRODUCTION

Le problème de la ruine des joueurs se pose très naturellement dans la théorie de la Décision en présence d'aléa, et sa résolution est indispensable, en particulier, pour la théorie des Assurances. Il s'agit de calculer - ou au moins de borner supérieurement - la probabilité pour qu'un joueur soit ruiné au cours d'une suite de parties d'un jeu de hasard donné.

La résolution de ce problème repose sur un principe de récurrence introduit par la "règle des partis" de Pascal (Lettres de Pascal à Fermat, et Traité du triangle arithmétique, 1654), et sur une ingénieuse analyse due à Moivre (Doctrine of chance, 1718).

La méthode récurrente, ainsi appliquée aux jeux de hasard, peut s'étendre dans certains cas aux jeux de stratégie, où le déroulement de la partie dépend de choix délibérément exercés par les joueurs.

Il importe de ne pas se laisser abuser par le caractère un peu dérisoire du mot "joueurs". L'étude de la ruine des joueurs, et les généralisations qui en découlent, s'appliquent, bien entendu, à de très sérieux problèmes économiques, tels que le régime des assurances et la gestion des stocks, où le risque de "défaillance" (faillite ou rupture de stock) joue un rôle essentiel.

2 - RAPPEL DE LA REGLE DES PARTIS

Considérons, à titre d'exemple, un jeu de hasard joué par deux joueurs A et B et défini par la règle suivante:

- A et B déposent des enjeux sur la table avant le début de la partie;
- une partie est constituée par une suite de coups aléatoires, chaque coup étant gagné par l'un ou l'autre des joueurs;
- à chaque coup,
  - l'évènement "A gagne le coup" a la probabilité p_1 de se produire,
  - l'évènement "B gagne le coup" a la probabilité p_2 de se produire,

avec $p_1 \geqslant 0,\ p_2 \geqslant 0,\ p_1 + p_2 = 1$;

(1) Cet article a été rédigé avec la collaboration de Monsieur Jacques Bentz.

- quand le nombre de coups gagnés par un joueur atteint un nombre fixé à l'avance, la partie est terminée, et ce joueur ramasse la totalité des enjeux.

On suppose que les joueurs désirent, ou bien doivent, cesser de jouer avant que la partie ne soit effectivement terminée selon la règle du jeu.

Problème: Comment les enjeux doivent-ils être alors partagés entre les joueurs?

*

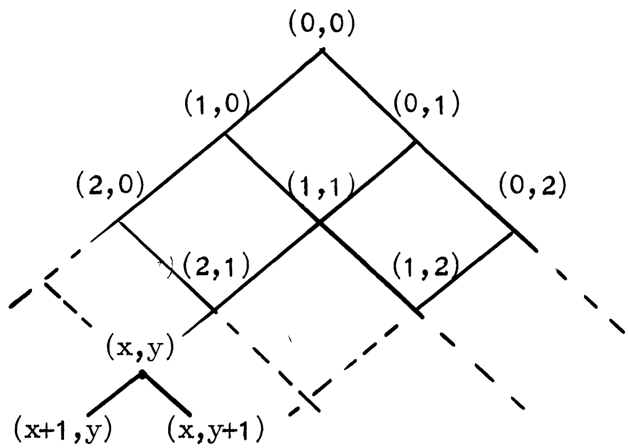
*   *

Un partage équitable (ou parti, au sens de Pascal) devrait être tel que chacun des joueurs trouve équivalent de prendre ce qui lui est attribué ou de continuer à jouer.

Il convient donc d'attribuer d'abord à chacun ce qui ne dépend pas du hasard, c'est-à-dire ce qui lui reviendrait à coup sûr compte-tenu des coups déjà joués, puis de partager le reste, dont la répartition finale dépendrait du hasard, en tenant compte des probabilités qui résultent de la règle du jeu.

Voici comment, à partir de la "règle des partis" de Pascal, un tel partage peut se calculer de manière récurrente.

Le déroulement du jeu peut être représenté par un graphe:



Chaque arc représente un coup gagné par A ou par B, selon qu'il est dirigé vers la gauche ou vers la droite. A chaque sommet, on associe une marque M :

$$M = (x, y) = (\text{nombre de coups gagnés par A, nombre de coups gagnés par B}).$$

A chaque marque, on associe, en remontant de sommet en sommet à partir des points terminaux, un vecteur $P \in \mathbb{R}^2$, appelé parti, ayant pour coordonnées les parts respectives des deux joueurs (exprimées en fractions de la totalité des enjeux), et défini de la manière suivante:

- points terminaux: $P = (1,0)$ si A gagne la partie.
  $P = (0,1)$ si B gagne la partie.

- points intermédiaires et point initial :

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ {\scriptstyle p_1}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_2} \\ M + m_1 & & M + m_2 \end{array}$$

$$P(M) = p_1\, P(M + m_1) + p_2\, P(M + m_2), \text{ avec } \begin{cases} m_1 = (1,0) : \text{(coup gagné par A)} \\ m_2 = (0,1) : \text{(coup gagné par B).} \end{cases}$$

On peut ainsi, de proche en proche, associer à chaque sommet, un parti, ou partage des enjeux, qui répond au problème posé. (Mais il ne faudrait pas croire que le partage ainsi défini s'impose en toutes circonstances, et cette remarque se rattache à la très importante "théorie de l'utilité" de Daniel Bernoulli (1730) et de Von Neumann et Morgenstern (1947).)

L'application récurrente de la formule de Pascal conduit à exprimer le vecteur parti en une situation déterminée S comme une combinaison linéaire des vecteurs partis prévus par la règle du jeu dans les diverses situations terminales T_j :

$$P(S) = \sum_j q_j\, P(T_j)$$

Les coefficients de pondération q_j figurant dans une telle formule sont les probabilités pour qu'une partie, poursuivie à partir de la situation S jusqu'à son terme prévu par la règle, se termine par les situations respectives T_j. La méthode de Pascal permet de calculer ces probabilités de proche en proche, et c'est un calcul de ce genre qui va être effectué à propos du problème de la ruine des joueurs.

3 - EXEMPLE INTRODUCTIF AU PROBLEME DE LA RUINE DES JOUEURS

Soit un jeu de hasard, joué par deux joueurs A et B, et défini par la règle suivante:

- A et B disposent des avoirs initiaux respectifs a et b, avec $a + b = K$;
- une partie est constituée par une suite de coups aléatoires;
- à chaque coup, A a la probabilité p de gagner 1, et la probabilité complémentaire $q = (1 - p)$ de perdre 1;
  B a la probabilité q de gagner 1, et la probabilité complémentaire $p = (1 - q)$ de perdre 1;
- à priori, il est possible que la partie se termine par la ruine d'un des deux joueurs, ou qu'elle se poursuive indéfiniment sans que l'un des deux joueurs ne soit jamais ruiné.

Problème: Déterminer, au début de la partie, les probabilités des évènements "ruine du joueur A" et "ruine du joueur B".

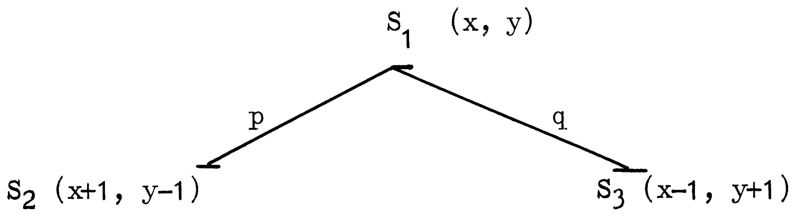
*

* *

Ce problème se résout au moyen de la Règle des Partis de Pascal, grâce à l'artifice suivant, dû à Moivre :

On considère deux spectateurs du jeu qui parient l'un sur la ruine de A, l'autre sur la ruine de B : ils déposent des enjeux, qui iront, si l'un des deux joueurs est ruiné, à celui des deux spectateurs qui aura parié sur la ruine de ce joueur.

Un coup quelconque de la partie du jeu considéré entre A et B, peut être représenté par le schéma suivant:



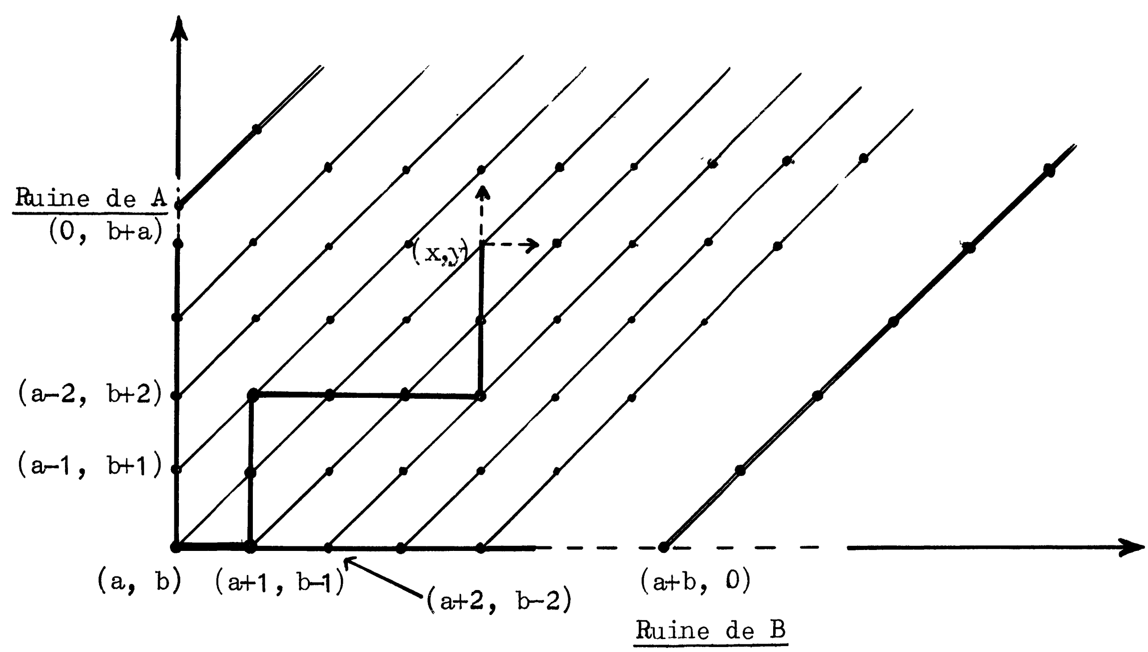
où x et y sont les avoirs respectifs de A et B dans la situation S_1 (x, y) qui précède le coup considéré $(x + y = a + b = K)$, et qui peut conduire

- soit à la situation S_2 $(x + 1, y - 1)$, avec la probabilité p,
- soit à la situation S_3 $(x - 1, y + 1)$, avec la probabilité $q = 1 - p$.

Si P_1, P_2, P_3 sont les vecteurs partis représentant les partages des enjeux entre les spectateurs dans les situations respectives S_1, S_2, S_3, la règle des Partis implique:

$$P_1 = p\, P_2 + q\, P_3.$$

Le déroulement du jeu, pour A et B, peut, d'autre part, être représenté par le schéma ci-dessous:



Sur ce schéma:

- un coup est représenté par un déplacement horizontal de longueur 1 vers la droite, s'il est gagné par A ; par un déplacement vertical de longueur 1 vers le haut, s'il est gagné par B;

- une partie est représentée par un cheminement "vers le haut et vers la droite" dans le plan ainsi défini;

- tous les points situés sur une même parallèle à la première bissectrice correspondent à un même état des avoirs des joueurs A et B;

- le domaine de cheminement est donc limité par deux parallèles à la première bissectrice passant, l'une par les points où A est ruiné, l'autre par les points où B est ruiné.

Le partage des enjeux entre les spectateurs en un point (x, y) pourrait, à priori, dépendre de x, de y et du nombre de coups déjà joués, si la longueur d'une partie du jeu proposé était limitée. Mais, si la partie peut, en principe, se poursuivre indéfiniment, le parti relatif aux specteurs ne dépend que des avoirs x et y des joueurs A et B, c'est-à-dire, par exemple, de la seule variable x puisque $y = K - x$. Ce partage est donc le même en tous les points du schéma précédent situés sur une même parallèle à la première bissectrice.

En un point (x,y), le vecteur parti $P(x)$ est défini en fonction de $P(x+1)$ et de $P(x-1)$ par la règle de Pascal:

$$P(x) = p \cdot P(x+1) + (1-p) \cdot P(x-1).$$

$P(x)$ vérifie donc une équation de récurrence linéaire, avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} P(0) = (1, 0), \\ P(K) = (0, 1), \end{cases}$$

traduisant le fait que le joueur A est ruiné pour $x = 0$ (la totalité des enjeux allant dans ce cas au premier spectateur), et que le joueur B est ruiné pour $x = K$ (la totalité des enjeux allant dans ce cas au second spectateur).

On sait d'ailleurs que, si l'on réussit à mettre $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = p_A(x).P(0) + p_B(x).P(K),$$

les coefficients $p_A(x)$ et $p_B(x)$ donneront les probabilités respectives pour que, à partir d'une situation où l'avoir de A est égal à x, la partie se termine par la ruine du joueur A, et par la ruine du joueur B.

Avec les conditions aux limites adoptées, $p_A(x)$ et $p_B(x)$ ne sont autres que les deux coordonnées du vecteur $P(x)$.

Résolution de l'équation de récurrence

Cherchons les solutions particulières du type exponentiel u^x. La base u doit être solution de l'équation algébrique :

$$u^x = p u^{x+1} + (1-p) u^{x-1},$$

d'où, après simplification, l'équation dite <u>équation caractéristique</u>, qui est ici, du second degré en u :

$$1 = p\,u + (1-p)\,u^{-1}$$

ou

$$p\,u^2 - u + (1-p) = 0.$$

Cette équation admet évidemment la racine 1, de sorte que la seconde racine est égale à $\frac{1-p}{p}$.

- <u>Si $p \neq \frac{1}{2}$</u>, l'équation en u a deux racines distinctes : 1 et $u_o = \frac{1-p}{p}$.

Alors la solution générale de l'équation de récurrence est : $P(x) = C + C_o\,u_o^x$,

où C et C_o sont deux vecteurs constants, déterminés par les conditions aux limites

$$\begin{cases} C + C_o = P(0), \\ C + C_o\,u_o^K = P(K). \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} C = \dfrac{P(K) - u_o^K\,P(0)}{1 - u_o^K}, \\[2ex] C_o = \dfrac{P(0) - P(K)}{1 - u_o^K}, \end{cases}$$

et

$$P(x) = \frac{u_o^x - u_o^K}{1 - u_o^K}\,P(0) + \frac{1 - u_o^x}{1 - u_o^K}\,P(K).$$

- <u>Si $p = \frac{1}{2}$</u>, l'équation en u a une racine double égale à 1.

Alors la solution générale de l'équation de récurrence est :

$$P(x) = C + C_o\,x,$$

avec

$$\begin{cases} C = P(0), \\ C + C_o\,K = P(K), \end{cases}$$

d'où

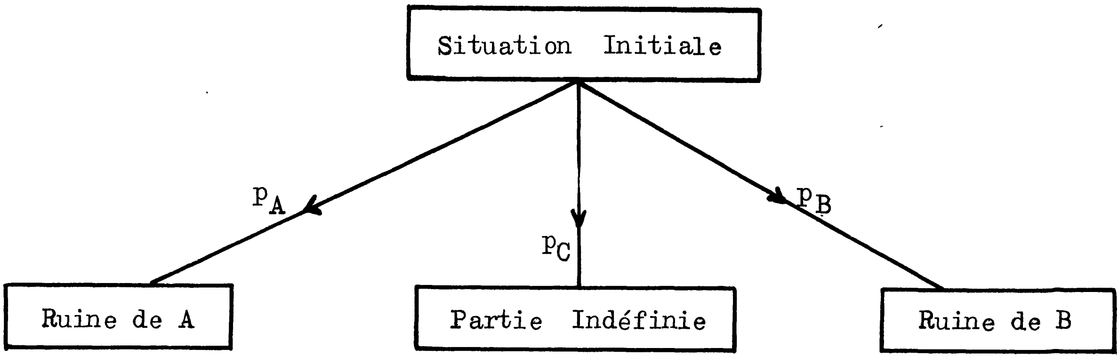
$$\begin{cases} C = P(0), \\ C_o = \dfrac{P(K) - P(0)}{K}, \end{cases}$$

et

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{K}\right) P(0) + \frac{x}{K}\,P(K).$$

Conclusion: Pour les spectateurs, le jeu peut être résumé en un coup unique, avec trois éventualités:

"ruine de A": probabilité p_A
"ruine de B": probabilité p_B
"pas de joueur ruiné" (le jeu se poursuit indéfiniment): probabilité p_C



Les avoirs initiaux des deux joueurs A et B étant respectivement a et b = K − a, il suffit de substituer a à x dans P(x) pour obtenir les probabilités p_A et p_B comme coefficients de P(0) et de P(K) dans P(a), ou, ce qui revient au même, comme coordonnées du vecteur P(a) :

$$p_A = \begin{cases} \dfrac{u_o^a - u_o^K}{1 - u_o^K} = \dfrac{1 - u_o^{-b}}{1 - u_o^{-K}}, & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \quad \left(u_o = \dfrac{1-p}{p} \neq 1\right), \\ 1 - \dfrac{a}{K} = \dfrac{b}{K}, & \text{si } p = \frac{1}{2} \quad (u_o = 1), \end{cases}$$

$$p_B = \begin{cases} \dfrac{1 - u_o^a}{1 - u_o^K} = \dfrac{u_o^{-b} - u_o^{-K}}{1 - u_o^{-K}}, & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \quad \left(u_o = \dfrac{1-p}{p} \neq 1\right), \\ \dfrac{a}{K} = 1 - \dfrac{b}{K}, & \text{si } p = \frac{1}{2} \quad (u_o = 1), \end{cases}$$

d'où $p_C = 0$, puisque $p_A + p_B = 1$.

Ainsi, l'évènement "le jeu se poursuit indéfiniment, sans qu'aucun joueur soit ruiné" a une probabilité nulle de se produire. Il est quasi-certain que la partie se terminera en un nombre fini de coups par la ruine du joueur A ou par la ruine du joueur B.

Cas où l'un des joueurs dispose d'une fortune pratiquement illimitée

On obtient alors les probabilités de ruine de chacun des joueurs en faisant tendre a ou b, et par conséquent K, vers l'infini, dans les formules précédentes.

Ces probabilités figurent dans le tableau suivant :

		a fini, b infini		a infini, b fini	
		p_A	p_B	p_A	p_B.
$p<\frac{1}{2}$	$u_o>1$	1	0	$1-\left(\frac{1}{u_o}\right)^b$	$\left(\frac{1}{u_o}\right)^b$
$p=\frac{1}{2}$	$u_o=1$	1	0	0	1
$p>\frac{1}{2}$	$u_o<1$	u_o^a	$1-u_o^a$	0	1

(Il sera sans doute intéressant pour le lecteur de réfléchir dès maintenant à ces résultats particuliers. Des résultats qualitativement analogues seront obtenus et interprétés plus loin, dans un cas plus général).

4 - LE PROBLEME DE LA RUINE DES JOUEURS DANS LES EPREUVES REPETEES (cas général)

4.1.- Détermination des probabilités de ruine des joueurs

Soit un jeu de hasard, joué par deux joueurs A et B, et défini par la règle suivante:

- A et B disposent des avoirs respectifs a et b, avec $a + b = K$;
- une partie est constituée par une suite de coups aléatoires;
- à chaque coup, le joueur A, auquel on s'intéresse, a les probabilités connues p_1, p_2, ..., p_n de réaliser des gains supposés entiers et commensurables entre eux: g_1, g_2, ..., g_n, positifs, nuls ou négatifs;
- on suppose que B perd ce que A gagne, et inversement;
- à priori, il est possible que la partie se termine par la ruine de l'un ou l'autre des joueurs (c'est-à-dire par une situation où l'avoir du joueur ruiné est nul ou négatif), ou qu'elle se poursuive indéfiniment sans que les avoirs des deux joueurs cessent d'être positifs.

On suppose:

- que les g_i sont des entiers premiers entre eux (ce qui revient à prendre comme unité leur plus grand commun diviseur),

- qu'ils sont rangés dans l'ordre naturel de croissance :

$$g_1 < g_2 \dots \quad < g_{n-1} < g_n,$$

- que g_1 et g_n sont de signes contraires (faute de quoi le problème serait dépourvu d'intérêt) :

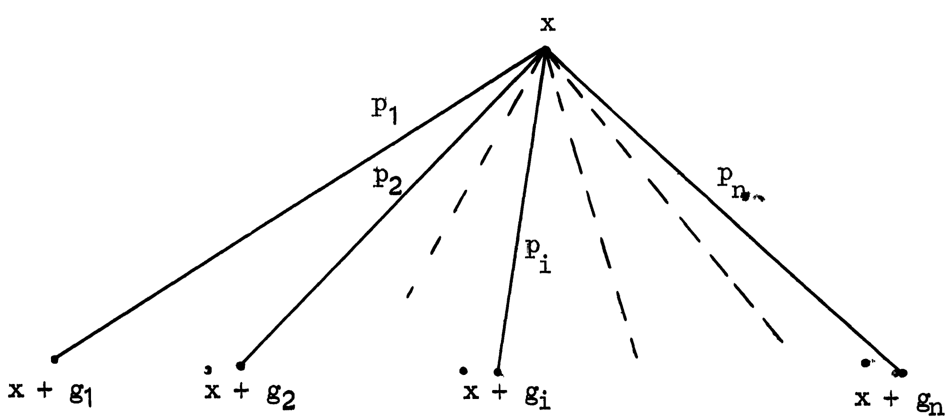
$$g_1 < 0 , \qquad g_n > 0.$$

Problème: Déterminer, au début de la partie, les probabilités des évènements "ruine du joueur A" et "ruine du joueur B".

*

* *

La méthode de résolution des problèmes de ce type est la même que celle employée dans le cas particulier précédent. Un coup quelconque de la partie du jeu considéré entre A et B, peut être représenté par le schéma suivant, où figurent seulement les avoirs de A (mais, si x et y sont à un moment quelconque les avoirs de A et B, $x + y = a + b = K$):



Comme dans l'exemple présenté plus haut, on part du fait que, la partie pouvant en principe se poursuivre indéfiniment, les probabilités de ruine de chacun des joueurs A et B, à un instant donné, ne dépendent que de l'avoir x du joueur A à cet instant, et l'on désigne ces probabilités respectives par $p_A(x)$ et $p_B(x)$.

Le vecteur $P(x)$, de coordonnées $p_A(x)$ et $p_B(x)$, est solution de l'équation de récurrence linéaire :

$$P(x) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \, P(x + g_i) .$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} P(0) = P(-1) = \dots = P(g_1 + 1) = (1, 0), \\ P(K) = P(K + 1) = \dots = P(K + g_n - 1) = (0,1) . \end{cases}$$

(En effet, les sommets terminaux correspondant à la ruine de A, par exemple, peuvent être marqués 0, − 1, − 2, ..., $g_1 + 1$, puisque le joueur A peut jouer avec un avoir au moins égal à 1 et qu'il peut perdre au plus $|g_1|$.).

Résolution de l'équation de récurrence

Les calculs sont développés en annexe.

Le résultat final peut en général s'écrire sous la forme suivante :

$$P(x) = C_{g_1+1}\, u_{g_1+1}^x + C_{g_1+2}\, u_{g_1+2}^x + \ldots + C_{-1}\, u_{-1}^x$$

$$+ P_o(x) + C_1\, u_1^{x-K} + C_2\, u_2^{x-K} + \ldots + C_{g_n-1}\, u_{g_n-1}^{x-K},$$

où: − les u_i sont les racines de l'équation caractéristique de degré $g_n - g_1$:

$$1 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, u^{g_i}, \text{ ou } u^{-g_1} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i\, u^{g_i - g_1},$$

qui admet toujours une racine égale à 1 et une seule autre racine réelle positive désignée par u_o, puis $g_n + |g_1| - 2$ autres racines, réelles négatives ou imaginaires, dont $(|g_1| - 1)$ sont de module inférieur à 1 et à u_o (ce sont les u_i d'indice négatif dans la formule précédente) et $(g_n - 1)$ sont de module supérieur à 1 et à u_o (ce sont les u_i d'indice positif dans la formule précédente).

$$\text{et} \qquad P_o(x) = \begin{cases} C_o \cdot u_o^x + C & \text{, si } u_o < 1, \text{ c-à-d. si } \sum_i p_i g_i > 0, \\ C_o + (C - C_o)\, \frac{x}{K}, & \text{si } u_o = 1, \text{ c-à-d. si } \sum_i p_i g_i = 0, \\ C + C_o \cdot u_o^{x-K} & \text{, si } u_o > 1, \text{ c-à-d. si } \sum_i p_i g_i < 0 \end{cases}$$

− les C_i sont des vecteurs constants déterminés sans ambiguïté par les conditions aux limites.

On vérifie, dans tous les cas, d'après les conditions aux limites, que :

$$p_A(x) + p_B(x) = 1,$$

c'est-à-dire que l'évènement "le jeu se poursuit indéfiniment, sans qu'aucun joueur soit ruiné" a une probabilité nulle de se produire.

La formule générale donnant P(x) devrait être modifiée de façon classique si certaines des racines u_i autres que 1 et u_o étaient multiples: u_i^x devrait être multiplié par un polynôme de degré (h − 1) en x si u_i était racine multiple d'ordre h. Mais les résultats obtenus resteraient qualitativement inchangés.

Cas où l'un des joueurs dispose d'une fortune pratiquement illimitée

Quand la somme K des avoirs des joueurs croît indéfiniment, l'avoir x du joueur A (par exemple) restant fini, il faut étudier les valeurs limites des vecteurs constants C_i. Les résultats dépendent de la place de la racine réelle positive u_o par rapport à 1:

Si $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i \leqslant 0$, c'est-à-dire si l'espérance mathématique de gain du joueur A est négative ou nulle (ce qui implique $u_0 \geqslant 1$), la probabilité $p_A(x)$ pour que A soit ruiné tend vers 1, de sorte que la ruine du joueur A est alors quasi-certaine (même si $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i = 0$, c'est-à-dire si le jeu est "équitable").

Si $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i > 0$, c'est-à-dire si l'espérance mathématique de gain du joueur A est positive (ce qui implique $u_0 < 1$), la probabilité $p_A(x)$ pour que A soit ruiné tend vers une limite comprise entre 0 et 1, cette limite tendant à son tour vers 0 si l'avoir x de A croît indéfiniment. Cela résulte du fait que la limite de $p_A(x)$ s'exprime alors en combinaison linéaire des seuls u_i^x tels que $|u_i| < 1$, c'est-à-dire des u_i^x d'indices $i \leqslant 0$. Il faut remarquer que, de tous les u_i d'indices $i \leqslant 0$, u_0 est celui qui a le plus grand module, et l'on montrera plus loin que $p_A(x) \leqslant u_0^x$.

[Il est intéressant d'examiner à la lumière de ces résultats généraux, les résultats obtenus dans l'exemple introductif.]

Exercice -

Considérer le jeu de hasard, du type qui vient d'être étudié, où, à chaque coup, - le joueur A a la probabilité p de gagner 2 et $(1 - p)$ de perdre 1,
- le joueur B a la probabilité p de perdre 2 et $(1 - p)$ de gagner 1.

Déterminer

a) les probabilités de ruine des joueurs A et B dans les cas:

$$p = \frac{4}{7}, \quad p = \frac{1}{7}, \quad p = \frac{1}{3},$$

b) la limite des résultats obtenus, quand la somme K des avoirs des deux joueurs croît indéfiniment, l'avoir x de A ou l'avoir y de B restant fini.

4.2.- Borne supérieure du risque de ruine dans les épreuves répétées

Considérons un joueur A qui, disposant d'une fortune initiale a, joue plusieurs coups successifs d'un jeu de hasard J où il a, à chaque coup, des probabilités connues $p_1, p_2, \dots p_n$, de réaliser des gains $g_1, \dots, g_n$ (positifs, négatifs ou nuls, et non nécessairement entiers).

Supposons
$$\begin{cases} g_1 < 0, \\ g_1 < g_2 \cdots < g_{n-1} < g_n, \\ g_n > 0 \end{cases}$$

et $\sum p_i\ g_i > 0$, c'est-à-dire que <u>A est mathématiquement avantagé dans le jeu J</u>.

On se propose de trouver une borne supérieure de la probabilité $p_A(a)$ pour que le joueur A soit ruiné au cours d'une très longue partie, la ruine de A étant définie par le fait que son avoir x, initialement égal à a, est alors devenu nul ou négatif (c'est-à-dire compris entre $|g_1| + \varepsilon$ et 0, si le joueur A, qui peut perdre au plus $|g_1|$, est autorisé à jouer avec un avoir au moins égal à ε).

Soit F une fonction <u>décroissante</u> de l'avoir x du joueur A, telle que

$$\begin{cases} F(0) = 1 & \text{(ce qui précise une origine et une échelle)} \\ F(+\infty) = 0 & \\ F(x) \geqslant \sum p_i \cdot F(x + g_i), & \text{pour tout x.} \end{cases}$$

La dernière condition signifie que le joueur A ne serait plus mathématiquement avantagé dans un nouveau jeu J' obtenu à partir de J par le remplacement de chaque avoir x par un avoir égal à F(x).

D'après nos hypothèses, il existe de telles fonctions F. Il suffit de prendre, par exemple,

$$F(x) = u^x = e^{-Kx}, \text{ avec } 0 < u_0 \leqslant u = e^{-K} < 1,$$

u_0 étant la racine réelle positive, différente de 1, de l'équation caractéristique écrite plus haut :

$$1 = \sum_i p_i\ u^{gi} \qquad \text{(qui sera étudiée en Annexe).}$$

Considérons alors, dans une suite d'un nombre n quelconque de coups du jeu J, éventuellement interrompue par la ruine du joueur A ($x \leqslant 0$, $F(x) \geqslant 1$), l'espérance mathématique $E\{F(x)/a\}$ de F(x), à partir de l'avoir initial a :

$$E\left\{F(x) \mid a\right\} \leqslant F(a), \text{ quel que soit a,}$$

car le jeu J' est un jeu mathématiquement non avantageux pour le joueur A, puisqu'il en est ainsi de chacun de ses coups.

Mais $E\left\{F(x) \mid a\right\} = \sum_j pr(x = x_j \mid a) . F(x_j) \geqslant pr(x \leqslant 0 \mid a) . F(0)$, puisque la fonction F est décroissante et positive, ce qui permet de minorer la somme précédente en ne conservant que les termes où $x_j \leqslant 0$ et en remplaçant dans ces termes $F(x_j)$ par $F(0)$.

(Ce raisonnement est analogue à celui qui conduit à la formule de Bienaymé-Tchebyscheff).

$$\text{Donc } p_A(a) = pr(x \leqslant 0 \mid a) \leqslant \frac{E\left\{F(x) \mid a\right\}}{F(0)} \leqslant \frac{F(a)}{F(0)} = F(a),$$

puisque, par hypothèse $F(0) = 1$.

Ainsi, la probabilité de ruine $p_A(a)$ correspondant à l'avoir initial a du joueur A est bornée supérieurement par F(a) si la fonction F satisfait aux conditions précédemment posées (C'est le théorème de Finetti).

En particulier $p_A(a) \leqslant u_0^a$.

Les probabilités de ruine $p_1(a)$, $p_2(a)$, ... $p_n(a)$, ... du joueur A pour les suites de 1, 2, ..., n, ... coups du jeu J vérifient les relations:

$$p_1(a) \leqslant p_2(a) \leqslant \dots \leqslant p_n(a) \leqslant \dots \leqslant F(a).$$

Conclusion: Si le joueur considéré attache à l'avoir x l'utilité $G(x) = F(0) - F(x) = 1 - F(x)$, et s'il n'accepte de participer à un jeu de hasard que s'il s'agit d'un jeu mathématiquement équitable ou avantageux (au sens de von Neumann), c'est-à-dire tel que:

$$G(x) \leqslant \sum_i p_i \; G(x + g_i), \text{ pour tout } x,$$

alors son risque de ruine est borné supérieurement par F(a) quand sa fortune est égale à a.

C'est pourquoi on donne à une fonction telle que F de l'avoir x d'un joueur le nom d'indicateur de garantie.

ANNEXE

Résolution de l'équation de récurrence linéaire: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot P(x + g_i)$,

avec $g_1 < 0$, $g_1 < g_2 < \dots < g_{n-1} < g_n$, $g_n > 0$ $(g_1, g_2, \dots g_n$ entiers),

sous les conditions aux limites $\begin{cases} P(0) = P(-1) = \dots = P(g_1 + 1) = (1, 0), \\ P(K) = P(K+1) = \dots = P(K + g_n - 1) = (0,1). \end{cases}$

Cherchons les solutions particulières du type exponentiel u^x. La base u doit être solution de l'équation :

$$u^x = \sum_i p_i \cdot u^{x+gi}, \text{ ou } 1 = \sum_i p_i \, u^{gi},$$

ou, en rendant l'équation entière,

$$u^{-g_1} = p_1 + p_2 \cdot u^{g2 - g1} + \dots + p_n \cdot u^{gn - g_1}.$$

C'est une équation algébrique de degré $g_n - g_1$, dite équation caractéristique de l'équation de récurrence considérée.

Cette équation admet toujours la racine 1. Cherchons si elle admet d'autres racines réelles positives.

Pour cela, considérons la fonction γ définie par

$$e^{r\ \gamma(r)} = \sum_i p_i \ e^{rgi},$$

d'où

$$\gamma\ (r) = \frac{1}{r} \text{Log}\ (\sum_i p_i \ e^{rg_i}) = \frac{1}{r} \text{Log}\ G(r)$$

avec

$$G(r) = \sum_i p_i \ e^{rgi},$$

et

$$G'(r) = \sum_i p_i \ g_i \ e^{rgi},$$

$$G''(r) = \sum_i p_i \ g_i^2 \ e^{rg_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les premiers termes des développements de $G(r)$ et de $\gamma\ (r)$ en série de Mac-Laurin au voisinage de $r = 0$ sont donnés par les formules :

$$G(r) = 1 + r \cdot G'(0) + \frac{r^2}{2} G''(0) + \ldots,$$

et

$$\gamma(r) = \frac{1}{r} \text{Log}\left[1 + r\ G'(0) + \frac{r^2}{2} G''(0) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[r\ G'(0) + \frac{r^2}{2} G''(0) - \frac{r^2}{2} (G'(0))^2 + \ldots\right]$$

$$= G'(0) + \frac{r}{2}\left[G''(0) - (G'(0))^2 + \ldots,\right]$$

d'où

$$\gamma\ (0) = G'(0) = \sum_i p_i \ g_i,$$

et

$$\gamma'\ (0) = \frac{1}{2}\left[\sum_i p_i \ g_i^2 - (\sum_i p_i \ g_i)^2\right] = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} p_i \ p_j \ (g_i - g_j)^2.$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dr} \gamma\ (r) = \frac{1}{r} \frac{G'(r)}{G\ (r)} - \frac{1}{r^2} \text{Log}\ G(r),$$

d'où

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2 \ \frac{d}{dr} \gamma\ (r)) = \frac{G(r).\ G''(r) - (G'(r))^2}{(G(r))^2} = \sum_{i\neq j} p_i p_j (g_i - g_j)^2 \ \frac{e^{r(g_i+g_j)}}{(\sum_i p_i e^{rg_i})^2}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\ (r^2 \ \frac{d}{dr} \gamma(r)) > 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \text{si } r > 0, \ \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\gamma(r)\right) > 0 : \ r^2 . \gamma'(r) \text{ croît quand } r \text{ croît,} \\ \text{si } r = 0, \ r^2 . \gamma'(r) \text{ passe par un minimum nul,} \\ \text{si } r < 0, \ \frac{1}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\gamma(r)\right) < 0 : \ r^2 . \gamma'(r) \text{ croît quand } r \text{ décroît.} \end{cases}$$

Il en résulte que $\gamma'(r)$ est toujours positif, et que <u>la fonction γ est croissante</u>.

Cherchons les limites de $\gamma(r)$ quand $r \longrightarrow \pm \infty$:

$$G(r) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{rg_i} = p_n \, e^{rg_n} \left(1 + \frac{p_{n-1}}{p_n} \, e^{r(g_{n-1}-g_n)} + \ldots\right),$$

d'où

$$\text{Log } G(r) = \text{Log } p_n + r \, g_n + \text{Log } (1 + \varepsilon_r), \text{ avec } \lim_{r \to +\infty} \varepsilon_r = 0,$$

et

$$\gamma(r) = \frac{1}{r} \text{ Log } p_n + g_n + \frac{1}{r} . \text{Log } (1 + \varepsilon_r).$$

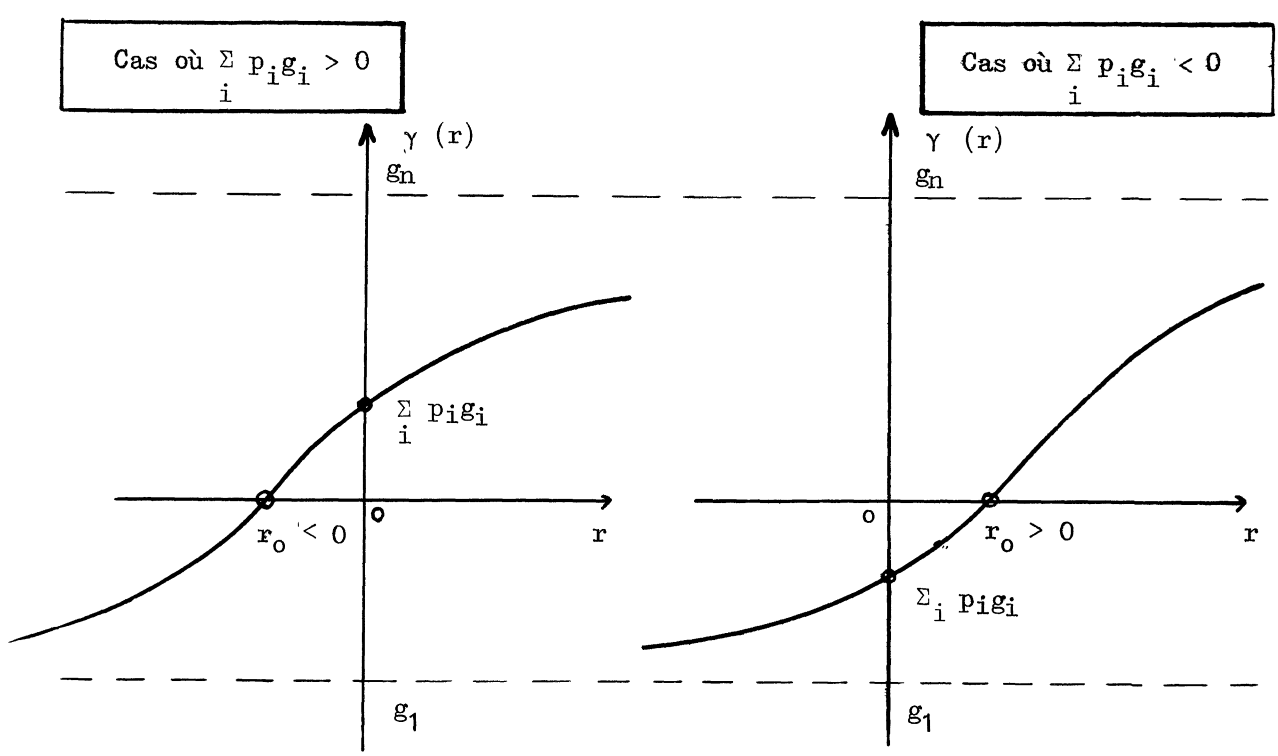
Il en résulte que

$$\lim_{r \to +\infty} \gamma(r) = g_n.$$

On montre de même que

$$\lim_{r \to -\infty} \gamma(r) = g_1.$$

Le graphe de la fonction γ présente donc l'allure suivante :



En conséquence: $\gamma(r)$ s'annule pour une seule valeur réelle de r, soit r_0, qui est négative, nulle ou positive selon que $\gamma(0) = \sum_i p_i g_i$ (espérance mathématique de gain du joueur A) est positive, nulle, ou négative.

L'équation $1 = \sum_i p_i \; u^{g_i}$ admet donc, en plus de 1, une seule racine réelle, positive, $u_0 = e^{r_0}$, qui est inférieure, égale, ou supérieure à 1 selon que $\sum_i p_i g_i$ est positif, nul, ou négatif. [Et cette conclusion ne fait pas appel à l'hypothèse selon laquelle les gains $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont entiers.]

<u>Conclusion</u>: L'équation caractéristique admet :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{une racine égale à 1} \\ \text{une autre racine réelle positive } u_0 \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 1 \quad \text{selon que } \sum_i p_i g_i \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} 1 \\ g_n - g_1 - 2 \text{ autres racines (réelles négatives, ou imaginaires).} \end{array}\right.$$

Si l'on suppose tous les entiers g_i premiers entre eux, on peut montrer, à l'aide du théorème de Rouché (1) appliqué à la dernière forme de l'équation caractéristique, que l'équation admet $(|g_1| - 1)$ racines de module inférieur à u_0 et à 1, soit $u_{g_1+1}, \ldots, u_{-1}$, et $(g_n - 1)$ racines de module supérieur à u_0 et à 1, soit $u_1, u_2, \ldots, u_{g_n-1}$.

On peut donc écrire la solution générale de l'équation de récurrence sous la forme donnée dans le texte (tout au moins, si toutes les racines u_i autres que 1 et u_0 sont des racines simples, ce qui est le cas général).

---

(1) Note: Une équation algébrique de la forme $f(Z) - g(Z) = 0$ a le même nombre de racines que l'équation algébrique $f(Z) = 0$ à l'intérieur de tout contour fermé du plan complexe sur lequel $\dfrac{|f(Z)|}{|g(Z)|} > 1$